

## 空間内表面間の長波長放射の無限回相互反射を考慮した熱回路網モデル

正会員 ○ 奥山 博康\*1

熱回路網                    長波長放射伝熱            ラジオシティ法  
無限回相互反射            相当放射率                一般化熱コンダクタンス

## 1. はじめに

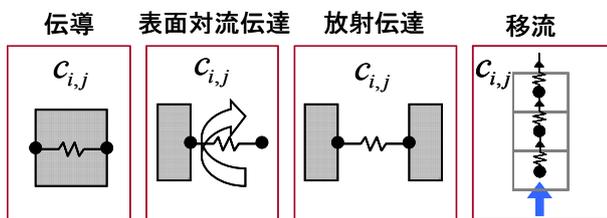
室内表面間の長波長放射熱伝達に関して、無限回の相互反射も考慮したモデルであるラジオシティ法<sup>[1]</sup>が知られているが、これらは表面温度が与えられた場合に面間の放射熱流を計算する方法である。数値流体解析では、節点毎の熱流収支式を前進型の陽解法で時間差分化して解を進める解法がとられることが多いので、この方法を適用することになるが、陽解法ゆえに収束しない等の数値解法上の問題が生じやすいと思われる。

一方著者の熱回路網<sup>[2]</sup>の方程式では、長波長放射に限らず伝導や対流などの一般化熱コンダクタンスを与えて全節点の温度に関する連立常微分方程式を構成し、連立した陰解法で解くので無条件安定に解が得られる。ただし長波長放射伝達は両表面の絶対温度の4乗差に比例するので、両表面温度に依存して変化する線形化した一般化熱コンダクタンスを定義していた<sup>[4][5]</sup>。

しかし室空間等の内表面の間での無限回相互反射を考慮するとすれば、長波長放射の一般化熱コンダクタンスも従来のものを改良しなければならない。本論ではラジオシティ法を参考にして改良モデルを考案した。

## 2. 熱回路網の方程式モデル

熱回路網モデルの骨組みは、完全連結システムと名付けた(1)の節点方程式で記述できる。これにより状態方程式とも呼ぶ連立常微分方程式(2)が構成される。ここに  $x_j$ ,  $m_{i,j}$ ,  $c_{i,j}$ ,  $r_{i,j}$  は各々、節点  $j$  の温度、節点  $i$  に関する一般化熱容量、節点  $j$  から節点  $i$  への一般化熱コンダクタンス、発熱源  $j$  から節点  $i$  への配分係数である。また  $n$  は未知数温度扱いの、 $no$  は既知数温度扱いの節点数、 $ng$  は発熱源の総数である。熱・換気回路網計算プログラム NETS のモデルでは、伝導、伝達、移流、長波長放射、貫流等の全ての伝熱形態を一つのパラメータの一般化熱コンダクタンス  $c_{i,j}$  で表現し、空間次元にも形状にも依存せず一般に成立する(1)式を用いるので、汎用性があるのが特徴である。

図1 全ての伝熱形態を同じ  $c_{i,j}$  で表示する

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} \cdot \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n+no} c_{i,j} \cdot (x_j - x_i) + \sum_{j=1}^{ng} r_{i,j} \cdot g_j \quad (1)$$

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{g} \quad (2)$$

外気温度などの規定温度と発熱量からなる駆動条件を持つベクトル  $\mathbf{f}$  を次式で定義する。

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{g} \quad (3)$$

無条件安定で実用的な後退差分と呼ばれる近似積分を、時刻番号  $k-1$  から  $k$  に進める漸化式で解いておけば次式で表される。

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{M}/\Delta t - \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{M}/\Delta t \cdot \mathbf{x}_{k-1} + (\mathbf{M}/\Delta t - \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{f}_k \quad (4)$$

さらに射影分解による厳密解も導いている。まず(5)式による  $\mathbf{C}^*$  なるシステムマトリックスを定義し、入力ベクトル  $\mathbf{f}^*$  も(6)式で定義する。この時、状態方程式(2)式は(7)式に書き改められる。

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \quad (5) \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{f} \quad (6) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}^* \quad (7)$$

システムマトリックスの  $i$  番固有値を  $\alpha_i$  とし対応する固有ベクトルを  $\mathbf{p}_i$  とすると次の(8)式が記述される。

$$\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{p}_i = \alpha_i \cdot \mathbf{p}_i \quad (8)$$

