日本建築学会大会学術講演梗概集
（関東） 2020 年 9 月

並流と向流の熱交換器の相当熱交換一般化コンダクタンスによる熱回路網モデル
その１ 解析解からの一般化コンダクタンスの演繹

正会員 奥山 博康

熱回路網 二流体相当熱交換係数 一般化熱コンダクタンス
熱交換器 熱通過対流比 対数平均温度差

１．はじめに

冷温水コイル等の熱交換器の両流体の出口温度は，熱通過率 K と伝熱面積 A と両流体の入口温度による指数関数の解析解で計算できる[1]．しかし熱交換器と建物を一体的な熱回路網モデルで解く場合は，出入口温度の節点を設け，全体システムの連立方程式の未知数とする必要がある．これまで熱回路網では，熱交換器内の流れ方向を分割し，多節点で近似して流体温度変化を解いてきた．しかし出口温度と，もう一方の流体の入口温度との相当熱交換係数が解析解から演繹でき，分割近似をしない熱回路網で出口温度の解析解が得られる．

２．並流の場合

並流の場合として，図 1 に示す様に，流体 w の管が，より太い管の中にあり，両方の管の間をもう一方の流体 a が同じ方向に流れるとする．流れ方向に距離は l(m)とし全長は L(m)とする．内管の断面の周長は p(m)とする．流体 w と流体 a の間の熱通過率は U(W/m^{2}K)とする．流体 w の熱容量流量は，比熱 c_w(J/kgK)と密度 ρ_w(kg/m^3)と体積流量 q_w(m^3/s)として $c_w\rho_w q_w$ (J/sK)となる．また同様に流体 a は，比熱 c_a(J/kgK), 密度 ρ_a(kg/m^3)，体積流量 q_a(m^3/s)として $c_a\rho_a q_a$ (J/sK)となる．これらから次の連立常微分方程式が記述できる．固有値とその固有ベクトル等により線形代数的な方法で解く．

$$\begin{bmatrix} c_a\rho_a q_a & 0 \\ 0 & c_w\rho_w q_w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\theta_a/dl \\ d\theta_w/dl \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -Up & Up \\ Up & -Up \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_w \end{bmatrix} \tag{1}$$

左辺のマトリックスの逆行列を両辺に左方から乗じる．

$$\begin{bmatrix} d\theta_a/dl \\ d\theta_w/dl \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -Up/c_a\rho_a q_a & Up/c_a\rho_a q_a \\ Up/c_w\rho_w q_w & -Up/c_w\rho_w q_w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_w \end{bmatrix} \tag{2}$$

マトリックス内の要素を次の記号定義で簡潔に表す．

$$\begin{bmatrix} d\theta_a/dl \\ d\theta_w/dl \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -K_a & K_a \\ K_w & -K_w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_w \end{bmatrix} \tag{3}$$

この固有値は $-(K_a+K_w)$と 0 であり，対応する固有ベクトルは其々$^t(K_a, -K_w)$と $^t(1, 1)$である．これらで構成される二項の不定積分定数を C_1 と C_2 として解析解は次(4)式で表される．C_1 と C_2 の定め方は，l=0 の入口温度 θ_{ai} と θ_{wi} が与えられること，また並流の場合には，熱交換面積が大きくなれば，両流体は等しい究極温度 θ_∞に近づく条件による．

$$\begin{bmatrix} \theta_a(l) \\ \theta_w(l) \end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix} K_a \\ -K_w \end{bmatrix}\exp\left[-(K_a+K_w)l\right]+C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

ここに究極温度 θ_∞は，熱容量流量 $c_a\rho_a q_a$ と $c_w\rho_w q_w$ の重み付き平均である．其々の比率を r_a=$c_a\rho_a q_a$/($c_a\rho_a q_a$+ $c_w\rho_w q_w$)と r_w= $c_w\rho_w q_w$ /($c_a\rho_a q_a$+ $c_w\rho_w q_w$)とおけば，次の(5)式で計算される．そして(4)式の不定積分定数は定まり，(6)式が記述される．

$$\theta_\infty = r_a\theta_{ai}+r_w\theta_{wi} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_a(l) \\ \theta_w(l) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \theta_{ai}-\theta_\infty \\ \theta_{wi}-\theta_\infty \end{bmatrix}\exp\left[-(K_a+K_w)l\right]+\begin{bmatrix} \theta_\infty \\ \theta_\infty \end{bmatrix} \tag{6}$$

