日本建築学会大会学術講演梗概集
（北陸） 2010年 9 月

不偏推定を考慮した拡散系システム同定理論

正会員 ○ 奥山 博康*1

熱回路網 システム同定 最小二乗法
不偏推定 多数室換気測定 方程式残差

１．はじめに

本論の拡散系のシステム同定理論は多数室換気測定法等に応用してきたが，建物の熱損失性能や日射取得性能の現場測定法としても適用できる一般性がある．2008 年は不確かさの統計的評価をするモデル前提の不適合率と呼ぶ指標を考案した[1]．一方初期の理論[2]では，風量収支等の拘束条件はガス質量収支式に組み込んでいた．しかし拘束条件式をトレーサガス質量収支式の下の行に追加連立させた回帰式に修正してからは，これらの異なる保存則による回帰式間では最小二乗に寄与する大きさに違いが生じ，同定精度に悪影響が出る場合があることが分かった．そこで不偏推定とする重みマトリックス[2]を復活して導入することで改良した．

２．パラメータの観測方程式

拡散系の空間的離散化モデルの骨組みは一般に(1)式の完全連結システムの節点方程式で記述できる．これにより状態方程式とも呼ぶ連立常微分方程式(2)が構成される．ここに x_j，$m_{i,j}$，$c_{i,j}$，$r_{i,j}$ は各々，節点 j の温度等の拡散ポテンシャル，節点 i に関する一般化容量，節点 j から節点 i への一般化コンダクタンス，熱流等の発生源 j から節点 i への自由入力係数である．また n は未知数扱いの，no は既知数扱いの節点数，ng は発生源の総数である．

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\cdot\dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n+no} c_{i,j}\cdot(x_j - x_i) + \sum_{j=1}^{ng} r_{i,j}\cdot g_j \quad (1)$$

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{C_o}\cdot\mathbf{x_o} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{g} \quad (2)$$

この(2)式を次のパラメータの観測方程式(3)に変形する．一つの節点まわりには既知パラメータが少なくとも一個あるとし，変数 x_j か g_j との積によって作られる項は左辺の $\boldsymbol{y}$ の中に移項する．また被同定パラメータ $m_{i,j}$，$c_{i,j}$，$r_{i,j}$ によるベクトルを $\mathbf{m}$，$\mathbf{c}$，$\mathbf{r}$ として，これに係るマトリックスは $\mathbf{D}$，$\mathbf{X}$，$\mathbf{G}$ と定める．これらをまとめてサイズ na の $\mathbf{a}$ と $n\times na$ の $\mathbf{Z}$ を定める．

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}(\dot{x}_i)\cdot\mathbf{m} + \mathbf{X}(x_i)\cdot\mathbf{c} + \mathbf{G}(g_i)\cdot\mathbf{r} = [\mathbf{D},\mathbf{X},\mathbf{G}]\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{m}\\ \mathbf{c}\\ \mathbf{r}\end{bmatrix} = \mathbf{Z}\cdot\mathbf{a} \quad (3)$$

測定時間間隔 Δt，総測定時点数は nt で測定期間は T とする．$(k-1)\Delta t$ から $k\Delta t$ までの線形補間積分により次式の $\mathbf{y}_k$，$\mathbf{Z}_k$ を定義し(6)をパラメータの観測方程式とする．

$$\mathbf{y}_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}\mathbf{y}\,dt \quad (4) \qquad \mathbf{Z}_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}\mathbf{Z}\,dt \quad (5) \qquad \mathbf{y}_k = \mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{a} \quad (6)$$

３．最小二乗法の二重適用による解式

前述の(6)式の左辺から右辺を引いた方程式誤差を ${}_n\mathbf{e}_k$ として ${}^t{}_n\mathbf{e}_k\cdot{}_n\mathbf{e}_k$ を全時間総和して，$\mathbf{a}$ による微分で最小二乗の停留条件を記述すれば(7)式となる．そして(11)式で拘束条件式を加え再度施す最小二乗における方程式誤差 $\mathbf{e}_a$ に関する(8)式が記述できる．

$$\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{y}_k \quad (7) \qquad \mathbf{e}_a = \sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{y}_k - \sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{a} \quad (8)$$

