4256

日本建築学会大会学術講演梗概集
(北　陸)　昭和58年9月

一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論

正会員　奥山　博康*

1. はじめに　伝導と移流による一般拡散システムは回路網の概念により明快に状態方程式記述ができ，その数学的特性の証明もできる。これまではそのシステムパラメーターは何らかの空間離散化の手法によって演繹的に得られることを前提にし，射影分解にもとづく解析的時間積分によって状態値を得ること，すなわちシミュレーションについて論じてきた。本梗概においては逆に状態値は観測から得られることを前提にし，これからシステムパラメーターを求めること，すなわち同定法について論ずる。

2. 一般拡散システムの状態方程式　一般化コンダクタンスは伝導と移流を含むものとする。するとi，j節点間について伝導のみのコンダクタンスは $c_{ij}=c_{ji}$ なる対称性を持つ。また移流のコンダクタンスはiからj節点へ流量qで流れているとすれば $c_{ij}=q$，$c_{ji}=0$ なる非対称性を持つ。また m_{jj} をj節点の容量，x_i, x_j はそれぞれi，j節点の状態値，g_i を全部で n_g 個あるうちのi番自由入力発生源の発生量，r_{ij} を g_i からj節点への入力率とすると(1)のj節点方程式が成立つ。さらに $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ を状態ベクトル，$\boldsymbol{x}_0={}^t(x_{n+1},\cdots,x_{n+n_0})$ を固定入力ベクトル，$\boldsymbol{g}={}^t(g_1,\cdots,g_{ng})$ を自由入力ベクトルとすれば，(1)式から(2)の状態方程式が直ちに構成される。

$$m_{jj}\cdot\dot{x}_j=\sum_{i=1}^{n+n_0}c_{ij}\cdot x_i-\sum_{i=1}^{n+n_0}c_{ji}\cdot x_j+\sum_{i=1}^{ng}r_{ij}\cdot g_i\cdots\cdots\cdots(1)\qquad M\cdot\dot{\boldsymbol{x}}=C\cdot\boldsymbol{x}+C_0\cdot\boldsymbol{x}_0+R\cdot\boldsymbol{g}\cdots\cdots(2)$$

ここにnはシステムの次数であり，n_0 は外部の独立したシステムの次数である。以上により同定すべきシステムパラメーターとは m_{ij}，c_{ij}，r_{ij} であり，観測値は $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{g}$ となる。ただし m_{ij} はMのi行j列要素を表わす。

3. システムパラメーターの観測方程式　同定すべき m_{ij} を任意の要素順番でもつベクトルを $\boldsymbol{m}$，c_{ij} のそれを $\boldsymbol{c}$，r_{ij} のそれを $\boldsymbol{r}$ とする。$\boldsymbol{c}$ の要素間には質量保存則 $\sum_{i=1}^{n+n_0}c_{ij}=\sum_{i=1}^{n+n_0}c_{ji}$，あるいは伝導の対称性 $c_{ij}=c_{ji}$ の拘束式が存在するから，$\boldsymbol{c}$ の部分要素 $\boldsymbol{c}_m$ によって $\boldsymbol{c}=L\cdot\boldsymbol{c}_m$ なる従属関係が作られる。Lを $\boldsymbol{c}$ の縮小マトリクスと呼ぶことにする。まず(2)式において既知なシステムパラメーターによってできる要素は左辺に，残りは右辺に移項すると(3)式となる。これを $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{c}_m$，$\boldsymbol{r}$ について陽な形に変形すれば(4)式となり，簡潔に(5)式で表わせる。

$$\boldsymbol{y}(t)=-\tilde{M}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}+[\tilde{C},\tilde{C}_0]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}_0\end{bmatrix}+\tilde{R}\cdot\boldsymbol{g}\cdots\cdots(3)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=Z(t)\cdot\boldsymbol{a}\cdots\cdots(5)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t)&=D(\dot{x}_i)\cdot\boldsymbol{m}+X(x_i)\cdot L\cdot\boldsymbol{c}_m+G(g_i)\cdot\boldsymbol{r}\\&=[D(\dot{x}_i),X(x_i)\cdot L,G(g_i)]\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{c}_m\\ \boldsymbol{r}\end{bmatrix}\cdots\cdots(4)\end{aligned}$$

ただし $\tilde{}$ は既知なパラメーターが $\boldsymbol{y}(t)$ へ抜けていったあとのマトリクスを表わす。また $Z(t)=[D(\dot{x}_i),X(x_i)\cdot L,G(g_i)]$，$\boldsymbol{a}={}^t({}^t\boldsymbol{m},{}^t\boldsymbol{c}_m,{}^t\boldsymbol{r})$ とおいた。ここで $\boldsymbol{y}(t)$ を観測ベクトル，$Z(t)$ を観測マトリクス，(5)式をシステムパラメーター $\boldsymbol{a}$ の観測方程式と呼ぶことにする。

