

建築物の熱回路系における推移行列と 射影分解による時間数値積分公式

正会員 奥 山 博 康*
正会員 木 村 建 一**

1. はじめに

この報告において述べる解析手法は建築の熱の系をいかに適切にシュミレートするかに有効であるというより、むしろ熱の系を最適に制御する場合や最適な設計をしようとする場合に有効である。この報告においては根底となる理論の緒をのべ、その簡単な計算例をあげる。

在来、レスポンスファクター法を用いた負荷計算や室温変動計算においては最終目的は室温等の外乱等に対する重み関数を求めることにあるにかかわらず、まず中間段階として壁体等のマシブな個々の部位の熱流応答を求めることが必要であった。そしてこのことにより計算理論は煩雑さをともなったのであった。またこうした場合は本来、個々の部位と全体との統合、連結理論が必要となってくる。

一方、通常の時間差分は重み関数のような動特性を表わす関数を出さないため系の動特性を解明しようとする場合、不利である。また時間差分の計算は後述する推移行列の展開式の第二項までによる近似値計算であるため誤差はまぬがれない。

そこでこうした弱点を避ける目的で熱の系全体を精度の許すかぎり離散値化し集中定数化した熱回路網系で表現し、さらに系全体における重み関数およびそれから構成される推移行列を簡単明瞭に求め、さらにデュアメル時間積分を数値計算的に求める一つの公式を提案する。

系を多節点、多次元にとらえる解析手法は北大の荒谷教授により報告¹⁾されており、逐次積分も提案されている。ここで述べる時間積分公式も逐次積分を行なっていくものであるが、積分の対象となる式は多節点系に拡張したデュアメル積分であり、固有値に関する射影分解を利用して解析的積分を行なった。後述する固有値の実数かつ負であることの証明によりこの報告における積分は安定に行なえることが保障される。

また九大の浦野教授等により逐次状態遷移法が提案されている²⁾。ここで扱う状態空間はこの逐次状態遷移法

における空間と同じものである。またこの報告の段階では線型空間を扱っているがこの点でも同じである。一般に熱の系に限らず力学系等、物理系はその状態空間を明確にすることにより全て統一的な数学理論によって扱えるのであるが、当報告ではその理論を応用しアナログコンピュータを用いる解析に帰着させることなく、またその分野の用語も用いないで論を展開する。また壁体程度の規模でその各セグメントからの出力を出力方程式で出して継ぐことにより計算する必要はないと考え、状態方程式一本による論の展開を行なった。もし出力方程式が必要となるならそれは電算機の数値計算上、行列演算の規模に限界があり出力を出すことによって各部分を継がざるを得ない場合か、または何らかの評価関数を導入する場合等であると考えられる。

2. ベクトル行列微分方程式であらわされる多次元常微分方程式とその一般解

考える熱の系を温度に関し、線型多変数系であるとする。このとき次のベクトル行列微分方程式が熱の系を記述する。

$$MC_p \frac{dT}{dt} = CT + H \dots \dots \dots (2-1)$$

ただし各記号は以下に示すとおりであり、今後行列は普通の太文字で、ベクトルは太文字であらわす。

C : 対象の従属系の熱コンダクタンスで構成されるコンダクタンスマトリクス。

T : 対象の従属系節点の温度ベクトル。

H : 従属系に対する入力熱量ベクトル。

MC_p : 従属系節点のもつ熱容量の対角行列。

ここでいう独立系の節点とは熱容量無限大に近く、独自の温度を保つ節点や装置によって一定の温度を保つ節点であって、例えば外気温や空調された室温等をあらわす。従属系の節点とは建築物の部材を表現する節点である。

以下に展開する論においては熱の系として建築物のみを考え装置をも含んでの系とはしないことにする。具体的に言えば熱コンダクタンスが節点間において可逆対称である系のみを考えるものとする。

* 清水建設研究所研究員 ** 早稲田大学教授・工博
(昭和52年9月26日稿受理・討論期限昭和53年10月末日)

(2-1) の式で $d\mathbf{T}/dt$ の係数行列を単位行列にするために次の変形を行う。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{dt} &= MC_p^{-1} C^* \mathbf{T} + MC_p^{-1} \mathbf{H} \\ &= C^* \mathbf{T} + \mathbf{F} \dots \dots \dots (2-2) \end{aligned}$$

MC_p^{-1} は MC_p が本来対角行列であるから MC_p の対角要素を逆数化した対角行列である。

(2-2) の方程式は関数解析における発展方程式 (evolution equation) で記述される初期値問題かつ系が時間関数の入力を受ける問題の中の簡単なものとみることができる。このとき C^* なる写像の性質と温度ベクトルの空間の性質により (2-2) の解の一意性とその存在および初期値に対する依存の連続性は保障され (2-2) の問題は適切であるとされる。そこで (2-2) を解くわけであるが微分方程式論の綿型常微分方程式の解法における定数変化の法にならない、まず

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = C^* \mathbf{T} \dots \dots \dots (2-3)$$

の微分方程式を解き、さらに (2-2) の方程式を解くことができる。この初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = C^* \mathbf{T} \\ \mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0 \end{cases} \dots \dots \dots (2-4)$$

の解は解の存在証明に使う逐次代入によって得られる。(2-4) の方程式は次の積分方程式と同値である。

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_0 + \int_0^t C^* \mathbf{T}(s) ds \dots \dots \dots (2-5)$$

そこで次の三式をみたすような関数列 $\mathbf{T}_n(t)$ を考える。

$$\begin{cases} \mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{T}_{n+1}(t) = \mathbf{T}_0 + \int_0^t C^* \mathbf{T}_n(s) ds \quad (n=0, 1, \dots) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}_n(t) = \mathbf{T}(t) \end{cases} \dots \dots \dots (2-6)$$

$n \rightarrow \infty$ のとき完備性により \mathbf{T}_n は (2-4) をみたすような解となる。階差関数列 $U_n(t)$ を次のように定める。

$$U_{n+1}(t) = \mathbf{T}_{n+1}(t) - \mathbf{T}_n(t) \quad (n=0, 1, \dots) \dots \dots \dots (2-7)$$

(2-6) の第 2 式で n を 1 つへらした式を作って辺々ひくと

$$U_{n+1}(t) = \int_0^t C^* U_n(s) ds \dots \dots \dots (2-8)$$

一方

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \mathbf{T}_1(t) - \mathbf{T}_0(t) = \int_0^t C^* \mathbf{T}_0(s) ds \\ &= \int_0^t C^* \mathbf{T}_0 ds = t C^* \mathbf{T}_0 \dots \dots \dots (2-9) \end{aligned}$$

なんとすれば $C^* \mathbf{T}_0$ は一定であるから

$$\int_0^t C^* \mathbf{T}_0 ds = C^* \mathbf{T}_0 \int_0^t ds = C^* \mathbf{T}_0 t$$

となるからである。こうして得られた U_1 を (2-8) に $n=1$ とみなして代入すれば

$$U_2(t) = \int_0^t C^* (s C^* \mathbf{T}_0) ds = C^{*2} \mathbf{T}_0 \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2!} C^{*2} \mathbf{T}_0 \dots \dots \dots (2-10)$$

再び (2-8) に代入すれば

$$U_3(t) = \frac{t^3}{3!} C^{*3} \mathbf{T}_0 \dots \dots \dots (2-11)$$

このようにして繰り返していけば

$$U_n(t) = \frac{t^n}{n!} C^{*n} \mathbf{T}_0 \dots \dots \dots (2-12)$$

となる。ところが

$$\mathbf{T}_n(t) = \mathbf{T}_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n \dots \dots \dots (2-13)$$

であることと $\mathbf{T}_n(t) \rightarrow \mathbf{T}(t) (n \rightarrow \infty)$ が成り立つことを用いれば