さらにこれに対応する射影子マトリックス  $\mathbf{P}_i$  ( $n \times n$ ) を  $n$  本の固有ベクトルを用いて次式の様定義する。

$$\mathbf{P}_i = [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{p}_i, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \cdot [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]^{-1} \quad (9)$$

この射影子と固有値を用いれば、時間積分の解析解は次式の様記述できる。

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot e^{\alpha_i(t-t_0)} \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot e^{\alpha_i(t-\tau)} \cdot \mathbf{f}^*(\tau) d\tau \quad (10)$$

離散時間的な入力が折線関数と階段関数に近似される場合について、それぞれ漸化式も導いてある。(4)の近似解と(10)の厳密解は一長一短あるので目的に応じて使い分けている。長波長放射の  $c_{i,j}$  を含む系であれば  $\Delta t$  毎にそれらが変化するので比較的計算負荷の小さい(4)の近似解が適している。

## 3. 長波長放射の一般化熱コンダクタンス

放射の一般化熱コンダクタンスについては、次式の放射の相当伝達率  $\alpha_r$ <sup>[5]</sup> を定義しておくことで、放射の一般化熱コンダクタンスが計算される。非定常計算の時々刻々に、または定常計算の収束繰り返し計算の過程で、変化する放射の両表面平均絶対温度  $x_m$  において逐次に線形近似化して扱う。ここに  $c_b$  はステファンボルツマンの定数、放射率は  $\varepsilon$ 、面  $i$  の面積は  $s_p$ 、面  $i$  から面  $j$  を見る形態係数は  $f_{i,j}$  である。一般化熱コンダクタンス  $c_{i,j}$  の添え字の定義と方向性が逆とする。

$$\alpha_r = 0.04 \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \cdot c_b \cdot (x_m/100)^3 \quad (11)$$

$$c_{i,j} = \alpha_r \cdot s_j \cdot f_{j,i} = \alpha_r \cdot s_i \cdot f_{j,i} = c_{j,i} \quad (12)$$

図2に模式的に示す様な、室内表面の長波長放射伝熱は、各面が絶対温度の4乗に比例して発する放射だけでなく、他の面からの放射を自分の面が反射して発する成分も加わる。こうした(自己放射分+反射分)を発散能  $b_i$  (radiosity) と呼ぶ。空間を囲む面の最大個数は  $n+no$  になり得る。これらの面のうち、面  $i$  を取り上げて図3に示すが、次の(13)の発散能に関する式が成り立つ<sup>[2]</sup>。これは面積と形態係数の積に関する(12)式の様な相反定理から面積  $s_i$  は消去でき(14)式が得られる<sup>[2]</sup>。

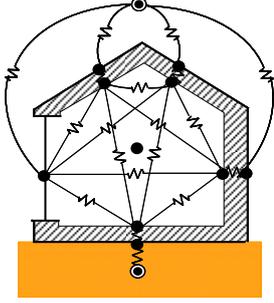


図2 全体の熱回路網モデル

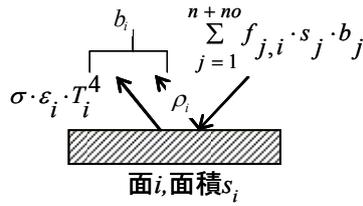


図3 自己放射に反射も含めた発散能  $b_i$  (Radiosity)

$$s_i \cdot b_i = \sigma \cdot \epsilon_i \cdot s_i \cdot T_i^4 + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{n+no} f_{j,i} \cdot s_j \cdot b_j \quad (13)$$

$$b_i = \sigma \cdot \epsilon_i \cdot T_i^4 + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{n+no} f_{i,j} \cdot b_j \quad (14)$$

この(14)式は全部の面で成立するから、一括してマトリックス表示すれば次の(15)式となる。ここで  $nt=n+no$  と記号定義する。

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \epsilon_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ \vdots \\ T_m^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \rho_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,m} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \cdots & f_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、(15)式中出现してくるベクトルとマトリックスを、次の様に記号定義する。

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (16) \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ \vdots \\ T_m^4 \end{bmatrix} \quad (17) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \epsilon_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_m \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \rho_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_m \end{bmatrix} \quad (19) \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,m} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \cdots & f_{m,m} \end{bmatrix} \quad (20)$$

