4329

日本建築学会大会学術講演梗概集
（関　東）　昭和59年10月

一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論
（その2：有限要素法によるシステムパラメーターの逆探問題への適用）

正会員　奥山博康

1. はじめに　伝導と物質移動による一般拡散系をシステム理論[5]における線型の状態方程式でモデル化する場合，本回路網の定式化法がその骨格を構成する方法として有効なこと，さらにこの状態方程式中のシステムパラメーターを同定する理論のアルゴリズム化においても有効であることを報じてきた。[1] 本梗概では有限要素法においていわゆる「全体の有限要素式」と呼ばれるものがどのように状態方程式に対応するかを示し，このシミュレーションにも本時間積分法[3]が適用できること，またこのシステムパラメーターの逆探問題にも本同定理論[1]が適用できることを示すものである。なおマトリクス内の要素記法との整合性を考え，今後は一般化（拡張）コンダクタンス[4] c_{ij} と入力率[4] r_{ij} の持つ方向性を j から i へ向かうものとして定義を改めることにする。

2. 有限要素法と状態方程式　一般的な拡散系は既報[1]で述べたように(1)の状態方程式で近似される。ここに $\boldsymbol{x}_{(n)}$ は状態ベクトル，$\boldsymbol{x}_o(n_o)$ は固定（規定）入力ベクトル，$\boldsymbol{g}(n_g)$ は自由入力ベクトル，$M\,(n\times n)$ は容量マトリクス，$C\,(n\times n)$ は一般化（拡張）コンダクタンスマトリクス，$C_o(n\times n_o)$，$R\,(n\times n_g)$ は入力マトリクスである。一方，2次元の伝熱系を記述する偏微分方程式をガレルキン法によって離散化する場合は(1)式のそれぞれのマトリクスは次の(2)〜(5)式で計算される。ここに三角形要素をとるとすれば N_e（1×3）は e 番要素における3個の形状関数を要素にもつ行マトリクスである。また $\overset{*}{\sum_e}$ は全要素にわたり重ね合わせることを表わす。c_{pe}，γ_e と λ_e はそれぞれ e 番要素の比熱，比重と熱伝導率，α_{ej} は要素 e のある辺が外部節点 j と対流熱伝達で接するときの伝達率，a_{ej} は要素 e のある辺が g_j の日射成分の受熱をするときの吸収率である。v_e は要素 e の空間積分領域，s_e は要素 e がもし対流熱伝達面あるいは日射受熱面に接するとき，その境界面積分領域を表わす。

$$M\cdot\dot{\boldsymbol{x}} = C\cdot\boldsymbol{x} + C_o\cdot\boldsymbol{x}_o + R\cdot\boldsymbol{g} \quad\cdots\cdots(1)\qquad M = \overset{*}{\sum_e}\int_{v_e} c_{pe}\cdot\gamma_e\cdot{}^tN_e\cdot N_e\,dv \quad\cdots\cdots(2)$$

$$C = -\overset{*}{\sum_e}\int_{v_e}\lambda_e\cdot\left(\frac{\partial\,{}^tN_e}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_e}{\partial x} + \frac{\partial\,{}^tN_e}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_e}{\partial y}\right)dv - \overset{*}{\sum_e}\sum_j\int_{s_e}\alpha_{ej}\cdot{}^tN_e\cdot N_e\,ds \quad\cdots\cdots(3)$$

$$C_o = \left[\overset{*}{\sum_e}\int_{s_e}\alpha_{e,n+1}\cdot{}^tN_e\,ds,\cdots\cdots,\overset{*}{\sum_e}\int_{s_e}\alpha_{e,n+n_o}\cdot{}^tN_e\,ds\right]\cdots\cdots(4)\qquad R = \left[\overset{*}{\sum_e}\int_{s_e}a_{e,1}\cdot{}^tN_e\,ds,\ \cdots\cdots,\overset{*}{\sum_e}\int_{s_e}a_{e,n_g}\cdot{}^tN_e\,ds\right]\cdots\cdots(5)$$