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \mathbf{T}_0 + \frac{t}{1!} C^* \mathbf{T}_0 + \frac{t^2}{2!} C^{*2} \mathbf{T}_0 + \dots + \frac{t^n}{n!} C^{*n} \mathbf{T}_0 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} C^{*n} \mathbf{T}_0 \dots \dots \dots (2-14) \end{aligned}$$

とかける。普通の指数関数のテーラー展開とのアナロジーにより数学上次の記法が定義される。

$$\begin{aligned} e^{tC^*} \mathbf{T}_0 &= \mathbf{T}_0 + \frac{t}{1!} C^* \mathbf{T}_0 + \frac{t^2}{2!} C^{*2} \mathbf{T}_0 + \dots + \frac{t^n}{n!} C^{*n} \mathbf{T}_0 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} C^{*n} \mathbf{T}_0 \dots \dots \dots (2-15) \end{aligned}$$

e^{tC^*} は $\exp(tC^*)$ と書くが、これは \mathbf{T}_0 に $\mathbf{T}(t)$ を対応させる作用素であり C^* はその生成作用素となる。(2-15) を導くにあたって初期時刻を 0 とおいたが一般に t_0 とすれば (2-14) は

$$\mathbf{T}(t) = \exp((t-t_0)C^*) \mathbf{T}_0 \dots \dots \dots (2-16)$$

となる。

さらに対象の系が \mathbf{H} の入力を継続的に受けていくときには系の動特性は (2-2) で表わされるのであったから前述の定数変化の法により (2-2) の解は

$$\mathbf{T}(t) = \exp((t-t_0)C^*) \mathbf{A}(t) \dots \dots \dots (2-17)$$

の形であると仮定できる。ここで時間関数ベクトル $\mathbf{A}(t)$ は \mathbf{T}_0 と置き換えたものである。(2-17) の両辺を時間 t によって微分することにより次式を得る。

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = C^* \mathbf{T} + \exp((t-t_0)C^*) \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \dots \dots \dots (2-18)$$

ここで用いた $(\exp(tX))' = X \exp(tX)$ のような性質は (2-15) において項別微分すれば得られることは明らかであろう。(2-2) の解が (2-17) の形になるとすれば (2-18) の右辺は (2-2) の右辺と等しい。よって

$$\exp((t-t_0)C^*) \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = \mathbf{F}(t) \dots \dots \dots (2-19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) &= [\exp((t-t_0)C^*)]^{-1} \mathbf{F}(t) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) &= \exp(-(t-t_0)C^*) \mathbf{F}(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2-20)$$

ここで用いた $\exp(-X) = (\exp X)^{-1}$ なる性質は行列の

指数関数の加法定理の特別な場合として導かれるが、加法定理は一般に X と Y が交換可能ならば次のように記述される。

$$\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$$

これは

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (X+Y)^n$$

が直接計算によってなりたつことがいえるから証明する。もし交換可能な行列として X と $-X$ をとれば、

$$\exp(X-X) = \exp(0) = E = \exp X \exp(-X)$$

$$\exp(-X) = (\exp X)^{-1}$$

となる。

さて(2-20)の両辺を時間積分し、 $A(t)$ について解けば

$$A(t) = \int_{t_0}^t \exp(-(t-\tau)C^*) F d\tau + B \dots (2-21)$$

B は積分定数ベクトルである。(2-21)を(2-17)に代入し

$$\begin{aligned} T(t) &= \exp((t-t_0)C^*) B \\ &+ \exp((t-t_0)C^*) \int_{t_0}^t \exp(-(\tau-t_0)C^*) F(\tau) d\tau \\ &= \exp((t-t_0)C^*) B \\ &+ \int_{t_0}^t \exp((t-\tau)C^*) F(\tau) d\tau \dots \dots \dots (2-22) \end{aligned}$$

ここで再び加法定理を用いた。二つの行列が交換可能であることは明らかであろう。 $t=t_0$ において

$$\exp((t_0-t_0)C^*) = \exp(0) = E$$

であることから

$$B = T_0$$

と決定し得る。従って(2-2)の解は次のようになる。

$$\begin{aligned} T(t) &= \exp((t-t_0)C^*) T_0 \\ &+ \int_{t_0}^t \exp((t-\tau)C^*) F(\tau) d\tau \dots \dots \dots (2-23) \end{aligned}$$

(2-23)式はデュアメル(Duhamel)の積分を多節点系に拡張したものにはかならない。ここで

$$\phi(t-t_0) = \exp((t-t_0)C^*) \dots \dots \dots (2-24)$$

とおき、これを熱回路系の温度の推移行列とよぶ。

3. ベクトル行列微分方程式の各ベクトル、行列の内容

一般に熱の系を離散値化した集中定数系でとらえた場合にその従属系の節点 j に関して次の常微分方程式が成立する。

$$(mc_p)_j \frac{dT_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n+n_0} C_{ij}(T_i - T_j) + HG_j \dots (3-1)$$

ここで

$(mc_p)_j$: j 節点のもつ熱容量 (kcal/°C)

T_j : 従属系 j 節点の温度 (°C)

C_{ij} : 節点 i から j へ向かう熱コンダクタンス (kcal/°Ch)

HG_j : j 節点に対し直接入力される熱量 (kcal/h)

n : 従属系総節点数

n_0 : 独立系総節点数

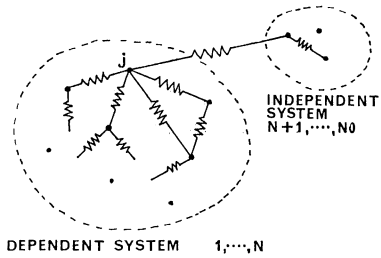


Fig. 1 建築的熱系の概念図
Schema of Building Thermal Network System.

(3-1)の常微分方程式は一般によく言及される熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{C_p r} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \dots \dots \dots (3-2)$$

を三次元からさらに多次元に拡張し、境界条件及び内部発熱等も含んで記述したさらに一般的な熱伝導方程式である。(3-1)においては距離の二次微分は出てこないが、これは対象を離散値化し全体的にとらえたためであり本質的には(3-2)式の空間差分化である。これをしめしてみる。

(3-2)式の両辺に微小立方体の体積 ($dx dy dz$) を乗じる。

$$\begin{aligned} (dx dy dz \cdot C_p r) \frac{dT}{dt} \\ = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) (dx dy dz) \dots \dots (3-3) \end{aligned}$$

(3-3)右辺の x 方向について第一項だけをとりだし変形してみる。

$$\begin{aligned} \lambda \left[\frac{T_{x+dx} - T_x}{dx} - \frac{T_x - T_{x-dx}}{dx} \right] dx dy dz \\ = \lambda \left[\frac{T_{x+dx} - T_x}{dx} + \frac{T_{x-dx} - T_x}{dx} \right] dx dy dz \\ = \lambda \frac{dy dz}{dx} [(T_{x+dx} - T_x) + (T_{x-dx} - T_x)] \\ = C_{x+dx,x} (T_{x+dx} - T_x) + C_{x-dx,x} (T_{x-dx} - T_x) \dots \dots \dots (3-4) \end{aligned}$$

ここに $C_{x+dx,x}$ は $x+dx$ の点から x の点へ向う熱コンダクタンス、 $C_{x-dx,x}$ は $x-dx$ の点から x の点へ向う熱コンダクタンスである。(3-4)の差分化は y, z 方向にも同様に行なえる。

そこである微小立方体を考えその中心に j 節点を設ける。するとその立方体の各六面を介し隣り合う六つの立方体の中心にある節点を i として(3-2)式は次のように常微分方程式化されることがわかる。

$$(mc_p)_j \frac{dT_j}{dt} = \sum_{i=1}^6 C_{ij}(T_i - T_j) \dots \dots \dots (3-5)$$