パラメータ間には，流量収支，伝導の対称性，伝導率等の上位のパラメータへ回帰する n_s 本の拘束条件式が存在するとする．これらは線形関係式であるから，マトリックス $\mathbf{S}$ とベクトル $\mathbf{d}$ によって(9)式で表現される．この方程式誤差を $\mathbf{e}_s$ とする．

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{d} \quad (9) \qquad \mathbf{e}_s = \mathbf{d} - \mathbf{S}\cdot\mathbf{a} \quad (10)$$

(8)式と(10)式を束ねて次式の複合回帰方程式誤差 $\mathbf{e}$ を定義する．次式で簡単化のためにベクトル $\mathbf{b}$ とマトリックス $\mathbf{F}$ を定める．

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_z\cdot\mathbf{e}_a\\ \mathbf{W}_s\cdot\mathbf{e}_s\end{bmatrix} = \mathbf{b} - \mathbf{F}\cdot\mathbf{a} \quad (11)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_z\cdot\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{y}_k\\ \mathbf{W}_s\cdot\mathbf{d}\end{bmatrix} \quad (12) \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_z\cdot\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{Z}_k\\ \mathbf{W}_s\cdot\mathbf{S}\end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで導入したのが不偏推定をするための重みマトリックス $\mathbf{W}_z$ と $\mathbf{W}_s$ である．$\mathbf{W}_z$ は $\Sigma\,{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{Z}_k$(na×na)の各 i 行の最大絶対値を探して逆数を $\mathbf{W}_z$ の i 列に代入する．ただし $\Sigma\,{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{Z}_k$ のある行が全て 0 の場合もあるので，その行はスキップする．故に $\mathbf{W}_z$ のサイズは一般に na より小さい nz で(nz×na)となる．同様だが $\mathbf{W}_s$ のサイズは常に(ns×ns)である．これらの $\mathbf{W}_z$ と $\mathbf{W}_s$ を乗じることで(11)式の各行から最小二乗へ寄与が同程度になる．二重の最小二乗による解式が(14)式となる．また推定パラメータの不確かさ分散共分散マトリックス $\mathbf{\Lambda}_a$ は，方程式誤差の期待値マトリックスからの伝搬として計算すれば(15)式が得られる．

$$\hat{\mathbf{a}} = \left({}^t\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\right)^{-1}\cdot\left({}^t\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}\right) \quad (14)$$

$$\mathbf{\Lambda}_a = \left({}^t\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\right)^{-1}\cdot\left({}^t\mathbf{F}\cdot E(\mathbf{e}\cdot{}^t\mathbf{e})\cdot\mathbf{F}\right)^t\left\{\left({}^t\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\right)^{-1}\right\} \quad (15)$$

(15)式の方程式誤差期待値マトリックスは，共分散を 0 とみなせば次式となる．

$$E(\mathbf{e}\cdot{}^t\mathbf{e}) = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_z\cdot E(\mathbf{e}_a\cdot{}^t\mathbf{e}_a)\cdot{}^t\mathbf{W}_z & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_s\cdot E(\mathbf{e}_s\cdot{}^t\mathbf{e}_s)\cdot{}^t\mathbf{W}_s\end{bmatrix} \quad (16)$$

右辺の不確かさ期待値 E( ) は二通り定義でき，以降で方程式残差からのものには添え字 r (residue)を，測定不確かさからのものには m (measurement)を付けて表わすことにする．

４．方程式残差からの不確かさ伝播と決定係数

(6)式の残差は次の(17)式で計算され，その期待値マトリックスは(18)式で計算される．

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k\cdot\hat{\mathbf{a}} \quad (17)$$

$$E(\mathbf{v}_k\cdot{}^t\mathbf{v}_k) = \frac{1}{nt-na}\,diag\sum_{k=1}^{nt}\mathbf{v}_k\cdot{}^t\mathbf{v}_k \quad (18)$$