3. システムパラメーターとシミュレーション　ガレルキン法によってシステムパラメーター m_{ij}，c_{ij}，r_{ij} を計算したのは図1のような垂直南向の異形壁断面である。与えた物性値は表1に示す。(2)式で得られた M の要素 m_{ij} を表2に示す。マトリクス $C_{n+n_o}=\left[\begin{array}{c|c} C & C_o \\ \hline {}^tC_o & O\end{array}\right]$ の要素 c_{ij} は(3)，(4)式で表3のように得られた。ただし C の対角要素は C_{n+n_o} のその行の他の全ての要素の総和の符号を変えたものとしても得られ，コンダクタンスとしてのパラメーターとは見なさない。また R の要素 r_{ij} は南向の日射座標成分 g_1 に対するものとして(5)式から表4のように計算された。状態方程式への入力値として，外気温と日射量は空調学会の動的熱負荷計算用の気象データを，室温には正弦波を用いた。状態方程式の固有値解析をした後，シミュレーションは射影分解による解析的時間積分法[3]により $\Delta t=0.1\,hr$ で行った。得られた状態値は入力値とともに次の同定解析のためディスクに書込んだ。

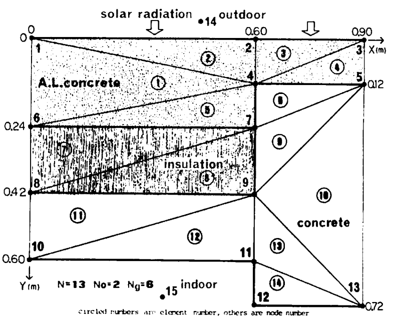

図1. 異形壁断面

(A.L.: Artificial Lightened)

表1. 物性値

	λ (kcal/mh°c)	cp (kcal/kg°c)	γ (kg/m³)	α (kcal/m²h°c)	a (−)
A.L.Concrete	0.12	0.21	362.0	20.0	0.5
Insulation	0.03	0.24	28.5		
Concrete	1.20	0.21	2300.0	8.0	

4329

State Equation of General Diffusion System Using Network Concepts and Theory of System Parameter Identification (Part II: Application of the Theory to Inverse Problem for System Parameter by FEM)

OKUYAMA Hiroyasu

4. 同定解析（逆探問題）　　ディスクから読み取った状態値と入力値を観測値として既報[1)]で述べた一括同定と逐次同定を実行した。既知パラメーターとしては65個全てのm_{ij}をとり，c_{ij}とr_{ij}の計63個のパラメーターを同定した。(1)式を変形して得られる観測方程式[1)]を(6)とすれば一括同定は(7)式，逐次同定は(8)～(11)式で行なわれる。ここにkは時刻添字，pは観測ステップ総数，$\boldsymbol{y}_k$とZ_kは観測ベクトルとマトリクス，Φ_kはシステムパラメーターベクトル$\boldsymbol{a}$の推移マトリクス，A_kは推定誤差共分散マトリクスなどである。

$$\boldsymbol{y}_k = Z_k \cdot \boldsymbol{a} \quad \cdots\cdots (6) \qquad \hat{\boldsymbol{a}} = \left(\sum_{k=1}^{p} {}^tZ_k \cdot Z_k\right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} {}^tZ_k \cdot \boldsymbol{y}_k\right) \quad \cdots\cdots (7) \qquad \boldsymbol{a}_k = \Phi_k \cdot \boldsymbol{a}_{k-1} + B_k \cdot \boldsymbol{y}_k \quad \cdots\cdots (8)$$