距離 l=L で出口温度 θ_{ae} と θ_{we} である．まず(6)式の一行目から θ_{ae} は次の(7)式で表される．

$$\theta_{ae}=(\theta_{ai}-r_a\theta_{ai}-r_w\theta_{wi})\exp\left[-(K_a+K_w)L\right]+r_a\theta_{ai}+r_w\theta_{wi} \tag{7}$$

この式を θ_{ae} に関する次の(8)式に変形し，A_1 は $c_a\rho_a q_a$ とおければ，この式は出口温度 θ_{ae} に関する熱収支式になり，A_2 は求める相当熱交換係数となる．

$$A_1(\theta_{ai}-\theta_{ae})+A_2(\theta_{wi}-\theta_{ae})=0 \tag{8}$$

この(8)式と(7)式を比較するため，(8)式は次の(9)式に書き換える．そして(7)式を(9)式の形に変形し(10)式を得る．

$$A_1\theta_{ai}+A_2\theta_{wi}-(A_1+A_2)\theta_{ae}=0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\left\{r_a+r_w\exp\left[-(K_a+K_w)L\right]\right\}\theta_{ai}+\\ &\qquad\left\{r_w-r_w\exp\left[-(K_a+K_w)L\right]\right\}\theta_{wi}-\theta_{ae}=0\end{aligned} \tag{10}$$

この(9)と(10)式を比較し係数 A_1 と A_2 の内容が定まる．そこで(9)式の両辺を A_1 で除し，さらに両辺に $c_a\rho_a q_a$ を乗じ，係数 A_1 と A_2 の内容で記述すれば次式が得られる．

$$c_a\rho_a q_a(\theta_{ai}-\theta_{ae})+r_w\frac{c_a\rho_a q_a\left\{1-\exp\left[-(K_a+K_w)L\right]\right\}}{r_a+r_w\exp\left[-(K_a+K_w)L\right]}(\theta_{wi}-\theta_{ae})=0 \tag{11}$$

この第 2 項の係数が，流体 a の出口温度の流体 w の入口温度との相当熱交換コンダクタンス $c_{ae,wi}$ であるが，r_a と r_w の代わりに元の係数で表せば次の(12)式となる．

$$c_{ae,wi}=\frac{c_a\rho_a q_a\cdot c_w\rho_w q_w\left\{1-\exp\left[-(K_a+K_w)L\right]\right\}}{c_a\rho_a q_a+c_w\rho_w q_w\exp\left[-(K_a+K_w)L\right]} \tag{12}$$

同様に(6)式の 2 行目から，流体 w の出口温度 θ_{we} と流体 a の入口温度 θ_{ai} との相当熱交換係数 $c_{we,ai}$ は次式で計算される．

$$c_{we,ai}=\frac{c_a\rho_a q_a\cdot c_w\rho_w q_w\left\{1-\exp\left[-(K_a+K_w)L\right]\right\}}{c_w\rho_w q_w+c_a\rho_a q_a\exp\left[-(K_a+K_w)L\right]} \tag{13}$$

これらの $c_{ae,wi}$ と $c_{we,ai}$ による並流の熱回路網を図 2 に示す．

２．向流の場合

向流の場合は，図 3 に示す様に両流体が逆方向に流れる．並流の(3)式に対応するのは次の(14)式である．

$$\begin{bmatrix} d\theta_a/dl \\ d\theta_w/dl \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -K_a & K_a \\ -K_w & K_w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_w \end{bmatrix} \tag{14}$$

この固有値は $-(K_a-K_w)$と 0 であり，対応する固有ベクトルは其々$^t(K_a, K_w)$と $^t(1, 1)$である．これらで構成される二項の不定積分定数を D_1 と D_2 として解析解は次の(15)式で表される．

$$\begin{bmatrix} \theta_a(l) \\ \theta_w(l) \end{bmatrix}=D_1\begin{bmatrix} K_a \\ K_w \end{bmatrix}\exp\left[-(K_a-K_w)l\right]+D_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Thermal network models of parallel and counter flow heat exchangers comprised of equivalent heat exchanging generalized conductance Part 1 Deduction of generalized conductance from analytical solution

