日本建築学会大会学術講演梗概集
（関東） 2011 年 8 月

送風機による建物気密性測定のパラメータ推定法と信頼性評価方法

正会員 ○ 奥山 博康*1

建築気密性 試験方法 重み付き最小二乗法
前提不適合率 不確かさ伝播 信頼性評価

１．はじめに

建物気密性は様々な現象に影響を及ぼす重要な建築性能の一つである．ISO-9972[1]と ASTM-E779-10 [2]では送風機加圧/減圧試験により，建物外皮の漏出あるいは漏入の風量が内外差圧の 0.5〜1 乗に比例するものとして，この指数 n と比例係数 C の２つのパラメータを推定する．ただし JIS-A2201[3]の基本式の指数はそれらの n の逆数を用いている．従来の測定データ分析法には不十分な点や問題点が上げられる．(a)最小二乗の同時連立的な解式になっていない．(b)信頼区間評価に偏っており，測定と回帰の前提成立の評価と判断法が不備である．(c)外乱の影響を考慮して測定値（Δpj, qj）への重み付けを変えないので推定精度が悪化する場合がある．(d)方程式誤差から２つのパラメータの不確かさ分散への連立した伝播式が解かれていない．従って測定不確かさ，あるいは回帰モデル前提の不成立による影響の評価が不十分である．本論ではパラメータの推定式を同時連立的な最小二乗解に修正し，さらに重み付き最小二乗法に改良する．信頼性の評価方法に関しては，まず方程式誤差から推定パラメータの不確かさ分散への伝播式を演繹する．この際に，方程式残差起因だけでなく測定不確かさ起因の，二通りの不確かさ伝播式を演繹する．そして測定と回帰の妥当性を評価できる新たな信頼性評価指標も導く．

２．方程式モデルと回帰式

基本式は ISO と ASTM と同じ(1)式とする．ちなみに JIS では，指数に n ではなく 1/n を用いている．この係数 C と指数 n のパラメータを，幾つかの内外差圧 Δp_j と送風機風量 q_j の測定値から回帰するために両辺の対数をとり(2)式の様に線形化する．また簡潔表示のため新たな変数 x_j と y_j を各々(3)と(4)式で定義する．

$$q_j = C\cdot\Delta p_j^n \quad (1) \qquad \log_e\left(q_j\right) = \log_e\left(C\right) + n\cdot\log_e\left(\Delta p_j\right) \quad (2)$$

$$x_j = \log_e\left(\Delta p_j\right) \quad (3) \qquad y_j = \log_e\left(q_j\right) \quad (4)$$

これらの x_j と y_j とマトリックス記法の定義により回帰式(5)を記述する．最小二乗法のための方程式誤差は(6)式で定義する．

$$y_j = \begin{bmatrix}1 & x_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\log_e\left(C\right)\\ n\end{bmatrix} = \mathbf{Z}\mathbf{a} \quad (5) \qquad e_j = y_j - \mathbf{Z}_j\mathbf{a} \quad (6)$$

３．重み付き最小二乗法による解式

全部で np 組の測定値の方程式誤差の二乗の総和を評価関数 J とする．ここに w_j は各測定値に対する重みであり，計算の仕方は後述する．また変数の左肩の t は転置(transpose)を表す．

$$J = \sum_{j=1}^{np} {}^t e_j w_j e_j = \sum_{j=1}^{np} {}^t\left(y_j - \mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{a}\right) w_j \left(y_j - \mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{a}\right) \quad (7)$$

求めるべきパラメータ loge(C)と n を含むベクトル **a** により評価関数 J を微分して **0** と置いた(8)式を満たす **a** が最適な推定値となる．

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{j=1}^{np}\left(-{}^t\mathbf{Z}_j w_j y_j - {}^t\mathbf{Z}_j w_j y_j + 2\,{}^t\mathbf{Z}_j w_j \mathbf{Z}_j\,\mathbf{a}\right) = \mathbf{0} \quad (8)$$

これは最適推定パラメータベクトル a について次式で解かれる．

$$\hat{\mathbf{a}} = \left[\sum_{j=1}^{np}\left({}^t\mathbf{Z}_j w_j \mathbf{Z}_j\right)\right]^{-1}\sum_{j=1}^{np}\left({}^t\mathbf{Z}_j w_j y_j\right) \quad (9)$$

大きな次数ではなく２次の逆行列であるから，マトリックスの要素を用いたエクスプリッシットな解式が記述できる．この式からパラメータ C の対数を計算する(10)式が得られる．

$$\log_e(C) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j\cdot y_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j y_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^{np} w_j\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)^2} \quad (10)$$

