

熱回路網モデルのシステム同定理論の展開

低次化高階微分システムの観測から元の高次状態方程式をパラメータ同定する理論への拡張

正会員

○奥山博康 *1

熱回路網 システム同定 低次化高階微分システム
状態方程式 最小二乗法 多数室換気測定

1. はじめに

既報 ([1], [2]他) の一般的拡散系のシステム同定理論では, その節点系モデルの全ての節点に励振を与え, 状態値が観測できるものとしたが, 困難な場合がある. 例えば, 多数室換気測定では天井裏空間や押入れ等は存在さえ分からないことがある. また建物の熱性能測定では, 熱容量の大きい壁がある場合, 壁内に発熱を与え温度測定も行うことは難しい. このことを数学モデルの観点からは, 元の比較的沢山の節点で高次な連立常微分方程式モデルと等価でありながらも少ない節点で低次なモデルに置き換え, この励振・応答の観測から元のシステムの同定を行う問題と見なされる. 本論では問題解決の基本的アイデアを述べ, 最も簡単な具体的事例で説明し検証した.

2. 基本的アイデア

元の高次な連立常微分方程式モデルを状態方程式モデルと呼ぶ. この状態ベクトルを, 励振・観測が可能なものを x_1 に, その他の不可能なものを x_2 に分ける. すると状態方程式は (1)式に示すように記述される. ここで x_1 に関する式を取り出して両辺時間微分し 2 次微分を持つ式と, x_2 に関する式を取り出し, 両式から x_2 を消去した(2)式を記述することができる. 低次化システムのパラメータは元の状態方程式のパラメータと関係式を持つ. 既報のシステム同定理論を(2)式をその観測方程式として適用し, この(2)式のパラメータ同定が成されれば, 元(1)式のパラメータも求められる.

3. 簡単な例題での理論の説明

最も簡単で具体的な事例で説明と検証を行う. 図 1 に示すように押入れを持ち周囲が外気の居室を想定する. 空間容積や風量等の記号は図中に示す. この 2 室モデルの元の状態方程式は (3)式で記述され, 本問題設定では押入れはガス供給も濃度観測も不可能とする.

$$\begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{1,3} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_3 + \begin{bmatrix} r_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot g_1 \quad (3)$$

ここにコンダクタンスマトリックス対角要素は,

$$q_{1,1} = -q_{2,1} - q_{3,1} \quad (4), \quad q_{2,2} = -q_{1,2} \quad (5)$$

である. (3)の上半分から次式を記述する.

$$x_2 = q_{1,2}^{-1} \cdot (v_1 \cdot \dot{x}_1 - q_{1,1} \cdot x_1 - q_{1,3} \cdot x_3 - r_{1,1} \cdot g_1) \quad (6)$$

一方, (3)の下半分の式へ(6)式を代入する.

$$\dot{x}_2 = v_2^{-1} \cdot q_{2,1} \cdot x_1 + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,2}^{-1} \cdot (v_1 \cdot \dot{x}_1 - q_{1,1} \cdot x_1 - q_{1,3} \cdot x_3 - r_{1,1} \cdot g_1) \quad (7)$$

これら(6)と(7)式で x_2 もこの微分も x_1 で表された. 次に(3)式

基本的アイデア

元の1階微分の高次システム(状態方程式モデル)

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{01} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_0 + \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot g \quad (1)$$

状態と入力値の高階微分を導入し, 演繹的変形により次式の低次化2階微分システムを記述する

$$M_{1,1} \cdot \ddot{x}_1 = D_1 \cdot \dot{x}_1 + D_0 \cdot x_1 + E_1 \cdot \dot{x}_0 + F_1 \cdot \dot{g} + E_0 \cdot x_0 + F_0 \cdot g \quad (2)$$

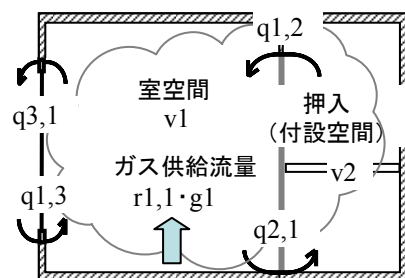
低次化システムの状態と入力値の観測により, 低次化システムパラメータの同定を行い, 同時に元の状態方程式モデルのシステムパラメータを求める

の上半分の両辺を時間微分し 2 次微分が含まれる式に(7)式を代入して x_2 を消去し, x_1 に関して整理する.

