

単室建物モデルの熱性能現場測定法

正会員 ○ 奥山 博康^{*1}

熱損失係数	現場測定法	最小二乗法
最適励振	ローパスフィルタ	前提の不適合率

1. はじめに

建物熱性能の現場測定法では、外気温や日射量の変動の外乱を受けるので、非定常のシステム同定理論が必要となる。従来の測定法では、熱損失係数だけを求めて、日射取得係数や有効熱容量を同時に測定できるものは少ない。また信頼性と不確かさ評価も不十分である。一連の本研究では既に多数室モデルでの拡散系のシステム同定理論を演繹したが^[1]、本論ではこれを単室モデルに特化することにより、簡便に表計算ソフト等でも三種類の熱性能係数を求められる理論を演繹する。

2. システム・パラメタの観測方程式

単室モデルの室温変化を(1)式で表す。ここに室温は x 、外気温は x_o 、水平面全日射量は g 、電熱ヒータ等の発熱量は h 、室の相当熱容量は m 、室内外の相当熱コンダクタンスは c 、日射熱取得係数は r とする。これをマトリックス表示し(2)式で表す。

$$m \cdot \dot{x} = c \cdot (x_o - x) + r \cdot g + h \quad (1)$$

$$h = \begin{bmatrix} \dot{x} & (x - x_o) & -g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ c \\ r \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{Z} \cdot \mathbf{a} \quad (2)$$

3. 入力値と状態値の Δt 区間積分

各入力値 x_o 、 g 、 h と状態値 x の Δt 区間で積分する式を記述する。発熱量の Δt 区間での積分は次式で定義し近似計算される。

$$h_k \triangleq \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} h(t) dt \approx \{h(k\Delta t) + h((k-1)\Delta t)\} \Delta t / 2 \quad (3)$$

微分値の Δt 区間での積分は次式で定義し計算される。

$$d_k \triangleq \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{x}(t) dt \approx x(k\Delta t) - x((k-1)\Delta t) \quad (4)$$

状態値の Δt 区間での積分は次式で定義し計算される。

$$x_k \triangleq \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \{x(t) - x_o(t)\} dt \approx \{x(k\Delta t) + x((k-1)\Delta t)\} \Delta t / 2 - \{x_o(k\Delta t) + x_o((k-1)\Delta t)\} \Delta t / 2 \quad (5)$$

水平面全日射量の Δt 区間での積分は次式で定義し計算される。

$$g_k \triangleq \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} -g(t) dt \approx -\{g(k\Delta t) + g((k-1)\Delta t)\} \Delta t / 2 \quad (6)$$

4. 回帰式と最小二乗解

測定マトリックス \mathbf{Z}_k は前述の要素を用いて次式で定義される。

$$\mathbf{Z}_k \triangleq \begin{bmatrix} d_k & x_k & g_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

システム・パラメタ \mathbf{a} に関する回帰式は次式で表される。

$$h_k = \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \quad (8)$$

この方程式誤差を次式で定義する。

$$e_k \triangleq h_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \quad (9)$$

そして最小二乗法の評価関数を次式で定義する。

$$J \triangleq \sum_{k=1}^{nt} e_k \cdot e_k \quad (10)$$

ここに同定の総時間ステップ数を nt とした。 J を \mathbf{a} で微分して 0 と置くことでシステム・パラメタの推定式が得られる。

$$\hat{\mathbf{a}} = \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot h_k \right] \quad (11)$$

5. 決定係数

回帰式の残差を次式で定義する。

$$v_k \triangleq h_k - \mathbf{Z}_k \cdot \hat{\mathbf{a}} \quad (12)$$

推定結果の信頼性評価のために決定係数を用いる。まず残差二乗和は次式で計算される。

$$s(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{k=1}^{nt} {}^t v_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{nt} (h_k - {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \hat{\mathbf{a}}) \cdot (h_k - {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \hat{\mathbf{a}}) \quad (13)$$

総変動は次式で計算される。

$$s_h = \sum_{k=1}^{nt} (h_k - \bar{h}) \cdot (h_k - \bar{h}) = \sum_{k=1}^{nt} h_k^2 - \frac{1}{nt} \left(\sum_{k=1}^{nt} h_k \right)^2 \quad (14)$$