各コンダクタンスは節点間の熱伝導面積に熱伝導率を乗じ、節点間の距離で除したのになっている。

(3-5) 式を観察し、またそもそも (3-2) の熱伝導の方程式を導くことに使った二つの大きな原則があったことに気付く。すなわち熱流量は温度勾配と熱コンダクタンスに比例すること、ある部分の温度の時間増分比率はその部分に出入した熱流の収支として貯えられた熱量に比例しその部分のもつ熱容量に反比例するというのである。

以上の事柄により空間的に連続した節点においては必然的に (3-2) 式が成り立ち、離散値化され集中定数化された各部分をうけもつ節点においては (3-1) 式が直接導かれる。

(3-1) 式が多次元であるという意味はある節点は熱的に接続していればいくつの節点と結びついていてもよいということであり、(3-2) 式のように三次元以下に限定して考えるやり方を拡張したものである。(3-1) 式右辺第一項はある j 節点についてその他の節点すべてとの総和を計算することになっているが、そのうちもし熱的に接続していない節点の組があればその間のコンダクタンスは 0 とみなせばよいわけである。

熱の系として実際の対象は分布定数系である。しかし (3-1) によって表現されるようにそれを集中定数化した数学モデルを解析対象とする。ここに避けられない本質的な誤差の問題がある。つまり空間離散化の誤差の問題であるが、この評価は両者の系について入力に対する温度の重み関数を時間積分した値によってなされるであろう。一次元伝熱の単純な場合について考察してみるとある時間積分区間値を与えた場合、両者の差がなくなるある空間離散化の程度が定められ、ただその程度を緻密にすればする程、差が少なくなるというものではないことが推測される。熱コンダクタンスには次の種類のものが考えられる。

熱伝導によるものは

$$C_{ij} = \lambda S / d \dots\dots\dots (3-6)$$

であり、 S は i, j 間の伝導断面積、 d は i, j 間の距離である。このようなコンダクタンスは可逆対称であって

$$C_{ij} = C_{ji} \dots\dots\dots (3-7)$$

という重要な性質をもつ。対流熱伝達率によるものは

$$C_{ij} = \alpha S \dots\dots\dots (3-8)$$

S は伝達面積であり、 α は対流熱伝達率である。この場合も (3-7) は成り立つ。

輻射によるものは i, j 両面の面積、相互間の形態係数を A, F としたとき

$$C_{ij} = \alpha_r A_i F_{ij} = \alpha_r A_j F_{ji} \dots\dots\dots (3-9)$$

となる。ただし便宜的な輻射熱伝達率 α_r は ϵ_i, ϵ_j を i, j 面の輻射率、 C_b を黒体の輻射定数、 t_m を i, j 両面の平均絶対温度とした場合次式で与える。

$$\alpha_r = 0.04 \epsilon_i \epsilon_j C_b \left(\frac{t_m}{100} \right)^3 \dots\dots\dots (3-10)$$

このように輻射に関しても線型化することは原微分方程式の線型性の仮定が要求する。

(3-9) 式をみてわかるように輻射についても可逆対称性 (3-7) は成り立つ。これは形態係数と輻射面積に関する相反定理からくる。

さらに流れる流体によって熱が伝えられる場合も熱コンダクタンスを考えることができる。

$$C_{ij} = C_p \cdot r \cdot V \dots\dots\dots (3-11)$$

ここに C_p は流体の定圧比熱、 r はその比重、 V はその流量である。具体的にはパイプやダクトを通して水や空気が流れることにより熱が運ばれる場合を考えればよい。(3-11) のようなコンダクタンスは可逆対称ではない。すなわち

$$C_{ji} = 0 \dots\dots\dots (3-12)$$

である。しかしながら扱う熱の系を建築物に限り、空調装置等を切り離して考えれば非可逆な熱コンダクタンスは扱わないですむ。

以下の展開において熱コンダクタンスの可逆対称性は数学的に重要な意味もってくる。

むろんただ近似的に解くだけならば既報³⁾のように時間方向に差分化してしまえば非可逆対称な熱コンダクタンスをも一括して扱えることは言うまでもない。

ところで上記熱コンダクタンスの算出についてはごく特殊な場合において有限要素法を用いることができる。しかし我々が扱おうとする建築物全体となればその適用は困難となることに気付く。そして多次元にとらえる必要が出てくる時には熱回路網の方法が有力なとらえ方であることがわかる。

さて (3-1) 式を次のように変形する。

$$(mc_p)_j \frac{dT_j}{dt} = \sum_{i=1}^n (C_{ij} T_i) - T_j \left(\sum_{i=1}^{n+n_0} C_{ij} \right) + \sum_{i=n+1}^{n+n_0} C_{ij} \cdot T_i + H G_j \dots\dots\dots (3-13)$$

これを次のように置き換える。

$$(mc_p)_j \frac{dT_j}{dt} = \sum_{i=1}^n (C_{ij} \cdot T_i) - T_j \left(\sum_{i=1}^{n+n_0} C_{ij} \right) + H_j \dots\dots\dots (3-14)$$

ここに

$$H_j = \sum_{i=n+1}^{n+n_0} C_{ij} \cdot T_i + H G_j \dots\dots\dots (3-15)$$

とおく。

(3-14) 式によって原微分方程式 (2-1) の行列、及びベクトルの内容は定量的に説明される。

解くために変形した方程式 (2-2) において C^* は (2-1) の C と違って対称行列ではなくなっている。しかしながら、対称行列として知られている性質のうち期待する性質のかなりの部分は保存されている。これは次の展開で明らかとする。

4. 固有値の実負の証明

推移行列 $\phi(t-t_0)$ を展開式 (2-15) によって計算することは不可能である。もちろん絶対収束することは証明しようが実際の計算の範囲にないと言える。しかしながらもし C^* が対角行列に相似, すなわち正則行列 P によって $P^{-1}C^*P$ が対角行列になるようにすることができれば推移行列は求めることができる。 C^* が実行列でその固有値が実数ならば P は実正則行列にとれる。そこで C^* の固有値はすべて実数でかつ負であることを証明し $C^*(t-t_0)$ の指数関数を求めるための第一段階とする。 C^* の内容は

$$C^* = MC_p^{-1}C \dots\dots\dots (4-1)$$

であった。(4-1) のような行列の要素を d_{ij} のように表わす。前述したように C^* は対角行列ではないが C は対称行列であり, $C_{ij} = C_{ji}$ である。 MC_p^{-1} は対角行列であり j 番要素は $1/mC_{pj}$ である。

いま C^* の固有値の一つを α とすれば

$$C^*x = \alpha x \dots\dots\dots (4-2)$$

なる固有ベクトル x が存在し, それは次の方程式が自明な解 ($x=0$) 以外の解 $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ をもつということである。(4-2) 式はそこで

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n = \alpha \cdot mc_{p1} \cdot x_1 \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \dots + d_{2n}x_n = \alpha \cdot mc_{p2} \cdot x_2 \\ \vdots \\ d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \dots + d_{nn}x_n = \alpha \cdot mc_{pn} \cdot x_n \end{cases} \dots (4-3)$$

(4-3) 式の一行から n 行までそれぞれ共役複素数 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ をかけると

$$\begin{cases} d_{11}x_1\bar{x}_1 + d_{12}x_2\bar{x}_1 + \dots + d_{1n}x_n\bar{x}_1 = \alpha \cdot mc_{p1}x_1\bar{x}_1 \\ d_{21}x_1\bar{x}_2 + d_{22}x_2\bar{x}_2 + \dots + d_{2n}x_n\bar{x}_2 = \alpha \cdot mc_{p2}x_2\bar{x}_2 \\ \vdots \\ d_{n1}x_1\bar{x}_n + d_{n2}x_2\bar{x}_n + \dots + d_{nn}x_n\bar{x}_n = \alpha \cdot mc_{pn}x_n\bar{x}_n \end{cases}$$