$$v_1 \cdot \ddot{x}_1 = (q_{1,1} + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot v_1) \cdot \dot{x}_1 + (v_2^{-1} \cdot q_{1,2} \cdot q_{2,1} - v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,1}) \cdot x_1 - v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,3} \cdot x_3 + q_{1,3} \cdot \dot{x}_3 - v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot r_{1,1} \cdot g_1 + r_{1,1} \cdot \dot{g}_1 \quad (8)$$

次に(8)式を既知パラメータと可観測量だけで構成される項は左辺に移動して観測方程式とする. この際に元システムのパラメータが幾つか組み合わせられて形成される状態値や入力値への係数は, それぞれまとめて d_i なる記号で表示する.

$$r_{1,1} \cdot \dot{g}_1 = v_1 \cdot \ddot{x}_1 - q_{1,1} + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot v_1 \cdot \dot{x}_1 - (v_2^{-1} \cdot q_{1,2} \cdot q_{2,1} - v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,1}) \cdot x_1 + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,3} \cdot x_3 - q_{1,3} \cdot \dot{x}_3 + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot r_{1,1} \cdot g_1 \cong d_1 \cdot \ddot{x}_1 + d_2 \cdot \dot{x}_1 + d_3 \cdot x_1 + d_4 \cdot (-g_1) \quad (9)$$



v_1 と v_2 のガス濃度は x_1 と x_2 , 外気濃度は x_3 であり, $r_{1,1}$ は供給ガス流量 g_1 からガス濃度流量への換算係数

図1 押入れを持つ居室の簡単な事例

ここに $q_{2,2}$ は負であるが d_i は全て正になるように, (9)式右辺の第 4 項のガス供給流量 g_1 には負号を付けた. もし g_1 が mg/s でガス濃度が mg/m^3 で風量が m^3/s ならば $r_{1,1}$ は 1 で既知である. (9)に最小二乗法を適用して d_i が求められれば元パラメータは次式で計算される.

$$v_1 = d_1 \quad (10)$$

$$q_{1,3} = q_{3,1} = (d_4^{-1} r_{1,1}) d_3 \quad (11)$$

$$v_2 = -d_1 + (d_4^{-1} r_{1,1}) d_2 - (d_4^{-1} r_{1,1}) (d_4^{-1} r_{1,1}) d_3 \quad (12)$$

$$q_{2,1} = q_{1,2} = -(d_4^{-1} r_{1,1}) d_1 + d_2 - (d_4^{-1} r_{1,1}) d_3 \quad (13)$$

ここで(9)の方程式誤差の期間積分を最小二乗の評価関数とする。この期間を Δt で nt 区間に分割し $(k-1)\Delta t$ から $k\Delta t$ までの積分は次式で記述される。

$$r_{1,1} \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{g}_1 dt = d_1 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \ddot{x}_1 dt + d_2 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{x}_1 dt + d_3 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x_1 dt + d_4 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} (-g_1) dt \quad (14)$$

この(14)式の各項の積分は次式で定義し計算する。

$$y_k = r_{1,1} \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{g}_1 dt = r_{1,1} (g_1(k\Delta t) - g_1((k-1)\Delta t)) \quad (15)$$

$$1z_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \ddot{x}_1 dt = \dot{x}_1(k\Delta t) - \dot{x}_1((k-1)\Delta t) \\ \cong (x_1((k+1)\Delta t) - x_1((k-1)\Delta t) - x_1(k\Delta t) + x_1((k-2)\Delta t)) / (2\Delta t) \quad (16)$$

$$2z_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{x}_1 dt = x_1(k\Delta t) - x_1((k-1)\Delta t) \quad (17)$$

$$3z_k \cong \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x_1 dt = (x_1(k\Delta t) + x_1((k-1)\Delta t)) \Delta t / 2 \quad (18)$$

$$4z_k \cong \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} -g_1 dt = -(g_1(k\Delta t) + g_1((k-1)\Delta t)) \Delta t / 2 \quad (19)$$

さらに低次化システムのパラメータ d_i と z_k によるベクトルとマトリックスを次の(20), (21)式で定義する。

$$\mathbf{a} = {}^t(d_1, d_2, d_3, d_4) \quad (20), \quad \mathbf{Z}_k = [1z_k, 2z_k, 3z_k, 4z_k]_k \quad (21)$$