OKUYAMA Hiroyasu

向流であるから，l=0 のところの流体 a は入口温度の θ_{ai} であり，一方流体 w の出口温度は θ_{we} となり，(16)式が書ける．また l=L のところの流体 a は出口温度 θ_{ae} であり，流体 w は入口温度 θ_{wi} であり，(17)式が書ける．

$$\begin{bmatrix}\theta_{ai}\\ \theta_{we}\end{bmatrix}=D_1\begin{bmatrix}K_a\\ K_w\end{bmatrix}+D_2\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\theta_{ae}\\ \theta_{wi}\end{bmatrix}=D_1\begin{bmatrix}K_a\\ K_w\end{bmatrix}\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]+D_2\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \tag{17}$$

ここで(16)式と(17)から D_1 と D_2 は次式の様に求められる．

$$D_1=\left(\theta_{ai}-\theta_{wi}\right)/\left\{K_a-K_w\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\} \tag{18}$$

$$D_2=\frac{\theta_{wi}K_a-\theta_{ai}K_w\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]}{K_a-K_w\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]} \tag{19}$$

これらにより(17)式の 1 行目は次の(20)式で記述される．さらに(20)式の右辺の分数の分母を両辺に乗じて(21)式を得る．

$$\theta_{ae}=\frac{K_a(\theta_{ai}-\theta_{wi})}{K_a-K_w\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]}\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]+\frac{\theta_{wi}K_a-\theta_{ai}K_w\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]}{K_a-K_w\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\theta_{ae}&\left\{K_a-K_w\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\}\\ &=K_a(\theta_{ai}-\theta_{wi})\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\\ &\quad+\theta_{wi}K_a-\theta_{ai}K_w\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\end{aligned} \tag{21}$$

並流の場合と同様に，流体 a の出口温度 θ_{ae} の，もう一方の流体 w の入口温度 θ_{wi} との相当熱交換コンダクタンスを求める．次の(22)式は，係数 B_1 が $c_a\rho_a q_a$ の場合に，θ_{ae} に関する熱収支式になる．(21)式と(22)式の比較をするために，(22)式は(23)式の形に変形する．

$$B_1(\theta_{ai}-\theta_{ae})+B_2(\theta_{wi}-\theta_{ae})=0 \tag{22}$$

$$B_1\theta_{ai}+B_2\theta_{wi}-(B_1+B_2)\theta_{ae}=0 \tag{23}$$

そして(21)式も(23)式の形に変形し次式を得る．

$$\begin{aligned}&\left\{(K_a-K_w)\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\}\theta_{ai}\\ &\quad+\left\{K_a-K_a\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\}\theta_{wi}\\ &\quad-\left\{K_a-K_w\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\}\theta_{ae}=0\end{aligned} \tag{24}$$

この(24)式で，(23)式の係数 B_1 と B_2 に対応する部分の和が，θ_{ae} の係数部分と一致することが確認できる．従って(24)式は，(22)式の形の，次の(25)式に書きなおせる．

$$\begin{aligned}&\left\{(K_a-K_w)\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\}\left(\theta_{ai}-\theta_{ae}\right)\\ &\quad+\left\{K_a-K_a\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\}\left(\theta_{wi}-\theta_{ae}\right)=0\end{aligned} \tag{25}$$

この両辺に $c_a\rho_a q_a/\{(K_a-K_w)\exp[-(K_a-K_w)L]\}$ を乗じて出口温度 θ_{ae} に関する次の熱収支式を得る．

$$\begin{aligned}&c_a\rho_a q_a\left(\theta_{ai}-\theta_{ae}\right)+\\ &\quad\frac{c_a\rho_a q_a K_a\left\{1-\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\}}{\left(K_a-K_w\right)\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]}\left(\theta_{wi}-\theta_{ae}\right)=0\end{aligned} \tag{26}$$

ここで K_w/K_a= $c_a\rho_a q_a/$ $c_w\rho_w q_w$ を利用して(26)式は(27)式になる．

$$\begin{aligned}&c_a\rho_a q_a\left(\theta_{ai}-\theta_{ae}\right)+\frac{c_a\rho_a q_a\cdot c_w\rho_w q_w}{c_a\rho_a q_a-c_w\rho_w q_w}\\ &\quad\left\{1-\frac{1}{\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]}\right\}\left(\theta_{wi}-\theta_{ae}\right)=0\end{aligned} \tag{27}$$