これらから決定係数 COD は次式で計算される。

$$COD = 1 - s(\hat{\mathbf{a}}) / s_h \quad (15)$$

6. 分散共分散マトリックスとシステム同定前提の不適合率

次に推定パラメタの不確かさ評価のために、これらの分散・共分散マトリックスを求める。まず \mathbf{a} の不確かさは \mathbf{a} の期待値からの差として次式で記述できる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}}) &= \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot h_k \right] \\ &\quad - E \left\{ \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot (\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} + e_k) \right] \right\} \\ &= \hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}} - \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot e_k \right] \\ &= - \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot e_k \right] \end{aligned} \quad (16)$$

これから分散共分散マトリックスは次式で記述される

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{a}} &= E \left[(\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}})) \cdot {}^t (\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}})) \right] \\ &= E \left[\begin{bmatrix} \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot E(e_k \cdot {}^t e_k) \cdot \mathbf{Z}_k \right] \\ \cdot \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right]^{-1} \end{bmatrix} \right] \\ &= E(e_k \cdot {}^t e_k) \cdot \left[\sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right]^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_m^2 & s_{m,c} & s_{m,r} \\ s_{c,m} & \sigma_c^2 & s_{c,r} \\ s_{r,m} & s_{r,c} & \sigma_r^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

この右辺の回帰式誤差の期待値 $E(e_k \cdot e_k)$ は 2 通りの取り方がある。一つは回帰式残差の平均とするものである。こうした残差には、測定不確かさだけでなく、システム同定の前提が十分に成立しない実際的な影響も表れている。

$$E_r(e_k \cdot e_k) \triangleq \frac{1}{nt-3} \sum_{k=1}^m v_k \cdot v_k \quad (18)$$

一方、測定不確かさだけが誤差の原因と見なして、これからの伝播として $E_m(e_k \cdot e_k)$ を計算することもできる。ヒータ発熱の測定不確かさ標準偏差を σ_h 、温度の測定不確かさ標準偏差を σ_x 、水平面全日射量の測定不確かさ標準偏差を σ_g とする。このとき 4 種の Δt 区間の積分値 h_k 、 d_k 、 x_k 、 g_k の持つ不確かさ分散 σ_h 、 σ_x 、 σ_x 、 σ_g は誤差伝播則により次からの式で計算される。

$$\sigma_h^2 = \Delta t^2 \cdot \sigma_h^2 / 2 \quad (19)$$

$$\sigma_x^2 = 2\sigma_x^2 \quad (20)$$

$$\sigma_x^2 = \Delta t^2 \sigma_x^2 \quad (21)$$

$$\sigma_g^2 = \Delta t^2 \cdot \sigma_g^2 / 2 \quad (22)$$

以上の記号定義を用いて測定不確かさだけによる回帰式誤差の不確かさ分散の期待値 $E_m(e_k \cdot e_k)$ は誤差伝播則により次式で計算される。これが回帰式誤差の期待値のもう一つの取り方である。

$$E_m(e_k \cdot e_k) = \sigma_h^2 + m^2 \cdot \sigma_x^2 + c^2 \cdot \sigma_x^2 + r^2 \cdot \sigma_g^2 \quad (23)$$

以上の 2 種類の期待値 $E(e_k \cdot e_k)$ の其々から (17) 式を用いてシステム・パラメタの不確かさ標準偏差 σ_m 、 σ_c 、 σ_r と $m\sigma_m$ 、 $m\sigma_c$ 、 $m\sigma_r$ が計算できるので、両者の比率をとり、システム同定前提の不適合率 β_m 、 β_c 、 β_r も計算できる。まず其々の分散共分散マトリックスを次の記号と式で定義する。

$${}_r\Lambda_a \triangleq E_r(e_k \cdot e_k) \left\{ \left[\sum_{k=1}^m {}^t Z_k Z_k \right]^{-1} \right\} \triangleq \begin{bmatrix} {}_r\sigma_m^2 & {}_rS_{m,c} & {}_rS_{m,r} \\ {}_rS_{c,m} & {}_r\sigma_c^2 & {}_rS_{c,r} \\ {}_rS_{r,m} & {}_rS_{r,c} & {}_r\sigma_r^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$${}_m\Lambda_a \triangleq E_m(e_k \cdot e_k) \left\{ \left[\sum_{k=1}^m {}^t Z_k Z_k \right]^{-1} \right\} \triangleq \begin{bmatrix} {}_m\sigma_m^2 & {}_mS_{m,c} & {}_mS_{m,r} \\ {}_mS_{c,m} & {}_m\sigma_c^2 & {}_mS_{c,r} \\ {}_mS_{r,m} & {}_mS_{r,c} & {}_m\sigma_r^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

