日本建築学会大会学術講演梗概集
（九州） 2007年 8 月

# 濃度減衰換気測定法の統計的データ分析法

正会員 ○奥山博康*1 同 吉野 博*2
同 加藤信介*3 同 倉渕 隆*4
同 早川 眞*5 同 内海康雄*6

換気測定法 濃度減衰法 最小二乗法
残差分析 誤差伝播 最適化問題

## １．はじめに

単一空間の換気測定の濃度減衰法は実施上の制約も少なく実用的でよく用いられている．しかし従来のデータ分析法は確定論的方法だったので誤差の統計的評価が十分ではなかった．また換気量の不変性や単室性及びガス濃度の均一性等の測定の前提が成立して正しく測定されたかの評価方法も明確に示されていなかった．また換気回数の推定誤差を最小にする減衰期間の取り方も数学的裏付けが不十分であった．そこで我々はこれらの問題を解決するために最小二乗法を原理とする統計論的方法も検討している．

## ２．最小二乗法による換気回数推定

換気測定規格[1]等にもある濃度減衰過程の解析解から初期時刻 $t_1$=0 と経過時刻 $t_j$ について次式が記述できる．

$$\log_e C(t_j) = -N \cdot t_j + \{\log_e C(t_1) + N \cdot t_1\} \qquad (1)$$

ここに N は換気回数，$C(t_j)$は $t_j$ 時点でのガス濃度を表す．方程式誤差 $e_j$ を次式で定義する．次式の $y_j$，**Z**j と **a** の行列表示を定義して最小二乗解を導く．

$$\begin{aligned} e_j &= \log_e C(t_j) - \left[-N \cdot t_j + \left(\log_e C(t_1) + N \cdot t_1\right)\right] \\ &= y_j - \begin{bmatrix} t_j & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -N \\ \log_e C(t_1) + N \cdot t_1 \end{bmatrix} = y_j - \mathbf{Z}_j \cdot \mathbf{a} \qquad (2) \end{aligned}$$

N と初期濃度の対数を含むベクトル **a** について，最小二乗解は次式で計算される．ここに $n_p$ は測定時点数で，j が 1 は初期濃度を表し，$n_p$ は 2 以上とする．

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= \left(\sum_{j=1}^{np} {}^t\mathbf{Z}_j \cdot \mathbf{Z}_j\right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{np} {}^t\mathbf{Z}_j \cdot y_j\right) \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{np} t_j^2 & \sum_{j=1}^{np} t_j \\ \sum_{j=1}^{np} t_j & np \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{np} t_j \cdot \log_e C(t_j) \\ \sum_{j=1}^{np} \log_e C(t_j) \end{bmatrix} \qquad (3) \end{aligned}$$

これを計算すれば換気回数の推定値は次式となる．

$$\hat{N} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{np} t_j\right) \cdot \sum_{j=1}^{np} \log_e C(t_j) - n_p \cdot \sum_{j=1}^{np} t_j \cdot \log_e C(t_j)}{n_p \cdot \sum_{j=1}^{np} {t_j}^2 - \left(\sum_{j=1}^{np} t_j\right)^2} \qquad (4)$$

多くの場合は $t_j$ が(j-1)Δt とする等間隔Δt で測定されるので，この式は比較的に簡潔な次式で表示することもできる．ここに T は($n_p$-1)Δt で定義される全減衰期間である．

$$\hat{N} = \frac{12}{n_p(n_p+1)T} \left[ \sum_{j=1}^{np} \left\{ \frac{(n_p-1)}{2} - (j-1) \right\} \log_e C\left\{ \left( \frac{j-1}{n_p-1} \right) T \right\} \right] \qquad (5)$$

## ３．濃度測定誤差の影響を最小化する減衰期間

ガス濃度測定の誤差分散 $\sigma^2_C$ は機器特性として予め予測可能であり，これから換気回数推定誤差分散 ${}_m\sigma^2_N$ への誤差伝播則は次式で記述することができる．

$${}_m\sigma_N^2 = \sigma_C^2 \sum_{j=1}^{np} \left( \frac{\partial \hat{N}}{\partial C(t_j)} \right)^2 \qquad (6)$$

前述の式(5)を $C(t_j)$で微分して次式が得られる．

$$\frac{\partial \hat{N}}{\partial C(t_j)} = \frac{12}{(n_p-1)n_p(n_p+1)\Delta t} \left\{ \frac{(n_p-1)}{2} - (j-1) \right\} \frac{1}{C(t_j)} \qquad (7)$$