を得る。これら各式を辺々加える。左辺については対角部分の項を一つの項にまとめ, また対称な位置にある項をそれぞれ一つの項にまとめると,

$$\begin{aligned} & (d_{11}x_1\bar{x}_1 + d_{22}x_2\bar{x}_2 + \dots + d_{nn}x_n\bar{x}_n) * \\ & + (d_{12}x_2\bar{x}_1 + d_{21}x_1\bar{x}_2) \\ & + (d_{31}x_1\bar{x}_3 + d_{13}x_3\bar{x}_1) \\ & \vdots \\ & (d_{n,n-1}x_{n-1}\bar{x}_n + d_{n-1,n}x_n\bar{x}_{n-1}) ** \\ & = \alpha (mc_{p1}x_1\bar{x}_1 + mc_{p2}x_2\bar{x}_2 + \dots + mc_{pn}x_n\bar{x}_n) *** \end{aligned} \dots\dots\dots (4-5)$$

* の部分は一般に $x\bar{x}$ (実数) であるから実数。また, $d_{ij} = C_{ji} = C_{ij} = d_{ji}$ ($i \neq j$) であるから

$$d_{ij}x_j\bar{x}_i + d_{ji}x_i\bar{x}_j = d_{ij}(x_j \cdot \bar{x}_i + x_i \cdot \bar{x}_j)$$

しかるに $x_j\bar{x}_i + x_i\bar{x}_j$ は実数である。従って ** の部分はすべて実数である。また明らかに右辺 *** の () できくった中も実数であって

$$mc_{p1}x_1\bar{x}_1 + mc_{p2}x_2\bar{x}_2 + \dots + mc_{pn}x_n\bar{x}_n > 0$$

となる。以上により α は実数であることは言えた。こ

の延長により α はさらに負であることも言える。

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_m$$

とし (4-3) より

$$d_{m1}x_1 + d_{m2}x_2 + \dots + d_{mm}x_m + \dots + d_{mn}x_n = \alpha \cdot mc_{pm}x_m \dots\dots\dots (4-6)$$

ここで (4-1) から要素 d の内容を考えると d_{mm} は負, または 0, それ以外での d 正である。そこで次の (4-7) 不等式が得られる。

$$d_{m1}x_m + d_{m2}x_m + \dots + d_{mm}x_m + \dots + d_{mn}x_m > \alpha \cdot mc_{pm}x_m \dots\dots\dots (4-7)$$

さらに (4-2) の固有ベクトルの定義式よりその最大要素 x_m は正であると仮定しえる。この x_m で (4-7) の両辺を割ることにより

$$d_{m1} + d_{m2} + \dots + d_{mm} + \dots + d_{mn} > \alpha \cdot mc_{pm} \dots\dots\dots (4-8)$$

を得るが (4-8) の左辺は 0 または負となる。これは C の要素内容を考えれば明らかである。すなわち

$$\left. \begin{aligned} 0 &> - \sum_{i=n+1}^{n+n_s} C_{im} > \alpha \cdot mc_{pm} \\ \alpha &< \frac{1}{mc_{pm}} \left(- \sum_{i=n+1}^{n+n_s} C_{im} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-9)$$

となり, C^* の固有値は実負であることが証明できた。一般的に実対称行列は実の固有値をもつことは周知の事実であるが, このような非対称行列も実の固有値をもつことがわかった。

実際の電算機を用いた計算においては (4-1) の式の形がらうまい計算法が適用できる。それは MC_p をコレスキー分解した行列によって C^* と相似であって対称な行列を作り固有値計算はこの対称行列に対して行なうのである。

5. 行列の指数関数

以上の証明はまた 適当な実正則行列 P をとることができて, その P により $P^{-1}C^*P$ は対角行列になることも保障したことになる。もしこのようにして C^* が対角化されれば $\exp C^*$ および $\exp(t-t_0)C^*$ は具体的に書きあらわすことが可能となってくる。なぜなら,

$$\begin{aligned} P^{-1}(\exp C^*)P &= P^{-1} \left(E + C^* + \frac{1}{2!}C^{*2} + \frac{1}{3!}C^{*3} + \dots \right) P \\ &= P^{-1}EP + P^{-1}C^*P + \frac{1}{2!}P^{-1}C^{*2}P \\ &\quad + \frac{1}{3!}P^{-1}C^{*3}P + \dots \\ &= E + (P^{-1}C^*P) + \frac{1}{2!}(P^{-1}C^*P \cdot P^{-1}C^*P) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(P^{-1}C^*P \cdot P^{-1}C^*P \cdot P^{-1}C^*P) + \dots \\ &= E + (P^{-1}C^*P) + \frac{1}{2!}(P^{-1}C^*P)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}(P^{-1}C^*P)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$= \exp(P^{-1}C^*P) \dots \dots \dots (5-1)$$

が成立し(5-1)の右辺において指数関数をとる行列は対角行列ですむ。行列の指数関数の展開は各項において行列の累乗になっているがその行列が対角行列ならば累乗された結果の行列は各対角要素の同じ累乗から構成される対角行列となる。式でかけば δ_{ij} をクロネッカーデルタとして

$$P^{-1}C^*P = (\delta_{ij}\alpha_i) \dots \dots \dots (5-2)$$

と対角化されていれば

$$(P^{-1}C^*P)^k = (\delta_{ij}\alpha_i^k) \dots \dots \dots (5-3)$$

となることである。(5-1)の展開式に(5-3)式を代入することにより対角行列 $\exp(P^{-1}C^*P)$ の i 番要素は

$$1 + \alpha_i + \frac{1}{2!}\alpha_i^2 + \frac{1}{3!}\alpha_i^3 + \dots = e^{\alpha_i} \dots \dots \dots (5-4)$$

と普通の指数関数に置き換えられる。従って(5-2)のよな場合

$$P^{-1}(\exp C^*)P = \exp(P^{-1}C^*P) = (\delta_{ij}e^{\alpha_i}) \dots (5-5)$$

$$\therefore \exp(C^*) = P(\delta_{ij}e^{\alpha_i})P^{-1} \dots \dots \dots (5-6)$$

同様に考え

$$\exp((t-t_0)C^*) = P(\delta_{ij}e^{\alpha_i(t-t_0)})P^{-1} \dots \dots (5-7)$$

が得られる。

6. 推移行列の射影分解

n 次正方形行列 C^* に対し適当な正則行列をとって $P^{-1}C^*P$ が対角行列になることと n 個の線型独立な固有列ベクトル p_1, p_2, \dots, p_n が存在することは必要十分になっている。ところが P はこれら列ベクトルを並べた行列としてあらわされる。すなわち

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \dots \dots \dots (6-1)$$

なぜならば、 p_j を C^* の固有値 α_j に対する固有ベクトルとし $P^{-1}C^*P$ の第 j 列ベクトルを b_j とすれば

$$b_j = P^{-1}C^*p_j = P^{-1}\alpha_j p_j = \alpha_j e_j \dots \dots \dots (6-2)$$

となるからである。ただし e_j は n 項単位ベクトルである。こうして C^* が P によって対角化された場合その対角要素は C^* の固有値となっている。そして C^* は実行列で α も実数であるから当然固有ベクトルもすべて実ベクトルである。

電算機を用いて計算する場合、 P^{-1} は P を直接逆行列化するサブルーチンによって計算してもよいがそもそもこの C^* の固有ベクトルは互いに直交するから正規化して得た基底を e_1, e_2, \dots, e_n とすれば

$$P^{-1} = {}^t(e_1, e_2, \dots, e_n) \quad (t: \text{transpose}) \dots (6-3)$$

として簡単に求められる。

このような変換行列 P および P^{-1} が定まれば推移行列 $\phi(t-t_0)$ の各要素が判明する。それらはかねてから推測し得るように指数関数の和になっている。