4. 現代最小二乗法によるシステムパラメーターの推定　観測方程式誤差 $\boldsymbol{e}(t)$ は(6)式で表わされる。このとき誤差 $\boldsymbol{e}(t)$ の評価関数を(7)式のように，[0,T]時間区間での $\boldsymbol{e}(t)$ の二次形式積分量で表わす。

$$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{y}(t)-Z(t)\cdot\boldsymbol{a}\cdots\cdots(6)\qquad J_S(\boldsymbol{a})=\int_0^T{}^t\boldsymbol{e}(t)\cdot W(t)\cdot\boldsymbol{e}(t)dt=\sum_{j=1}^{p}\int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t}{}^t\boldsymbol{e}(t)\cdot W(t)\cdot\boldsymbol{e}(t)dt\cdots\cdots(7)$$

ただし(7)式右辺は[0,T]を Δt でP分割したものである。またW(t)は不偏推定を与えるMarkov-Estimate[2)] にするための重みマトリクスである。決め方は後述する。(7)式を数値計算可能にするため差分化すると(8)式の近似評価関数が得られる。$J(\boldsymbol{a})$ を $\boldsymbol{a}$ に関し最小にする条件は(9)式であり，これを計算すれば(10)式の $\boldsymbol{a}$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{a}}$ が得られる。

$$J(\boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\Delta t^2}{}^t\boldsymbol{e}_j\cdot W_j\cdot\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\Delta t^2}{}^t(\boldsymbol{y}_j-Z_j\cdot\boldsymbol{a})\cdot W_j\cdot(\boldsymbol{y}_j-Z_j\boldsymbol{a})\cdots\cdots(8)\qquad\frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{a}}=0\cdots\cdots(9)$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\left(\sum_{j=1}^{p}{}^tZ_j\cdot W_j\cdot Z_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{p}{}^tZ_j\cdot W_j\cdot\boldsymbol{y}_j\right)\cdots\cdots(10)$$

State Equation of General Diffusion System Using Network Concepts and Theory of System Parameter Identification

OKUYAMA Hiroyasu

観測方程式誤差の分散共分散マトリクスΛ_0は(11)式となるから，重みマトリクスW_jは(12)式で与える。

$$\Lambda_0 = M\cdot \mathrm{diag}(\sigma_{xn}\cdot {}^t\sigma_{xn})\cdot {}^tM + [C, Co]\cdot \mathrm{diag}(\sigma_{xn+no}\cdot {}^t\sigma_{xn+no})\cdot {}^t[C, Co] + R\cdot \mathrm{diag}(\sigma_g\cdot {}^t\sigma_g)\cdot {}^tR \cdots\cdots (11) \quad W_j = \left[\int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} \Lambda_0 dt\right]^{-1} \cdots (12)$$

ここにx_iの観測誤差標準偏差をσ_{xi}，g_i のそれをσ_{gi} とすれば $\sigma_{xn} = {}^t(\sigma_{x1}, \cdots\cdots, \sigma_{xn})$，$\sigma_{xn+no} = {}^t(\sigma_{x1}, \cdots\cdots, \sigma_{xn+no})$，$\sigma_g = {}^t(\sigma_{g1}, \cdots\cdots, \sigma_{gng})$ である。(11)の誤差伝播構造は$\boldsymbol{a}$に左右されているから(10)式で一括同定する場合には繰り返し計算をする。

5. システムパラメーターの離散時間システム　いまAkを(13)式のように定義する。(13)式にHouseholder の逆行列公式を適用すれば(14)式を得る。

$$A_k^{-1} = \sum_{j=1}^{k} {}^tZ_j\cdot W_j\cdot Z_j = A_{k-1}^{-1} + {}^tZ_k\cdot W_k\cdot Z_k \cdots\cdots (13) \qquad A_k = A_{k-1} - A_{k-1}\cdot {}^tZ_k\cdot (W_k^{-1} + Z_k\cdot A_{k-1}\cdot {}^tZ_k)^{-1}\cdot Z_k\cdot A_{k-1} \cdots\cdots\cdots (14)$$

(14)式を用いて(10)式を変形すれば(15)式の$\boldsymbol{a}$に関する離散時間システム（Time Discrete System）が得られる。これは時変系（Time Varying System）である。ただし推移行列Φ_k，駆動行列B_kはそれぞれ(16)，(17)式となる。

$$\boldsymbol{a}_k = \Phi_k\cdot \boldsymbol{a}_{k-1} + B_k\cdot \boldsymbol{y}_k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

$$\Phi_k = E_a - A_{k-1}\cdot {}^tZ_k\cdot (W_k^{-1} + Z_k\cdot A_{k-1}\cdot {}^tZ_k)^{-1}\cdot Z_k \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

$$B_k = A_k\cdot {}^tZ_k\cdot W_k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