また本節では減衰モデルの構造的な変化は無いとするから次式が成り立つ．

$$C(t_j) = C(t_1) \cdot \exp\left( -\frac{(j-1)}{(n_p-1)} N \cdot T \right) \qquad (8)$$

これら(7)式と(8)式から(6)式は次式の様になる．

$$\begin{aligned} {}_m\sigma_N^2 &= \frac{12^2 \cdot \sigma_c^2}{n_p^2 \cdot (n_p+1)^2 \cdot T^2 \cdot C(t_1)^2} \\ &\cdot \sum_{j=1}^{np} \left\{ \frac{(n_p-1)}{2} - (j-1) \right\} \exp\left\{ \frac{2(j-1)}{(n_p-1)} NT \right\} \qquad (9) \end{aligned}$$

本節の目的はこの換気回数の推定誤差分散を減衰期間 T に関して最小化することである．そこで T で微分して 0 と置いた関数を導く．

$$\begin{aligned} \frac{\partial_m \sigma_N^2}{\partial T} &= -\frac{2 \cdot \sigma_c^2 \cdot 12^2}{n_p^2 (n_p+1)^2 T^3 C(t_1)^2} \\ &\cdot \left[ \sum_{j=1}^{np} \left\{ \frac{(n_p-1)}{2} - (j-1) \right\}^2 \exp\left\{ \frac{2(j-1)}{(n_p-1)} NT \right\} - NT \right. \\ &\left. \cdot \sum_{j=1}^{np} \frac{(j-1)}{(n_p-1)} \left\{ \frac{(n_p-1)}{2} - (j-1) \right\}^2 \exp\left\{ \frac{2(j-1)}{(n_p-1)} NT \right\} \right] = 0 \qquad (10) \end{aligned}$$

この式から NT に関する次の非線形方程式が得られる．

Statistical Data Analysis for Concentration Decay Ventilation Rate Measurement Method

OKUYAMA Hiroyasu et al.

$$f(NT)=\sum_{j=1}^{np}\left\{\frac{(n_p-1)}{2}-(j-1)\right\}^2\cdot\exp\left\{\frac{2(j-1)}{(n_p-1)}NT\right\}-NT$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{np}\frac{(j-1)}{(n_p-1)}\left\{\frac{(n_p-1)}{2}-(j-1)\right\}^2\exp\left\{\frac{2(j-1)}{(n_p-1)}NT\right\}=0 \quad (11)$$

この NT に関する非線形方程式は測定点数 $n_p$ によって変化するので $n_p$ は 2 から始めて約 100 点まで各々で最適値の NT を求めた．非線形方程式の解法はニュートン法を用いた．このために NT に関する微分関数を用いた．

いま仮定した NT に修正値 δNT を加えて正解になるとすれば，仮定値 NT+δNT においてテーラー展開第一項近似式は次式で表される．これが繰り返し計算で解に接近するための漸化式となる．

$$f(NT+\delta NT)\cong f(NT)+\frac{\partial f(NT)}{\partial NT}\cdot\delta NT=0 \quad (12)$$

初期値は僅かに 1 よりも大きい値とした．こうして求められた最適の $NT_m$ に関する曲線を図 1 に示す．

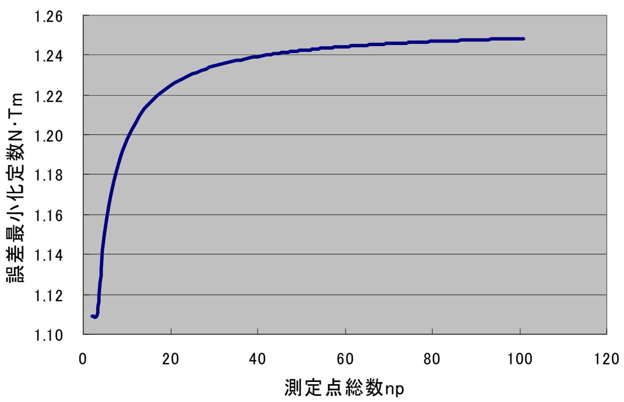


図 1　誤差最小化定数 $NT_m$ と測定点数の関係

最初仮定された期間 T により求められた N により期間を修正し，これをある程度収束するまで繰り返す．

## 4．誤差評価

測定の適切さと推定した換気回数の誤差を調べる必要がある．本測定で必要な前提である，他室との影響からの独立性，単一空間内のガス濃度の一様性，換気風量の時間不変性等が成り立たなければ基本方程式(1)で大きな残差を生じる．またガス濃度の測定誤差も残差を生ぜしめる．従ってまず残差分析を適用する．残差計算のために次の(13)式の初期濃度の対数の推定値も必要である．

$$\log_e\hat{C}(t_1)=\frac{\left(\sum_{j=1}^{np}t^2{}_j\right)\cdot\sum_{j=1}^{np}\log_e C(t_j)-\left(\sum_{j=1}^{np}t_j\right)\cdot\sum_{j=1}^{np}t_j\cdot\log_e C(t_j)}{n_p\cdot\sum_{j=1}^{np}t_j{}^2-\left(\sum_{j=1}^{np}t_j\right)^2} \quad (13)$$