流体 a の出口温度 θ_{ae} と流体 w の入口温度 θ_{wi} との相当熱交換コンダクタンス $c_{ae,wi}$ は次の(28)式で計算される．

$$c_{ae,wi}=\frac{c_a\rho_a q_a\cdot c_w\rho_w q_w}{c_a\rho_a q_a-c_w\rho_w q_w}\left\{1-\frac{1}{\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]}\right\} \tag{28}$$

流体 w では，(16)式の 2 行目の出口温度 θ_{we} の式から同様に演繹して，出口温度 θ_{we} に関する熱収支式は(29)式，そして流体 a の入口温度 θ_{ai} との相当熱交換コンダクタンス $c_{we,ai}$ は(30)式で表される．

$$\begin{aligned}&c_w\rho_w q_w\left(\theta_{wi}-\theta_{we}\right)+\frac{c_w\rho_w q_w\cdot c_a\rho_a q_a}{c_w\rho_w q_w-c_a\rho_a q_a}\\ &\quad\left\{1-\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\}\left(\theta_{ai}-\theta_{we}\right)=0\end{aligned} \tag{29}$$

$$c_{we,ai}=\frac{c_w\rho_w q_w\cdot c_a\rho_a q_a}{c_w\rho_w q_w-c_a\rho_a q_a}\left\{1-\exp\left[-(K_a-K_w)L\right]\right\} \tag{30}$$

これらの $c_{ae,wi}$ と $c_{we,ai}$ による向流の熱回路網を図 4 に示す．

3．熱通過対流比

流れ方向の多分割モデルを用いる場合には，既報[2]の単一流体熱交換器では，内表面伝達対流比で必要な分割数を決められるとした．この二流体熱交換の場合には，前述の指数関数の中身を，並流の熱通過対流比は Rp で，向流は Rc として次式で表し，この大小で分割数評価に用いることができる．

$$R_p=UpL\left(c_w\rho_w q_w+c_a\rho_a q_a\right)/\left(c_a\rho_a q_a\cdot c_w\rho_w q_w\right) \tag{31}$$

$$R_c=UpL\left(c_w\rho_w q_w-c_a\rho_a q_a\right)/\left(c_a\rho_a q_a\cdot c_w\rho_w q_w\right) \tag{32}$$

4．まとめ

冷暖房の全体システムの熱回路網の一部に熱交換器を含む場合に，その出入口温度の節点だけで解析解が計算される相当熱交換コンダクタンスを導いた．

参考文献

[1]日本機械学会,伝熱工学資料･改訂第 4 版,1989 年 7 月
[2]奥山博康，熱交換器の管内表面における指数関数の相当熱伝達係数，建築学会大会学術講演梗概集, 2019 年 9 月

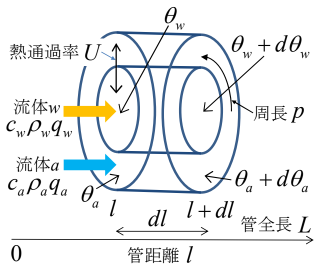

図 1　並流流れ方向微小部分

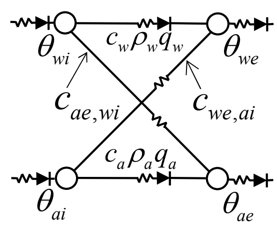

図 2　並流の熱回路網モデル

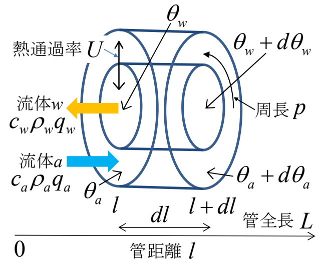

図 3　向流流れ方向微小部分

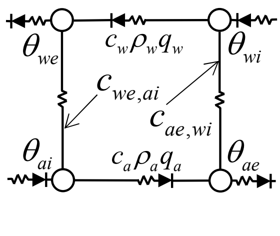

図 4　向流の熱回路網モデル

神奈川大学・教授・工博　　Professor, Dr. Eng., Kanagawa University