以上の記号定義と (24) 式と (25) 式の比較観察によれば、其々のパラメタの不適合率は次式の様に結局は同じ値の β と見なせる。

$$\frac{{}_r\sigma_m}{m\sigma_m} = \frac{{}_r\sigma_c}{m\sigma_c} = \frac{{}_r\sigma_r}{m\sigma_r} = \sqrt{\frac{E_r(e_k \cdot e_k)}{E_m(e_k \cdot e_k)}} \triangleq \beta \quad (26)$$

不適合率 β が 1 よりも著しく大きい場合には、同定モデルの不合理や、測定過程で前提が成立しなかった可能性があるため、それが許容できるものか、やり直しかの検討が必要である。

7. システム同定の最適励振と測定データの最適前処理

実現象は、こうした空間的離散化が粗い 1 節点モデルよりは、細かい離散化による多数の節点モデルに近い。しかし粗いモデルでも、電熱ヒータ加熱を矩形波ではなく 72 時間程の低周波数の正弦波で行えば、比較的良好な同定結果が得られることが、計算機

実験^[1]により分かっている。この室温の 1 節点モデルの有効熱容量には室空気だけでなく周囲壁体等のものが含まれることになる。今まで用いていた矩形波の励振は、フーリエ級数展開した際に沢山の高周波成分を持ち、これらが粗いモデルのシステム同定には、あまり適切ではなかったと考えられる。逆に多数の節点の精緻なモデルでは、比較的に高周波も含む励振を沢山の節点に加えて、温度変化の測定も必要になる。しかし実際には、全ての節点にこれらの励振と測定を行うことは困難である。

また元の測定値そのままを最小二乗に適用しても多くの場合に良い結果が得られないことも計算機実験から分かっている。この主な原因と対策は二つ考えられる。

一つは測定不確かさである。多くの時系列の測定値に表れることが多いが、変化はギザギザの様相を示し、やはり高周波成分と見なすことができる。真値はある程度の時間の平均的な値に近いと考えられる。そこで時間的な移動平均のスムージングを施してみると改善され、もし 1 分間隔の測定値であれば、10 分から 60 分の移動平均期間で改善効果があることが分かっている^[1]。

二つめに外乱は比較的に高周波成分を持つことが上げられる。理想的な外気温や日射量の変動周期は 24 時間と考えられるが、不規則な雲の動きにより日射量は断続的に変化する場合もある。外気温もこうした日射量変動に伴って比較的に高周波の変動をする。従って、雑音になる高周波成分は通さず、適切な低周波成分だけ通すローパスフィルタ処理が必要である。このフィルタとして時間的な移動平均が単純でありながらも有効であることが分かっている^[1]。

今まで計算機実験を行った範囲では、全ての温度や熱流の測定値に 8 時間程度の移動平均を施すことで比較的に良い同定結果が得られると思われる。これがさらに長くなれば日射取得係数等が適切に求められなくなる。また 8 時間程度の長さであれば測定不確かさの悪影響を除く効用も兼ねることができる。常に 8 時間移動平均が最適でなくても、最適の期間は有効熱容量と決定係数が比較的に大きくなることで探索できる。

一方、不確かさと信頼性の評価のためには、移動平均処理を加えていない元の測定値を用いなければならない。

8. まとめ

建物を熱的に単室モデルでとらえられる場合に、その熱損失係数、日射取得係数と有効熱容量の三種の性能係数を現場測定するためのシステム同定理論を、表計算ソフトでも実施可能な様に特化して演繹した。推定された係数の不確かさ標準偏差 σ_m 、 σ_c 、 σ_r とシステム同定前提の不適合率 β さらに決定係数 COD の式も導いた。また電熱ヒータ加熱の励振には 72 時間周期程度の低周波数の正弦波を用い、測定データには 8 時間程度の移動平均のローパスフィルタ処理をすれば良い同定結果が得られることも述べた。

【参考文献】

- [1] Okuyama H, et al. System parameter identification theory and uncertainty analysis methods for multi-zone building heat transfer and infiltration, Building and Environment, Volume 54, August 2012, Pages 39-52