推移行列の (i, j) 要素を $\phi(t-t_0)_{ij}$ と記し、 P, P^{-1} の (i, j) 要素も同様に p_{ij}, p_{ij}^{-1} と記すことにすれば(5-7)式から

$$\begin{aligned} \phi(t-t_0)_{ij} &= p_{i1} p_{1j}^{-1} e^{\alpha_1(t-t_0)} + p_{i2} \\ & p_{2j}^{-1} e^{\alpha_2(t-t_0)} + \dots + p_{in} p_{nj}^{-1} e^{\alpha_n(t-t_0)} \\ &= \sum_{k=1}^n p_{ik} p_{kj}^{-1} e^{\alpha_k(t-t_0)} \dots \dots \dots (6-4) \end{aligned}$$

となっている。行列として一括して扱えば

$$\begin{aligned} \phi(t-t_0) &= P_1 e^{\alpha_1(t-t_0)} + P_2 e^{\alpha_2(t-t_0)} + \dots + P_n e^{\alpha_n(t-t_0)} \\ &\dots \dots \dots (6-5) \end{aligned}$$

とかける。これが推移行列の射影分解である。 P_1, P_2, \dots, P_n は n 次の正方形行列で射影子と呼ばれるものである。その要素は(6-4)式からわかる。射影子 P_i はその名のとおりに固有値 α_i に対応する固有空間上に任意のベクトルを射影する写像であるから

$$\begin{aligned} P_i p_1 &= 0, P_i p_2 = 0, \dots, P_i p_i = p_i, \dots, P_i p_n = 0 \\ &\dots \dots \dots (6-6) \end{aligned}$$

すなわち

$$P_i(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n) = (0, 0, \dots, p_i, \dots, 0)$$

$$\therefore P_i = (0, 0, \dots, p_i, \dots, 0)$$

$$(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n)^{-1} \dots \dots (6-7)$$

と行列単位で記述しておくことができる。射影子は互いの積が0行列になり、すべての和は単位行列になる性質をもつ。また固有ベクトルをもちださずに射影子を求めることもできる。それにはシルベスターの展開定理を用いればよい。

$$P_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \left[\frac{C^* - \alpha_j E}{\alpha_i - \alpha_j} \right] \dots \dots \dots (6-8)$$

ただこの場合固有値がすべて相異っていなければならず一般的でない。(6-4), (6-7)によって射影子を求める場合には重複固有値に対して重複度に等しいだけの独立な固有ベクトルが作られていさえすれば問題なく求めることができる。重複固有値についての問題は後述する。

この射影子により動特性、及び(2-1)の問題の解は陽な形でもって表現することが可能となる。

(2-23)式に対して

$$\begin{aligned} T(t) &= \phi(t-t_0) T_0 + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau) F(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n P_i e^{\alpha_i(t-t_0)} T_0 + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n P_i e^{\alpha_i(t-\tau)} F(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n P_i e^{\alpha_i(t-t_0)} T_0 + \sum_{i=1}^n P_i \int_{t_0}^t e^{\alpha_i(t-\tau)} F(\tau) d\tau \\ &\dots \dots \dots (6-9) \end{aligned}$$

となる。もし入力調和分析等により、適当な時間の関数で与えられているのであれば(6-9)の積分は解析的に行なえる。そうでなければ $T(t)$ を求めることは数値積分を行うことを必要とするようになる。数値積分はどのような方法をとるにしろ被積分関数の核になる指数関数の形から計算しやすいといえる。

7. 数値積分公式

射影分解を用いて被積分関数を陽な形にしたことは数値積分公式を導くのにきわめて都合がよい。そしてその

際、入力的时间関数ベクトルの形をまず定めておく必要がある。通常今までの負荷計算、室温変動の計算法、例えばレスポンスファクター法等で用いられる気象データは一時間等の一定時間間隔毎の時間的離散値になっている。そしてそれらの時間間隔中においては点と点を結んだ直線になっているとしている。これは入力を三角形ないしは長方形パルスの時系列であらわそうとする場合、必然的にともなわなければならない仮定である。

当報告において導く数値積分公式においてはこれにない入力の時間関数形は同様のものとする。しかしながらこの仮定は時間数値積分公式を導こうとするとき必ずしも必要とはされない。関数形は定積分が可能ながざりどのような形でもよいのである。

さて F は次のように定義されていた。

$$F(t) = MC_p^{-1} H(t) \dots\dots\dots(7-1)$$

F を温度入力ベクトル、 H を熱入力ベクトルと呼ぶ。 F の単位は $^{\circ}\text{C}/\text{hour}$ 、 H は kcal/hour である。

積分区間を今 $(k-1)dt$ 時から kdt 時までとし、その積分変数を τ とする。関数 $F(\tau)$ は上記の仮定により次のようにあらわされる。

$$F(\tau) = F((k-1)dt) + \left[\frac{\tau - (k-1)dt}{dt} \right] \cdot (F(kdt) - F((k-1)dt)) \dots\dots\dots(7-2)$$

(6-9) の右辺第二項の積分の部分に (7-2) を代入することにより積分を行う

$$\begin{aligned} & \int_{(k-1)dt}^{kdt} e^{\alpha_i(kdt-\tau)} F(\tau) d\tau \\ &= \int_{(k-1)dt}^{kdt} e^{\alpha_i(kdt-\tau)} \left[F_{k-1} + \left(\frac{\tau - (k-1)dt}{dt} \right) \cdot (F_k - F_{k-1}) \right] d\tau \\ &= [F_{k-1} - (k-1)(F_k - F_{k-1})] \int_{(k-1)dt}^{kdt} e^{\alpha_i(kdt-\tau)} d\tau \\ & \quad + \frac{1}{dt} (F_k - F_{k-1}) \int_{(k-1)dt}^{kdt} e^{\alpha_i(kdt-\tau)} \cdot \tau d\tau \\ &= \left[\frac{1}{dt} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 e^{\alpha_i dt} - \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 - \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) \right] F_k \\ & \quad + \left[-\frac{1}{dt} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 e^{\alpha_i dt} + \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) e^{\alpha_i dt} \right] F_{k-1} \end{aligned} \dots\dots\dots(7-3)$$

これら F_k, F_{k-1} にかかる係数を

$$a_{i1} = \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 e^{\alpha_i dt} - \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 - \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) \dots\dots(7-4)$$

$$a_{i2} = -\frac{1}{dt} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 e^{\alpha_i dt} + \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) e^{\alpha_i dt} \dots\dots\dots(7-5)$$

とおく。すると (6-9) は漸化式で数値積分が行なえる次の式になる。

$$\begin{aligned} T(kdt) &= \sum_{i=1}^n P_i e^{\alpha_i dt} \cdot T((k-1)dt) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n P_i (a_{i1} F_{k-1} + a_{i2} F_k) \\ &= \phi(dt) T((k-1)dt) + U_0 F_{k-1} + U_1 F_k \dots\dots(7-6) \end{aligned}$$

a_{i1}, a_{i2} は固有値 α_i と時間間隔 dt のみによって決定される。これら係数は i について n 個あるから合計 $n \times 2$ 個作られる。

$\phi(dt), U_0 = \sum_{i=1}^n P_i a_{i1}, U_1 = \sum_{i=1}^n P_i a_{i2}$ 、それぞれはその和に関してあらかじめ演算し、一つの係数行列にまとめておけば計算に都合がよいだろう。

8. 重複固有値について

もしすべての固有値が相異なっていれば固有値、固有ベクトルを求める問題は数学上の概製のサブルーチンによるのがよいであろう。近年、電算機を用いた行列の固有値計算のアルゴリズムについて著しい進歩が見られ、それらの成果は我々が利用し得るようにサブルーチンライブラリとして用意されるに至っている。固有値が実負になることは前述したように証明できるから実際計算上困難が生ずるのは重複固有値に対し独立な固有ベクトルを求める場合であろう。固有値算出に QR 法を用いれば数学的に重複である固有値が数値計算的にも重根とみなせる精度でアウトプットされる。ところで熱の系の構造が対称性をもっている場合等、重複固有値が出てくるときは少なくない。