方程式(1)から次式で残差 vj を計算する．ここに vj は j 番目の測定データに対応する残差を表す．

$$v_j=\log_e C(t_j)-\log_e\hat{C}(t_1)+\hat{N}\cdot t_j \quad (14)$$

方程式誤差の期待値分散は方程式残差の平均で計算する．この時に換気回数の推定誤差分散は(16)式で計算される．

$$\bar{v}^2=\frac{1}{n_p}\sum_{j=1}^{np}v_j{}^2 \quad (15),\qquad \hat{\sigma}_N{}^2=\frac{n_p\cdot\bar{v}^2}{n_p\cdot\sum_{j=1}^{np}t_j{}^2-\left(\sum_{j=1}^{np}t_j\right)^2} \quad (16)$$

次に決定係数を導く．総変動 sy は(17)式で計算される．残差二乗和 s(N)は(18)式で計算される．残差二乗和と総変動により決定係数 COD は(19)式で計算される．

$$s_y=\sum_{j=1}^{np}\left[\log_e C(t_j)\right]^2-\frac{1}{n_p}\cdot\left[\sum_{j=1}^{np}\log_e C(t_j)\right]^2 \quad (17)$$

$$s\left(\hat{N}\right)=\sum_{j=1}^{np}v_j{}^2 \quad (18),\qquad COD=1-\frac{s\left(\hat{N}\right)}{s_y} \quad (19)$$

(16)式の換気回数の推定誤差分散と(19)式の決定係数からも誤差評価ができる．推定換気回数の誤差分散を方程式残差からの伝播と見なして評価する方法は，濃度の測定誤差だけではなく，数学モデルの前提と実現象の様々な食い違いを考慮でき適切である．ここでガス濃度の測定誤差だけに起因する(9)式の誤差分散 $_m\sigma^2{}_N$ に比べて，総合的な誤差分散 $\sigma^2{}_N$ がかなり大きければ，数学モデルの前提と実現象の様々な食い違いが大きいことを意味する．こうした測定結果の妥当性の評価のために次式で定義するモデル前提の不適合率と呼ぶ指標 β を定義する．

$$\beta=\frac{\hat{\sigma}_N}{{}_m\sigma_N} \quad (20)$$

## 5．まとめ

濃度減衰法に関して最小二乗法に基づく統計的データ分析法を述べた．濃度測定誤差による換気回数の推定誤差分散を最小化する減衰期間，換気回数及び測定点数の関係を表す曲線を得た．測定結果の信頼性と誤差の評価を行うために，残差分析による換気回数の推定誤差分散と決定係数に加え，モデル前提の不適合率と呼ぶ指標を定義した．

〈あとがき〉　本研究は，(財)建材試験センターに設けられた ISO/TC163/SC1/WG10 委員会（委員長:吉野博）の調査研究の一環として実施したものです．関係各位に謝意を表します．

## 【参考文献】

[1] SHASE-S116-2003 トレーサガスを用いた単一空間の換気量測定法,空気調和･衛生工学会規格,制定 2004 年 4 月

*1 清水建設(株)技術研究所・上席研究員・工博
*2 東北大学大学院工学研究科・教授・工博
*3 東京大学生産技術研究所・教授 工博
*4 東京理科大学工学部・教授・工博
*5 日本大学理工学部建築学科・教授・工博
*6 宮城工業高等専門学校建築学科・教授・工博

*1 Chief Research Engineer, Institute of Technology, Shimizu corporation, Dr. Eng.
*2 Prof., Graduate School of Eng., Tohoku Univ., Dr. Eng.
*3 Prof., I.I.S. , University of Tokyo, Dr. Eng
*4 Prof., Faculty of Eng., Tokyo Univ. of Science, Dr. Eng.
*5 Prof., College of Science and Technology, Nihon-Univ., Dr. Eng
*6 Prof., Miyagi National College of Technology, Dept. of Architecture, Dr. Eng.