Diffusion System Identification Theory Considering Unbiased Estimate

OKUYAMA Hiroyasu

これにより $\mathbf{e}_a$ の期待値マトリックスは(19)式で計算され，これを適用した場合の $\mathbf{\Lambda}_a$ を ${}_r\mathbf{\Lambda}_a$ とする．単に nt で割らないのは，na の分だけ自由度を下げたからである．次に決定係数の算出に必要な残差二乗和は(20)式で計算される．

$$E_r(\mathbf{e}_a \cdot {}^t\mathbf{e}_a) = diag \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{Z}_k \cdot E(\mathbf{v}_k \cdot {}^t\mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{Z}_k \quad (19)$$

$$s(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{nt} {}^t(\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \hat{\mathbf{a}}) \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \hat{\mathbf{a}}) \quad (20)$$

総変動は次の(21)式で計算される．さらにこれらの残差二乗和と総変動から決定係数は次の(22)式で計算される．

$$sy = \sum_{k=1}^{nt} {}^t(\mathbf{y}_k - \overline{\mathbf{y}}_k) \cdot (\mathbf{y}_k - \overline{\mathbf{y}}_k) = \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k - \frac{1}{nt} \cdot \left(\sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{y}_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{nt} \mathbf{y}_k \right) \quad (21)$$

$$COD = 1 - \frac{s(\hat{\mathbf{a}})}{sy} \quad (22)$$

拘束条件式の $E_r(\mathbf{e}_s \cdot {}^t\mathbf{e}_s)$ (ns×ns)は次式で計算する．

$$E_r(\mathbf{e}_s \cdot {}^t\mathbf{e}_s) = (\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}) \cdot {}^t(\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}) \quad (23)$$

前述の(19)と(23)式を(16)式に代入して次式が得られる．

$$E_r(\mathbf{e} \cdot {}^t\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \cdot E_r(\mathbf{e}_a \cdot {}^t\mathbf{e}_a) \cdot {}^t\mathbf{W}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_s \cdot E_r(\mathbf{e}_s \cdot {}^t\mathbf{e}_s) \cdot {}^t\mathbf{W}_s \end{bmatrix} \quad (24)$$

これが(15)式に代入されて次の様に方程式残差起源の同定パラメータ不確かさ分散が得られる．

$${}_r\mathbf{\Lambda}_a = \left({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}\right)^{-1} \cdot \left({}^t\mathbf{F} \cdot E_r(\mathbf{e} \cdot {}^t\mathbf{e}) \cdot \mathbf{F}\right)^t \left\{ \left({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}\right)^{-1} \right\} \quad (25)$$

5．測定不確かさからの伝播

ガス濃度やガス発生量の測定不確かさ分散から推定パラメータへの不確かさ伝播を記述する．いま x_i と g_i の測定値が瞬時的な観測不確かさ分散 σ_x^2 と σ_g^2 を持つとする．これらの x_i と g_i を Δt の区間で積分した値と増分を時系列方向に総和して用いるが x_i と g_i に関する Δt 積分の不確かさ分散 ${}_s\sigma_x^2$，${}_s\sigma_g^2$ や，増分計算結果の不確かさ分散 ${}_b\sigma_x^2$ は，不確かさ伝播則により次の様に計算される．

$${}_b\sigma_{xi}^2 = 2 \cdot \sigma_{xi}^2 \quad (26)$$

$${}_s\sigma_{xi}^2 = (1/2) \cdot \Delta t^2 \cdot \sigma_{xi}^2 \quad (27) \qquad {}_s\sigma_{gi}^2 = (1/2) \cdot \Delta t^2 \cdot \sigma_{gi}^2 \quad (28)$$