そこで著者は重複固有値から固有ベクトルを作るサブルーチン MULTI を作製した。MULTI の機能は一般にジョルダンの標準形に変換できる固有ベクトルを算出することにある。

C^* なる線型変換の固有値は実であることが証明できた。よってある実正則行列をもって C^* はジョルダンの標準形に変換できる。もし固有値 α の重複度とそれに対するジョルダン細胞の数が等しければ線型独立な固有ベクトルは難なく作れる。そして 4. での議論により今、扱っている系に対してすべてこのような単純な重根であることがわかっているが、もし重複度の方がジョルダン細胞の数より多ければ細胞の次数の中で次の操作により独立な固有ベクトルを作っていく。まず一つ固有ベクトル e_i は

$$(C^* - \alpha E) e_i = 0 \dots\dots\dots(8-1)$$

により作れる。続く固有ベクトルは次の式によって逐次得られていく。

$$(C^* - \alpha E) e_j = e_{j-1} \quad (j=2, 3, \dots, jk) \dots(8-2)$$

ここに jk はそのジョルダン細胞の次数である。実際の計算ではジョルダン細胞の数は $C^* - \alpha E$ のランクの減少数に等しく、(8-1)、(8-2) を用いる場合にはランクの減少数に等しい個数の解パラメーター間に (8-2) が e_j に関して解をもつような制約条件式が加わることに注意し

て行なえばよい。

9. 計算安定性および時間差分の積分との比較

計算安定性の条件は真の解への収束のための必要条件である。ところが(7-6)式によって時間方向に関して真の解を求めていく漸化式が求められているから、この漸化式によって数値的に正確に解が進んでいくかぎり計算安定性を議論する以前にその解は真の解となる。したがってもしその計算解が安定でなければ、そもそも対象のシステムが安定(リアプノフの安定の意味で)でなかったことを意味する。今、扱っている系の構造は線型変換 C^* によってあらわされるが、これまでの固有値に関する議論により計算安定性のみならず、系そのものが安定であることを示すことができる。またさらに時間差分における計算安定性に関しても言及しよう。

系に対して入力がない場合は平衡点 $\mathbf{0}$ である。一般に入力がある場合も平衡点がそれ以外にずれていくものと考え(7-6)式右辺の第一項の線型変換

$$\phi(\Delta t) = \prod_{i=1}^n P_i e^{\alpha_i \Delta t} = \exp(\Delta t \cdot C^*) \quad \dots\dots\dots(9-1)$$

によって逐次解が進んでいく場合に解が $\mathbf{0}$ 点に収束することを証明すればよい。 C^* は正則であるから C^* の n 本の線型独立な固有ベクトルの線型結合によって任意の初期温度ベクトル $\mathbf{T}(0)$ はあらわされる。

$$\mathbf{T}(0) = a_1 \mathbf{p}_1 + a_2 \mathbf{p}_2 + \dots + a_n \mathbf{p}_n \quad (a_1, \dots, a_n \text{ は少なくとも1つは0でない定数}) \quad \dots\dots\dots(9-2)$$

さらに Δt 時間進んだ解 $\mathbf{T}(\Delta t)$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\Delta t) &= a_1 \phi(\Delta t) \mathbf{p}_1 + \dots + a_n \phi(\Delta t) \mathbf{p}_n \\ &= a_1 e^{\alpha_1 \Delta t} \mathbf{p}_1 + \dots + a_n e^{\alpha_n \Delta t} \mathbf{p}_n \quad \dots\dots\dots(9-3) \end{aligned}$$

何んとならば前述の正則変換行列 P により

$$\phi(\Delta t) = \exp(\Delta t C^*) = P(\delta_{ij} e^{\alpha_i \Delta t}) P^{-1} \quad \dots\dots\dots(9-4)$$

であるから $\phi(\Delta t)$ の固有値は $e^{\alpha_i \Delta t}$ でそれに対する固有ベクトルは $\mathbf{p}_i (i=1, \dots, n)$ であるからである。

同様に逐次解を進めていけば $k\Delta t$ 時の解は

$$\mathbf{T}(k\Delta t) = a_1 e^{k\alpha_1 \Delta t} \mathbf{p}_1 + \dots + a_n e^{k\alpha_n \Delta t} \mathbf{p}_n \quad \dots\dots\dots(9-5)$$

となる。しかるに α_i は実負であったから $k \rightarrow \infty$ のとき解は $\mathbf{0}$ に収束することが証明された。

一方、同じ手順で解を進めていく時間差分も一種の時間積分であるが、近似解であるがゆえにやり方によっては計算安定でない場合も起る。陽解法は空間的、時間的離散化に対して条件をつけなければ計算安定とはいえず陰解法(クランク・ニコルソン・スキーム)は無条件に安定である。

(2-1)式は空間離散化系の一般式であるが、時間的単段型の陽解法とは(2-2)を

$$(\mathbf{T}_k - \mathbf{T}_{k-1})/\Delta t = C^* \mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{F}_{k-1} \quad \dots\dots\dots(9-6)$$

と時間差分化したものである。これから前と同様に系が自由状態にあるときの計算安定性を調べるため

$$\mathbf{T}_k = (E + \Delta t C^*) \mathbf{T}_{k-1} + \Delta t \mathbf{F}_{k-1} \quad \dots\dots\dots(9-7)$$

と変形した際の線型変換

$$Ae = E + \Delta t C^* \quad \dots\dots\dots(9-8)$$

の固有構造を調べる。

Ae に関し任意の固有値 β , それに対応する固有ベクトルを \mathbf{x} とし \mathbf{x} の最大要素を x_m とする。すなわち

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n) = x_m \quad \dots\dots\dots(9-9)$$

$Ae\mathbf{x} = \beta\mathbf{x}$ の m 行から

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{mc_{pm}} C_{1m} x_1 + \dots + \left(1 - \frac{\Delta t}{mc_{pm}} \sum_{i=1}^{n+n_0} C_{im}\right) \cdot x_m \\ + \dots + \frac{\Delta t}{mc_{pm}} C_{nm} x_n = \beta x_m \quad \dots\dots\dots(9-10) \end{aligned}$$

$$\therefore 1 - \frac{\Delta t}{mc_{pm}} \sum_{i=n+1}^{n+n_0} C_{im} > \beta \quad \dots\dots\dots(9-11)$$

ところで(9-2)と同様に初期値を

$$\mathbf{T}(0) = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + \dots + a_n \mathbf{x}_n \quad \dots\dots\dots(9-12)$$

とあらわしたとき、 $k\Delta t$ 時には

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(k\Delta t) &= a_1 \beta_1^k \mathbf{x}_1 + a_2 \beta_2^k \mathbf{x}_2 + \dots + a_n \beta_n^k \mathbf{x}_n \\ &\quad \dots\dots\dots(9-13) \end{aligned}$$

となる。従って(9-11)の条件かつ $\beta > -1$ の条件が成立しなければ計算は安定に行なわれない。そこで Ae を非負行列にとればその性質として Ae が非負の実固有値をもちそのうち最大のものをフロベニウスの根と呼んで他の固有値の絶対値はフロベニウスの根を越えないことがわかっているから $\beta > -1$ の条件をみたすことができる。

すなわち陽解法の計算安定条件とは Ae の対角要素が非負であること

$$1 - \frac{\Delta t}{mc_{pj}} \sum_{i=1}^{n+n_0} C_{ij} \geq 0 (j=1 \sim n) \quad \dots\dots\dots(9-14)$$

である。

単段型の陰解法とは(2-2)から

$$(\mathbf{T}_k - \mathbf{T}_{k-1})/\Delta t = C^* \mathbf{T}_k + \mathbf{F}_k \quad \dots\dots\dots(9-15)$$

逐次の得られる解は

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k &= (E - \Delta t C^*)^{-1} \mathbf{T}_{k-1} + (E - \Delta t C^*)^{-1} \Delta t \mathbf{F}_k \\ &\quad \dots\dots\dots(9-16) \end{aligned}$$