これらの記号定義により、(15)式は次の(21)式の様に簡潔に記述

できる。天空が放射面の一つの場合もあり、透過率を持つ面も有り得るので  $\mathbf{R}$  を  $\mathbf{A}$  だけで表すことはできない。次に  $\mathbf{b}$  について解けば(22)式で表される。  $\mathbf{E}$  は単位マトリックスを表す。

$$\mathbf{b} = \sigma \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{b} \quad (21)$$

$$\mathbf{b} = \sigma \cdot [\mathbf{E} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}]^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \quad (22)$$

ここで、自分自身の温度による放射に他からの反射も加えた発散能  $b_i$  は、(23)式での放射率  $\epsilon$  が増えたものとして扱うとする。この様な(24)式で定義する相当放射率  $\epsilon^*$  を導入する。

相当放射率  $\epsilon^*$  は非定常計算の場合には前タイムステップの発散能と温度によって計算される。定常計算の場合には繰り返し収束計算の前ステップにより計算される。この相当放射率で(11)式の  $\alpha_r$  を計算し、さらに(12)式によって一般化熱コンダクタンス  $c_{ij}$  を決めて全体方程式を構成し直していくことで、内表面間の無限回反射も考慮した温度分布が解かれる。

$$b_i = \sigma \cdot \epsilon_i^* \cdot T_i^4 \quad (23) \quad \epsilon_i^* = \frac{b_i}{\sigma \cdot T_i^4} \quad (24)$$

#### 4. 考察とまとめ

線形化された放射の一般化熱コンダクタンスを用いる誤差を厳密解と比較した。与条件温度 100°C、200°C と 500°C の3枚の無限面積の平板間に挟まれた2枚の無限面積平板の温度を計算した。放射熱だけを考慮した場合、挟まれた2面の厳密解と NETS による解は各々、158.6°C と 158.7°C、398.7°C と 400.3°C であった。逐次に求められる温度の近傍で線形化を繰り返せば急速に精解に収束するので、簡易法<sup>[5]</sup> というよりも、むしろ実用法と言える。

計算プログラムの構造上、(15)式は放射交換が起きる内表面節点だけを取りだしたものと考える必要はなく、熱回路網全体節点  $nt=n+no$  での式と見なせる。長波長放射に関連しない壁体内の節点等では、放射に関する全ての係数  $f_{ij}$ ,  $\epsilon_i$ ,  $\rho_i$  が0と考えれば良い。これでも(22)式右辺の逆行列計算は正常に為される。ある節点  $i$  が長波長放射に関与しないならば(22)式の  $i$  行に対応する(23)式は0であり(24)式は定義しないものとする。複数の長波長放射空間を含む全体系に対し(15)式と(22)式等は一般に成立する。ただし2つの節点間に放射以外の伝熱形態が同時に存在する場合、これらの  $c_{ij}$  を重ね合わせた和を(1)式での最終的な  $c_{ij}$  として用いる。

本論では熱回路網モデルと時間積分法を振り返った後、一般化熱コンダクタンス  $c_{ij}$  のうち、空間内表面間の無限回反射を考慮した長波長放射の一般化熱コンダクタンス  $c_{ij}$  の決め方を考案した。

#### 【参考文献】

- [1] 本論は「室内表面の熱伝達モデルに関する考察」(奥山博康)として、建築学会、伝熱+熱環境シミュレーション合同小委員会・合同WGで2008年7月19日に話題提供し配布した資料から抜粋し修正した。
- [2] 橘, 秋山, 岡本, 森下, 「伝熱論」, (株)コロナ社, 1969.06.30, 3版発行, pp240-247「10・5 ふく射伝熱量を求める方法」
- [3] 熱回路網の文献: [http://www.nets-club.com/article\\_list/list.html](http://www.nets-club.com/article_list/list.html)
- [4] 渡辺要 編, 「建築計画言論II」, 丸善(株), 1979.02.20 第2版第4刷, pp38-39「6.2.12 温度係数」
- [5] 木村建一, 「建築設備基礎」, 国際人間環境研究所, 2009.03.13, ver. 0.5.0, pdf頒布版, pp47-48「4.3.6 放射熱伝達の式」, (3)放射熱伝達の簡易式

【謝辞】説明図作成で大西由哲氏の御協力を得ました。