ここで測定データのベクトルと，これらが持つ不確かさ分散ベクトルを次のように定義する．

$${}_b\mathbf{x}_k = {}^t\left({}_b x_{1k}, \cdots, {}_b x_{nk}\right) \quad (29) \qquad {}_b\boldsymbol{\sigma}_k = {}^t\left({}_b\sigma_{x1}, \cdots, {}_b\sigma_{xn}\right) \quad (30)$$

$${}_s\mathbf{x}_k = {}^t\left({}_s x_{1k}, \cdots, {}_s x_{nk}, \cdots, {}_s x_{n+no,k}\right) \quad (31)$$

$${}_s\boldsymbol{\sigma}_x = {}^t\left({}_s\sigma_{x1}, \cdots, {}_s\sigma_{xn}, \cdots, {}_s\sigma_{xn+no}\right) \quad (32)$$

$${}_s\mathbf{g}_k = {}^t\left({}_s g_{1k}, \cdots, {}_s g_{ngk}\right) \quad (33) \qquad {}_s\boldsymbol{\sigma}_g = {}^t\left({}_s\sigma_{g1}, \cdots, {}_s\sigma_{gng}\right) \quad (34)$$

${}_b\mathbf{x}_k$，${}_s\mathbf{x}_k$，${}_s\mathbf{g}_k$ は各々真値に不確かさ ${}_b\mathbf{s}_{xk}$，${}_s\mathbf{s}_{xk}$，${}_s\mathbf{s}_{gk}$ が加わったものと見なす．パラメータの推定不確かさ原因は x_j と g_j の測定不確かさだけとすれば，真値の x_j と g_j は状態方程式誤差を 0 にする．従って(2)式等から次式が記述できる．

$$\begin{aligned} {}_n\boldsymbol{\varepsilon}_k &= -\mathbf{M} \cdot {}_b\mathbf{x}_k + \left[\mathbf{C} \quad \mathbf{C_o}\right] {}_s\mathbf{x}_k + \mathbf{R} \cdot {}_s\mathbf{g}_k \\ &\quad - \mathbf{M} \cdot {}_b\mathbf{s}_{xk} + \left[\mathbf{C} \quad \mathbf{C_o}\right] {}_s\mathbf{s}_{xk} + \mathbf{R} \cdot {}_s\mathbf{s}_{gk} \end{aligned} \quad (35)$$

状態方程式誤差が x_j と g_j の測定不確かさだけに起因するとすれば，方程式誤差 ${}_n\boldsymbol{\varepsilon}_k$ の期待値マトリックスは次式で計算される．ここに不確かさ ${}_b\mathbf{s}_{xk}$，${}_s\mathbf{s}_{xk}$，${}_s\mathbf{s}_{gk}$ の間での共分散は 0 であることと，これら３つのベクトル内の要素間の共分散も 0 である性質を用いた．

$$\begin{aligned} E({}_n\boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot {}_n^t\boldsymbol{\varepsilon}_k) &= diag\Big(\mathbf{M} \cdot E({}_b\mathbf{s}_{xk} \cdot {}_b^t\mathbf{s}_{xk}) \cdot {}^t\mathbf{M} \\ &\quad + [\mathbf{C}, \mathbf{C_o}] \cdot E({}_s\mathbf{s}_{xk} \cdot {}_s^t\mathbf{s}_{xk}) \cdot {}^t[\mathbf{C}, \mathbf{C_o}] + \mathbf{R} \cdot E({}_s\mathbf{s}_{gk} \cdot {}_s^t\mathbf{s}_{gk}) \cdot {}^t\mathbf{R}\Big) \\ &= diag\Big(\mathbf{M} \cdot diag({}_b\boldsymbol{\sigma}_x \cdot {}_b^t\boldsymbol{\sigma}_x) \cdot {}^t\mathbf{M} \\ &\quad + [\mathbf{C}, \mathbf{C_o}] \cdot diag({}_s\boldsymbol{\sigma}_x \cdot {}_s^t\boldsymbol{\sigma}_x) \cdot {}^t[\mathbf{C}, \mathbf{C_o}] + \mathbf{R} \cdot diag({}_s\boldsymbol{\sigma}_g \cdot {}_s^t\boldsymbol{\sigma}_g) \cdot {}^t\mathbf{R}\Big) \end{aligned} \quad (36)$$