そこで陰解法の線型変換 A_i を

$$A_i = (E - \Delta t C^*)^{-1} \quad \dots\dots\dots(9-17)$$

とおき、ある行列の逆行列の固有値はその行列の固有値の逆数に等しいことをもちい、 A_i^{-1} について固有構造を同様の手順で調べると固有値は1より大であることが容易にわかる。したがって A_i の固有値はすべて0から1の間にあり、無条件に計算安定であることが証明された。

はじめに、において時間差分は推移行列の展開式(2-15)の第二項までをその線型変換として用いているためそれ以降の項の無視分により誤差が避けられないと述べたが今それが具体的に説明される。

Ae に関しては(9-8)式によってそれが示されるし A_i に関しても

$$\phi(\Delta t)^{-1} = (\exp(\Delta t C^*))^{-1} = \exp(-\Delta t C^*)$$

$$= E - \frac{dt}{1!} C^* + \frac{dt^2}{2!} C^{*2} - \frac{dt^3}{3!} C^{*3} + \dots \quad (9-18)$$

と考えることによってそれが示される。陽、陰とも近似度は同じである。

10. 具体例

系を集中定数化した離散値系でとらえる限り、それによる誤差はまぬがれないのであって壁体を多くの節点によって連続したものに近づけようとするのは本来の当手法の目的からはずれていくことになる。我々はそうではなくマッシュな各部位において必要精度を保ちながらいかに節点を減らすことができるか、そうしてうまく建築物全体を表現しようかという方向に進むべきだと考える。しかしながらここではよく引き合いに出される壁体についてシミュレーションの具体例を挙げておこう。

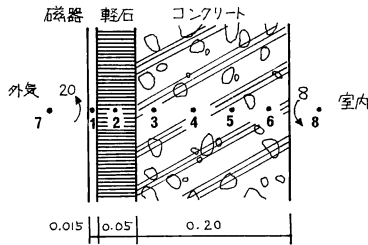


Fig. 2 壁体 Wall Section.

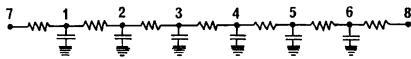


Fig. 3 壁体の熱回路 Wall Thermal Network.

Table 1 系の熱的性質 Thermal Property.

	熱伝導率	比熱	比重
磁器	0.13	0.19	1000
軽石	0.21	0.24	500
コンクリート	1.00	0.21	2000

Table 2 熱コンダクタンス Heat Conductance. (all reversible)

C ₁₂	C ₂₃	C ₃₄	C ₄₅	C ₅₆
5.658	8.400	20.00	20.00	20.00
C ₇₁	C ₈₆			
9.286	6.667			

Table 3 熱容量 Heat Capacity.

mC _{p1}	mC _{p2}	mC _{p3}	mC _{p4}	mC _{p5}
2.85	6.00	21.00	2100	21.00
mC _{p6}				
21.00				

(1) 計算対象

計算は差分法によるものと比較を行った。対象とする系は Fig. 2 に示すような壁体であり、熱回路図は Fig. 3 のようになる。系の熱的な性質は Table 1 のとおりである。外部側総合熱伝達率は 20 kcal/m²h°C、室内側は 8 kcal/m²h°C とした。

簡単な筆算により Table 2, 3 のコンダクタンスと熱容量を得る。

入力ベクトルを構成する日射熱入力、外気温、室温はサインカーブ又は定数で与え、もとの時間関数は次の形と仮定した。当数値積分法においてはこれを一時

Table 4 固有値 Eigenvalues

α ₁	α ₂	α ₃	α ₄	α ₅	α ₆
-0.6817E+00	-0.2400E+01	-0.9247E-01	-0.1696E+01	-0.3343E+01	-0.5806E+01

Table 5 固有ベクトル Eigenvectors.

P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
-0.2365E+00	0.4823E+00	0.1413E+00	0.4260E+00	0.2485E+00	0.9618E+00
-1.4537E+00	0.6929E+00	0.3678E+00	0.7612E+00	0.2380E+00	-0.2774E+00
-0.4614E+00	-0.3529E+00	0.4095E+00	-0.4475E+01	-0.3373E+00	0.7591E-01
-0.1128E+00	0.9771E-01	0.9716E+00	-0.3631E+00	0.0050E+00	-0.6767E-02
0.1366E+00	0.3702E+00	0.4583E+00	-0.1399E+00	-0.5760E+00	0.1740E-02
0.5450E+00	-0.2546E+00	0.3707E+00	0.3125E+00	0.2647E+00	-0.3618E-03

Table 6 射影子 Projection Operators.

P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
0.9766E-02	0.4858E-01	0.1514E+00	0.3569E-01	-0.1059E+00	-0.1715E+00
0.2407E-01	0.1112E+00	0.3401E+00	0.4152E-01	-0.2431E+00	-0.3560E+00
0.2075E-01	0.3966E-01	0.3110E+00	0.7283E-01	-0.2174E+00	-0.3571E+00
0.4817E-02	-0.2329E-01	0.7283E-01	0.1706E-01	-0.5093E-01	-0.8246E-01
-0.1437E-01	-0.6052E-01	-0.2174E+00	-0.5093E-01	0.1920E+00	0.2642E+00
-0.2127E-01	-0.1128E+00	-0.1515E+00	-0.8246E-01	0.2662E+00	0.3986E+00
P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	
1.6836E-01	0.2093E+00	-0.3716E+00	0.1022E+00	0.3185E+00	-0.2681E+00
0.9801E-01	0.2972E+00	0.5322E+00	0.1474E+00	0.4556E+00	-0.3361E+00
-0.5644E-01	-0.1521E+00	0.2713E+00	0.7524E-01	-0.2326E+00	0.1961E+00
0.1397E-01	0.4211E-01	-0.7526E-01	0.2086E-01	0.6443E-01	-0.5431E-01
0.4316E-01	0.1392E+00	-0.2326E+00	0.6643E+00	0.1492E+00	-0.1679E+00
-0.3635E-01	-0.1059E+00	0.1961E+00	-0.3635E-01	-0.1679E+00	0.1614E+00
P ₃	P ₄	P ₅	P ₆		
0.3155E-02	0.1677E-01	0.7934E-01	0.4022E-01	0.7333E-01	0.5931E-01
0.7465E-02	0.4364E-01	0.2750E+00	0.2081E+00	0.1932E+00	0.1339E+00
0.1677E-01	0.5980E-01	0.2774E+00	0.2025E+00	0.2566E+00	0.2074E+00
0.1783E-01	0.5947E-01	0.2805E+00	0.2837E+00	0.2593E+00	0.2798E+00
0.9051E-02	0.5436E-01	0.2566E+00	0.2593E+00	0.2371E+00	0.1918E+00
0.4050E-02	0.4397E-01	0.2074E+00	0.2093E+00	0.1918E+00	0.1551E+00
P ₄	P ₅	P ₆			
0.5793E-01	0.2155E+00	0.6435E-01	-0.3605E+00	-0.1388E+00	0.3101E+00
0.1024E+00	0.3858E+00	0.1148E+00	-0.6084E+00	-0.2480E+00	0.5541E+00
0.8135E-00	0.3293E-01	0.9759E-02	-0.5173E-01	-0.2109E-01	0.4711E-01
-0.4421E-01	-0.1738E+00	-0.5173E-01	0.2742E+00	0.1118E+00	-0.2497E+00
-0.1884E-01	-0.7076E-01	-0.2109E-01	0.1118E+00	0.4557E-01	-0.1018E+00
0.4208E-01	0.1583E+00	0.4711E-01	-0.2497E+00	-0.1018E+00	0.2274E+00
P ₅	P ₆				
0.9466E-02	0.1852E-01	-0.9247E-01	0.1659E+00	-0.1580E+00	0.7259E-01
0.8797E-02	0.1789E-01	-0.8860E-01	0.1589E+00	-0.1513E+00	0.6950E-01
-0.1259E-01	-0.2531E-01	0.1259E+00	-0.2252E+00	0.2144E+00	-0.9852E-01
0.2242E-01	0.4035E-01	-0.2252E+00	0.4039E+00	-0.3845E+00	0.1767E+00
-0.2184E-01	-0.4392E-01	0.2184E+00	-0.3845E+00	0.3845E+00	-0.1689E+00
0.9851E-01	0.1986E-01	-0.9851E-01	0.1767E+00	-0.1682E+00	0.7730E-01
P ₆					
0.8613E+00	-0.5076E+00	0.1490E+00	-0.4402E-01	0.1133E-01	-0.2379E-02
0.2411E+00	-0.1438E-01	-0.4478E-01	0.1247E-01	-0.3209E-02	0.6731E-03
0.2294E-01	-0.1368E-01	-0.2184E+00	-0.1186E+00	0.3061E+00	-0.6070E-04
-0.5974E-02	0.3563E-02	-0.1186E-02	0.3090E-03	-0.7949E-04	0.1669E-04
0.1538E-02	-0.9148E-03	0.3052E-03	-0.7949E-04	0.2044E-04	-0.4288E-05
-0.3728E-03	0.1925E-03	-0.1408E-04	0.1669E-04	-0.4284E-05	0.8993E-06