これは係数 C について解いておくことができる．

$$C = \exp\left(\log_e(C)\right) \quad (11)$$

指数 n は次式で計算される．

$$n = \frac{\left(\sum_{j=1}^{np} w_j\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j y_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j y_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^{np} w_j\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)^2} \quad (12)$$

本推定法は最小二乗法であるから通常の決定係数(Coefficient of Determinantion)も計算できる．

４．方程式誤差から推定パラメータの不確かさ分散への伝播式

推定したパラメータの不確かさ分散を導く．まずベクトル **a** の期待値と **a** の推定値の差を次式で記述する．

$$\hat{\mathbf{a}} - E\left(\hat{\mathbf{a}}\right) = \left(\sum_{j=1}^{np} {}^t\mathbf{Z}_j w_j \mathbf{Z}_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{np} {}^t\mathbf{Z}_j w_j y_j\right)$$

$$- E\left\{\left(\sum_{j=1}^{np} {}^t\mathbf{Z}_j w_j \mathbf{Z}_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{np} {}^t\mathbf{Z}_j w_j\left(\mathbf{Z}_j\,\mathbf{a} + e_j\right)\right)\right\} \quad (13)$$

このベクトルにより，次式の様にマトリックスを作り期待値をとったものが，推定されたパラメータの不確かさ分散共分散マトリックスとなる．ここで次式の様に $\log_e$(C)と n の推定不確かさ分

Parameter Estimation and Reliability Evaluation Methods for Building Airtightness Measurement Using Fan Pressurization

OKUYAMA Hiroyasu

散と共分散の記号を定義する．この対角要素がパラメータの不確かさ分散である．$\log_e(C)$に関する分散は(1,1)要素を取り出して(15)式で記述される．

$$\mathbf{\Lambda}_a = E\left\{\left(\hat{\mathbf{a}} - E\left(\hat{\mathbf{a}}\right)\right)^t \left(\hat{\mathbf{a}} - E\left(\hat{\mathbf{a}}\right)\right)\right\} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\log C} & \sigma^2_{n\cdot\log C} \\ \sigma^2_{n\cdot\log C} & \sigma^2_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{np} {}^t\mathbf{Z}_j w_j \mathbf{Z}_j\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{np} {}^t\mathbf{Z}_j w_j E(e_j\,{}^t e_j)\,{}^t w_j \mathbf{Z}_j\right) \cdot {}^t\left\{\left(\sum_{j=1}^{np} {}^t\mathbf{Z}_j w_j \mathbf{Z}_j\right)^{-1}\right\} \quad (14)$$

$$\sigma^2_{\log C} = E(e_j\,{}^t e_j)\left[\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j^2\right)^2 \sum_{j=1}^{np} w_j^2 - 2\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j^2 x_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{np} w_j^2 x_j^2\right)\right] \Bigg/ \left[\sum_{j=1}^{np} w_j \sum_{j=1}^{np} w_j x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)^2\right]^2 \quad (15)$$

これにより係数 C の不確かさ分散は次式で計算される．

$$\sigma_C^2 = \exp\left(\sigma_{\log C}\right)^2 \qquad (16)$$

指数 n の不確かさ分散は(14)式の(2,2)要素を取り出して次式で記述される．

$$\sigma^2_n = E(e_j\,{}^t e_j)\left[\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)^2 \sum_{j=1}^{np} w_j^2 - 2\left(\sum_{j=1}^{np} w_j\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{np} w_j^2 x_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{np} w_j\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{np} w_j^2 x_j^2\right)\right] \Bigg/ \left[\sum_{j=1}^{np} w_j \sum_{j=1}^{np} w_j x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{np} w_j x_j\right)^2\right]^2 \quad (17)$$

5．方程式誤差分散の二通りの取り方

ここで方程式誤差 $E(e_j \cdot {}^t e_j)$の取り方は 2 通りある．１つは回帰方程式の残差の重み付き平均をとる方法である．この場合の計算式は次式となる．ここに期待値の関数 E( )の左下添字 v は方程式残差を表す．これによる各パラメータの不確かさ分散はそれぞれ ${}_v\sigma_C^2$ と ${}_v\sigma_n^2$ と表す．

$${}_vE\left(e_j\,{}^t e_j\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{np} w_j} \sum_{j=1}^{np} {}^t v_j w_j v_j = \frac{1}{\sum_{j=1}^{np} w_j} \sum_{j=1}^{np} v_j^2 w_j \quad (18)$$