これにより次式が計算される．

$$E_m(\mathbf{e}_a \cdot {}^t\mathbf{e}_a) = diag \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{Z}_k \cdot E({}_n\boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot {}_n^t\boldsymbol{\varepsilon}_k) \cdot \mathbf{Z}_k \quad (37)$$

また拘束条件式誤差の期待値マトリックスは方程式誤差の原因が測定不確かさだけならば 0 であるので次式が記述できる．

$$E_m(\mathbf{e}_s \cdot {}^t\mathbf{e}_s) = E\left\{(\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}) \cdot {}^t(\mathbf{d} - \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}})\right\} = \mathbf{0} \quad (38)$$

(16)式に(37)と(38)式を代入して次式がえられる．

$$E_m(\mathbf{e} \cdot {}^t\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z \cdot E_m(\mathbf{e}_a \cdot {}^t\mathbf{e}_a) \cdot {}^t\mathbf{W}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (39)$$

これにより測定不確かさからの推定パラメータの分散共分散マトリックス ${}_m\mathbf{\Lambda}_a$ が計算される．

$${}_m\mathbf{\Lambda}_a = \left({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}\right)^{-1} \cdot \left({}^t\mathbf{F} \cdot E_m(\mathbf{e} \cdot {}^t\mathbf{e}) \cdot \mathbf{F}\right)^t \left\{ \left({}^t\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}\right)^{-1} \right\} \quad (40)$$

6．システム同定モデル前提の不適合率

線形性，時不変性，空間離散化近似等の同定モデルの前提が，どの程度実現象で成り立っているかの判断を，この ${}_m\mathbf{\Lambda}_a$ に対して ${}_r\mathbf{\Lambda}_a$ の大きさを比較することによって行うことができる．ここで ${}_m\mathbf{\Lambda}_a$ の j 番目の対角要素を ${}_m\sigma_{\lambda,jj}^2$ で，${}_r\mathbf{\Lambda}_a$ の j 番目の対角要素を ${}_r\sigma_{\lambda,jj}^2$ で表す．これらの対角要素の平方根をとって，次式の比率 β を定義する．全ての対角要素についての β を平均化したものはモデル前提の不適合率と呼ぶことにする．

$$\beta_j = \frac{{}_r\sigma_{\lambda j,j}}{{}_m\sigma_{\lambda j,j}} \quad (41) \qquad \overline{\beta} = \frac{1}{na} \sum_{j=1}^{na} \beta_j \quad (42)$$

このモデル前提の不適合率が大きい場合には測定の条件やモデルに不適切さがあると考えられるので修正する必要がある．

7．最後に

紙幅の関係で割愛するが，幾つかの計算事例で本論の重みマトリックス導入の有効性を確かめてある．初期の理論[2]の重みマトリックスは節点により同定パラメータの大きさにばらつきの大きい場合に有効であったが，本論の方法はさらに異なる保存則の回帰式を連立した場合にも有用である．

【参考文献】

[1] 奥山博康，「統計的信頼性評価法を持つ拡散系システム同定理論」，日本建築学会大会学術講演梗概集(中国)2008 年 9 月，環境工学Ⅱ，梗概番号 41365，pp729-730

[2] 奥山博康，「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論」，日本建築学会論文報告集，Vo1．344，1984 年 10 月，pp103-115

〈脚注〉 本理論は空気調和・衛生工学会の 2010 年 3 月 12 日の換気測定・評価小委員会(山中俊夫主査)で元資料を配付し説明した．

*1 清水建設(株)技術研究所・上席研究員・工博

*1 Chief Research Engineer, Institute of Technology, Shimizu corporation, Dr. Eng.