間隔毎の点を結ぶ折線としてとらえ差分法においてはステップ状にとらえる。

日射熱入力

$$HG_1(t) = \frac{1}{2} \left[500 \right]$$

$$\sin\left(\frac{t}{12}\pi\right) + 500$$

$$\sin\left(\frac{t}{12}\pi\right) \dots\dots\dots (10-1)$$

外気温は

$$T_1(t) = 5 \sin\left(\frac{t}{12}\pi\right) \dots\dots\dots (10-2)$$

室温は

$$T_8(t) = 20.0 \dots\dots\dots (10-3)$$

とする。

(2) 計算結果

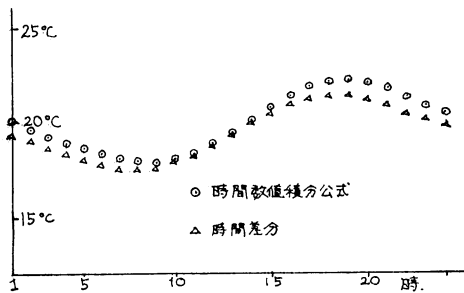
Table 4 には各固有値を、Table 5 にはそれらに対応する固有ベクトルを載せる。固有ベクトルは正規化されていない段階のものをとってある。Table 6 には射影子を全要素にわたって載せる。Table 7 は (7-4)、(7-5) の係数である。

次に室内側節点 6 番の温度変化をグラフ 1 に両者比較して載せる。差分の方に関しては十分な周期定常に達した部分を、当時間数値積分に関しても初期値の仮定を避けるため十分な周期定常に達した部分をとりだしてある。

グラフ 2 には参考として推移行列 (6,6) 要素と (6,1) 要素の時間変化をとりだしてえがいてみた。

11. 結 論

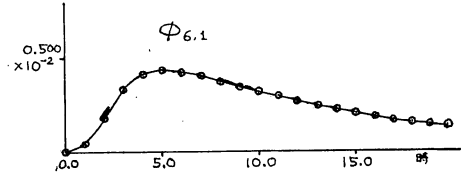
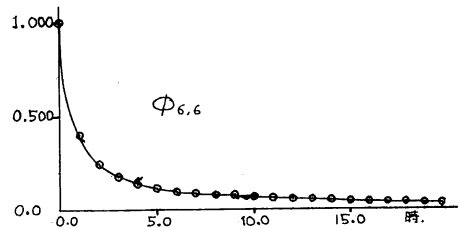
このような熱回路網による建築物熱系のとらえ方はそのシステム動特性を解明しうる推移行列を導入するのにきわめて有力であること、及び推移行列は射影分解によ



グラフ 1 室内側節点の温度

Table 7 時間積分公式係数 Numerical Time Integration Factors.

i	a _{io}	a _{ii}
1	0.3210E+00	0.4034E+00
2	0.1201E+00	0.2588E+00
3	0.4702E+00	0.4889E+00
4	0.1737E+00	0.3057E+00
5	0.7575E-01	0.2129E+00
6	0.2908E-01	0.1477E+00



グラフ 2 推移行列要素の変化

り指数関数に関し陽な形で記述でき、それゆえ時間軸方向に関して厳密解を与えるデュアメル積分を数値積分できる一つの公式(スキーム)を示した。

もし狭義のいわゆる重み係数を求めようとする場合は入力を受ける節点に対して(7-6)式によって単位三角パルスを入力を与え応答をみようとすると節点の数値的応答時系列をアウトプットすればよい。

また(7-6)式からたまたみ込み計算形式の解式を導くこともできるが、それは系を構成する総節点数に対し入力を受ける節点数がきわめて少ない場合にはより効率的な計算法になるであろう。

12. おわりに

この報告を作るにあたって良い場を与えて下さった官路研究主任、数学上のアドバイスを与えて下さった清水達雄先生に感謝いたします。また有意義な議論をたたかわした同輩の清川君にも謝意を表する次第です。

参考文 献

- 1) 線型代数入門 斎藤正彦著
- 2) Jordan 標準形と単因子論 II 杉浦光太著
- 3) 木村・奥山「熱回路数値解析法による自然空調に関する研究」昭和 51 年日本建築学会大会学術講演梗概集
- 4) Julius T. Tou: Modern Control Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- 5) 建築設備基礎理論演習 木村建一著
- 6) 荒谷・絵内「逐次積分法の応用 1・4」昭和 44・47 年日本建築学会大会学術講演梗概集
- 7) 浦野・渡辺・三木「逐次状態遷移法による多層壁体伝熱問題の近似解法 1・2」昭和 52 年日本建築学会大会学術講演梗概集
- 8) "Modeling of Solar Heating and Air Conditioning", Solar Energy Laboratory University of Wisconsin Madison 31 Jan., 1973

TEMPERATURE TRANSITION MATRIX AND NUMERICAL TIME INTEGRATION SCHEME BY SPECTRAL RESOLUTION FOR ANALYSIS OF BUILDING THERMAL NETWORK SYSTEM

By Hiroyasu Okuyama and Ken-ichi Kimura
Members of A.I.J.

Conventional calculating methods such as response factors method require a process to unify the various thermal response functions that converge in time domain into the whole system, essentially holding complexity in construction of calculation.

For simple and practical analysis on the building thermal performance, the real building thermal system is translated into the thermal network by discretizing continuous variables and regarding node temperatures as state variables. In this model the transition matrix, which is considered effective for analyzing and solving problems on building thermal process dynamics, is introduced here.

The nature of the thermal system is expressed by the vector matrix ordinary differential equation (2-1) and the solution is derived in the form of Duhamel's time integration of multi-node system as shown in eq. (2-23).

Matrix exponential mapping as expressed in eq. (2-24) is called Temperature Transition matrix. The transition matrix reflects all building thermal process dynamics, and this matrix can be expanded by projection operator matrices into an explicit form of exponential functions of eigenvalue and time, as shown in eq. (6-5).

The eigenvalues are proved to be real and negative as shown in Section 4 and consequently stability of numerical time integration is assured. The time integration is converted into the form of numerical integration by the recurrence formula as expressed in eq. (7-6) and progresses with the time increase.

This solution gives the precise and correct values with the time coordinate for excitation vector time function as in eq. (7-1), but some precision errors with space coordinates caused by discretizing continuous variables cannot be avoided. In spite of this disadvantage, the great advantage of this method could be evaluated in view of the possibility in grasping the thermal behavior of the total system concerned in a unified manner.