この時、(9)式は(22)式で、方程式誤差 e_k は(23)式で、そして観測期間の誤差積分の二次形式評価関数は(24)式で表される。

この J を \mathbf{a} で微分し $\mathbf{0}$ とおいて、低次化システムのパラメータが求められる。そして前述した様に(10)から(13)式で元システムのパラメータが求められる。

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \quad (22), \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \quad (23)$$

$$J = \sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{nt} {}^t (\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \quad (24)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{k=1}^{nt} ({}^{-t} \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{y}_k - {}^{-t} \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{y}_k + 2 \cdot {}^{-t} \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\mathbf{a} = \left(\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{y}_k \right) \quad (26)$$

4. 計算機実験による検討

励振の与え方がまず問題になる。(9)式左辺から、ガス供給の時間微分が変化することが必要であるから、矩形波のなガス供給は適当ではない。そこで正弦波のな励振を幾つか試した。表1に示す単一周波数の励振と、二種の周波数の合成励振を試みた。模擬観測値生成のシミュレーションは10秒間隔で24時間分行い、後者の複数周波数の合成励振に関しては図2の様な濃度の応答を得た。一方システム同定のための Δt は30秒をとり、期間は12時から16時までの4時間分の x_1 と g_1 に関する変化量を用いた。

元システムパラメータの同定結果を、正解値とともに、短周波数励振の場合(a)と、複数周波数合成励振(a)+(b)の場合の二つを比較して表2に示す。(a)+(b)の場合が比較的良好な結果を与えている。

5. 理論の一般化の問題

本論での簡単な例題では、低次化システムと元システムの同定パラメータはスカラーで陽的な関係式を持つが、一般の問題ではマトリックスで陰伏的な関係となり、非線形方程式問題になる可能性がある。また本論では2階微分までを導入したが、元の n 次の状態方程式に等価で、1つの状態変数の n 階微分方程式一本に置き換えることも可能である。例えば室温変化の観測値から n 階微分値までを有意な精度で引き出すことができれば、室温だけの測定から n 次状態方程式モデルを同定することも可能なはずである。しかし実際上の諸々の測定誤差を考えれば有意な微分階数には限界があるだろう。さらに高階微分導入によって消去した状態変数は外界から直接的に入力を受けない前提を設けたが、必要十分の制約か検討を要する。

表1 ガス供給の二種の励振

ガス供給の励振=正弦波1+正弦波2 (mg/sec)	
(a): 正弦波1	$0.0085 \cdot \sin(2\pi \cdot k \cdot \Delta t / 7200) + 0.0085$
(b): 正弦波2	$0.0085 \cdot \sin(2\pi \cdot k \cdot \Delta t / 18000) + 0.0085$

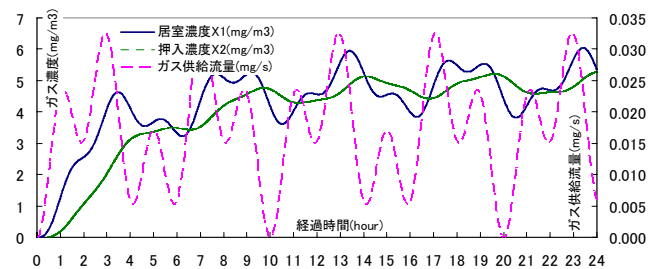


図2 ガス供給と濃度変化の模擬観測値

表2 システム同定結果の精度比較

	V_1 (liter)	V_2 (liter)	$q_{1,2}=q_{2,1}$ (liter/s)	$q_{1,3}=q_{3,1}$ (liter/s)
正解	25000	12500	2.084	3.472
(a)+(b)	24955	12443	2.162	3.477
(a)だけ	24617	7779	2.347	3.485

6. まとめ

高階微分の低次化システムから、元の状態方程式のパラメータを同定する基本的アイデアを示し、簡単な例題で検証した。さらに適切な励振や、理論の一般化の問題について検討した。

【謝辞】

同僚の大西由哲氏、NICの益子智久氏の協力を得ました。

【参考文献】

- [1] 奥山博康「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメータの同定理論」, 日本建築学会論文報告集, Vol. 344, 1984年10月, pp103-115
- [2] 奥山博康「換気を含めた熱性能指標の推定」, 日本建築学会環境工学委員会, 熱環境小委員会伝熱WG熱性能評価SWG, シンポジウム, 建物の熱性能とその評価, 2003年3月, pp33-40