ここにE_aは$\boldsymbol{a}$のサイズの単位マトリクスである。また初期のA_0はE_aにおく。(15)，(14)，(16)と(17)式によって逐次同定を行なっていく場合はW_kは常に単位マトリクスにおく。この方法は$\boldsymbol{a}$が時変であっても追随できる。

6. 数値例　図１のようなトレーサーガスの拡散システムを考える。x_3は外気の濃度，g_1はガス発生量とする。この場合１，２チャンバには攪拌機がありm$_{ij}$は既知とすれば $\boldsymbol{y}(t) = {}^t(m_{11}\cdot\dot{x}_1, m_{22}\cdot\dot{x}_2)$ であり，$\boldsymbol{a}$を(18)式のように定義するとき Z(t)は(19)式のようになる。

$$\boldsymbol{a} = {}^t(c_{23}, c_{13}, c_{32}, c_{12}, c_{31}, c_{21}, r_{11}, r_{12}) \cdots\cdots (18)$$

$$Z(t) = (X, G) = \left[\begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 0 & -x_1 & x_3 & x_2 \\ -x_2 & 0 & x_3 & x_1 & 0 & -x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix}\right] \cdots (19)$$

観測値は入力直線補間の時間積分公式[1)]によって作られる状態値のシミュレーション結果と入力値に正規分布のノイズを加えて図2，3のように得た。その際に仮定したシステムパラメーターを表１に，計算して得られた固有値と固有ベクトルを表２に示す。本論の同定理論の実践を試みた結果を表３に示す。１列目は仮りにノイズを持たない観測値を用いた場合の(15)式による逐次同定の結果である。２列目以降は全てノイズを持つ観測値を用いたもので，２列目はW_jを単位マトリクスにおいた(10)式による一括同定，３列目はW_jを(12)式においた重みつき一括同定，４列目は(15)式による逐次同定の結果である。この最後の方法においてC_{12}，C_{23}に注目し，同定結果の推移を図４に示す。

7. 結論　伝導と移流による一般拡散システムを回路網の概念により状態方程式記述したが，そのシステムパラメーター同定法として，現代最小二乗法から演繹し，一括同定と逐次同定の二つの理論とアルゴリズムを提示した。

表1. 仮定したシステムパラメーター

m_{11}	m_{22}	c_{23}	c_{13}	c_{32}
50	100	8	2	3
c_{12}	c_{31}	c_{21}	r_{11}	r_{12}
10	7	5	0.2	0.5

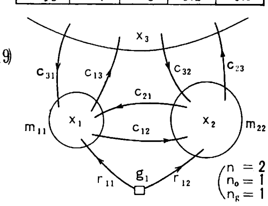

図1. トレーサーガスの拡散システム

表2. 固有値と固有ベクトル

α_1	α_2	P_1	P_2
-0.0709	-0.299	0.509 0.861	0.861 -0.509

表3. 同定結果

Method / S. Parm	1 Sequential (NoiseFree)	2 One Step	3 One Step (Weighted)	4 Sequential
C_{23}	7.91	9.72	9.66	9.67
C_{13}	2.10	-0.0273	0.00216	0.0252
C_{32}	3.00	2.57	2.57	2.57
C_{12}	10.1	11.6	11.5	11.5
C_{31}	7.01	6.83	6.82	6.83
C_{21}	5.18	4.55	4.55	4.56
r_{11}	0.202	0.279	0.263	0.279
r_{12}	0.499	0.534	0.534	0.534

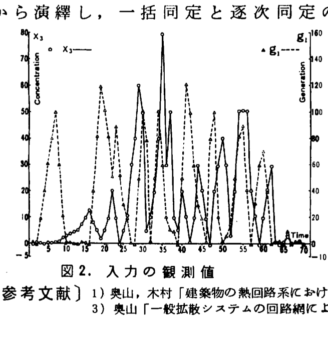

図2. 入力の観測値

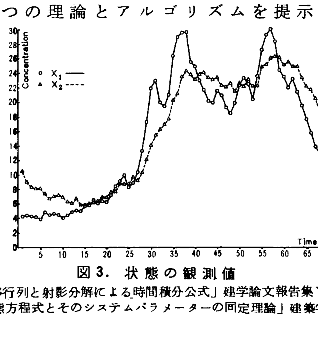

図3. 状態の観測値

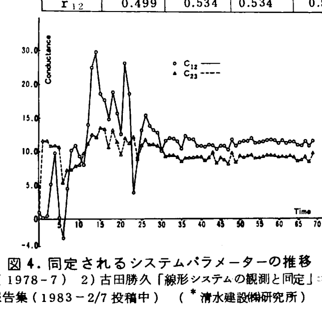

図4. 同定されるシステムパラメーターの推移

〔参考文献〕 1) 奥山，木村「建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間積分公式」建学論文報告集Vol.269（1978-7） 2) 古田勝久「線形システムの観測と同定」コロナ社 3) 奥山「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論」建築学会論文報告集（1983-2/7 投稿中）

（*清水建設㈱研究所）