もう一つは測定不確かさのみによる方程式誤差を取る方法である．ある j 番の測定値に関し，方程式誤差分散 ${}_m\sigma_j^2$ への測定不確かさ分散からの伝播則は次式で記述される．測定不確かさ分散は，風量測定と差圧測定のそれぞれについて ${}_m\sigma_q^2$ と ${}_m\sigma_{\Delta p}^2$ と表す．各分散の左下添え字 m は測定(measurement)を意味する．

$${}_m\sigma_j^2 = {}_m\sigma_q^2\left(\frac{\partial y_j}{\partial q_j}\right)^2 + {}_m\sigma_{\Delta p}^2\left(n\frac{\partial x_j}{\partial \Delta p_j}\right)^2 = {}_m\sigma_q^2\left(\frac{1}{q_j}\right)^2 + {}_m\sigma_{\Delta p}^2\left(\frac{n}{\Delta p_j}\right)^2 \quad (19)$$

そして測定不確かさによる方程式誤差分散の期待値は全測定値からの次式による重み付き平均で計算する．ここに期待値の関数 E( )の左下添字 m は測定(measurement)を意味する．

$${}_mE(e_j\,{}^t e_j) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{np} w_j} \sum_{j=1}^{np} {}_m\sigma_j^2 w_j \quad (20)$$

6．重み係数の二通りの取り方

重み w_j は Tukey の biweight 法[4]により計算する．これも方程式残差起因の ${}_vw_j$ と測定不確かさ起因の ${}_mw_j$ の 2 通りある．繰り返し収束計算過程において，前回に推定されたパラメータと計算された残差 v_j と ${}_m\sigma_j^2$ および方程式誤差の期待値 ${}_vE(e_j \cdot {}^t e_j)$と ${}_mE(e_j \cdot {}^t e_j)$を用いて，次の二式により次回の重み w_j'の計算をする．

$${}_vw'_j = \left[1 - \left(\frac{1}{c_r^2}\right)\left(\frac{v_j^2}{{}_vE\left(e_j\,{}^t e_j\right)}\right)\right]^2 \quad (21) \qquad {}_mw'_j = \left[1 - \left(\frac{1}{c_r^2}\right)\left(\frac{{}_m\sigma_j^2}{{}_mE\left(e_j\,{}^t e_j\right)}\right)\right]^2 \quad (22)$$

ただし右辺の[　]の中が負になった場合には重みは 0 とする．残差による(21)式の重みにより，大きな測定誤差により飛びはずれた測定値に引きずられて，パラメータ推定が悪影響を受けるのを避けることができる．ここに定数 c_r は 5～9 に選ぶとされている[4]．パラメータ C と n の推定値としては，方程式残差による重み付け法による結果を採用する．

7．回帰モデルの前提の不適合率 β と信頼区間

次式の様に，回帰方程式残差を起源とするパラメータ推定不確かさ標準偏差 ${}_v\sigma_C$ と ${}_v\sigma_n$ の，測定誤差を起源とする標準偏差 ${}_m\sigma_C$ と ${}_m\sigma_n$ 各々に対する比をとり，回帰方程式モデル前提の不適合率 β として定義する．もしこの比率が 1 よりもかなり大きければ，必要な諸前提の幾つかが十分に成り立っていなかったと見なす．

$$\beta_C = \frac{{}_v\sigma_C}{{}_m\sigma_C} \quad (23) \qquad \beta_n = \frac{{}_v\sigma_n}{{}_m\sigma_n} \quad (24)$$

なお回帰は対数空間で行われたので，最小二乗推定の確率の正規分布の仮定は対数空間で成り立ち，元の空間では成り立たないことに注意して信頼区間も計算することができる．

8．最後に

紙幅の関係で事例検証を述べることができなかったが，本論の方法は計算機実験と実際の建物での測定データの両方で検証してある．特に回帰モデル前提の不適合率 β は，決定係数よりも敏感で有用であることも分かった．

〈謝辞〉 ISO/TC163/SC1/WG10 では，委員長の吉野博教授はじめ，多くの先生方のおかげで，本研究を行うことができました．

【参考文献】

[1] ISO 9972. Thermal performance of buildings — determination of air permeability of buildings — fan pressurization method, Annex C (informative). Recommended procedure for estimating uncertainty in derived quantities. 2nd ed. 2006-05-01.

[2] ASTM E779-10. Standard test method for determining air leakage rate by fan pressurization, Annex A1 (mandatory information). Procedure for estimating precision errors in derived quantities. ed.2010-April

[3] JIS A2201, 2003, 送風機による住宅等の気密性能試験方法，付属書３（参考），a, n の算出及びその信頼区間の算出，第１刷発行，2003-4-1

[4] 中川 徹，小柳 義夫，最小二乗法による実験データ解析―プログラム SALS（UP 応用数学選書 7），東京大学出版会，第 1 刷発行，1982-05-30,，pp163-176

*1 清水建設（株）技術研究所・上席研究員・工博

*1 Chief Research Engineer, Institute of Technology, Shimizu corporation, Dr. Eng.