$$A_k = A_{k-1} - A_{k-1} \cdot {}^tZ_k \cdot (E_n + Z_k \cdot A_{k-1} \cdot {}^tZ_k)^{-1} \cdot Z_k \cdot A_{k-1} \quad \cdots\cdots (9) \qquad B_k = A_k \cdot {}^tZ_k \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\Phi_k = E_a - A_{k-1} \cdot {}^tZ_k \cdot (E_n + Z_k \cdot A_{k-1} \cdot {}^tZ_k)^{-1} \cdot Z_k \quad \cdots\cdots (11) \qquad {}^t\boldsymbol{a} = ({}^t\boldsymbol{c}, {}^t\boldsymbol{r}) \quad \cdots\cdots (12)$$

c_{ij}のパラメーターの間には伝導の対称性と質量保存則による拘束式が存在することが先験的にわかっているから，既報で述べたように$\boldsymbol{c}$のサイズを縮小するマトリクスLが構成できる。こうして$\boldsymbol{c}$のサイズ60は30まで縮小された。従って$\boldsymbol{a}$は33のサイズですむ。まず一括同定を240ステップすなわち24hrの期間で行った結果を表5，6に示す。また逐次同定を720ステップまで行ったときのいくつかのシステムパラメーターの推移を図2，3に示す。ただし初期値は$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{o}$とした。図3で$r_{ij}$が同定されはじめるのは日射が出てからである。この場合の逐次同定は一括同定に比べかなり長い観測をしないと正解に近づかなかった。これは日射がない部分的な期間においてZ_k内に線型従属な$\boldsymbol{o}$の列ベクトルが生じ，推定に悪影響を及ぼすためであると考えられる。これに対し一括同定は${}^tZ_k \cdot Z_k$の総和を用いるから部分的な期間でもそれらが線型独立になっていればよいことになる。

5. 結論　　今回の数値実験によって次のことが確認された。(a)有限要素法にもシステム理論の考え方の導入は重要であり，その状態方程式の構造を明確にするため本回路網の概念は有用である。(b)有限要素法によって作られた状態方程式に対しても同様に本同定理論[1)]と時間積分法[3)]は適用できる。(c)同定するシステムパラメーターベクトルのサイズは先験的情報によりなるべく縮小することが精度上望ましい。(d)部分的な観測期間において観測マトリクス内に$\boldsymbol{o}$の従属な列ベクトルが生ずるような場合には逐次同定の適用は避けるべきである。

表2.　有限要素法により得られたmij（Mは対称なため左下要素は省略。ただし実際の総数65個）

M(1, 1)= 0.13684E+01	M(1, 2)= 0.22806E+00	M(1, 4)= 0.68418E+00	M(1, 6)= 0.45612E+00	M(2, 2)= 0.68418E+00	M(2, 3)= 0.11403E+00
M(2, 4)= 0.34209E+00	M(3, 3)= 0.45612E+00	M(3, 4)= 0.22806E+00	M(3, 5)= 0.11403E+00	M(4, 4)= 0.37296E+01	M(4, 5)= 0.83853E+00
M(4, 6)= 0.68418E+00	M(4, 7)= 0.95256E+00	M(5, 5)= 0.11096E+02	M(5, 7)= 0.18113E+01	M(5, 9)= 0.47092E+01	M(5,13)= 0.36225E+01
M(6, 6)= 0.14299E+01	M(6, 7)= 0.25884E+00	M(6, 8)= 0.30780E-01	M(7, 7)= 0.42017E+01	M(7, 8)= 0.61560E-01	M(7, 9)= 0.11175E+01
M(8, 8)= 0.44701E+01	M(8, 9)= 0.22043E+01	M(8, 10)= 0.21735E+01	M(9, 9)= 0.20348E+02	M(9,10)= 0.43470E+01	M(9,11)= 0.32603E+01
M(9,13)= 0.47092E+01	M(10, 10)= 0.86940E+01	M(10, 11)= 0.21735E+01	M(11, 11)= 0.79695E+01	M(11, 12)= 0.72450E+00	M(11, 13)= 0.18113E+01
M(12, 12)= 0.14490E+01	M(12, 13)= 0.72450E+00	M(13, 13)= 0.10868E+02			

表3.　有限要素法により得られたcij（Cは対称なため左下要素は省略，また対角要素は除く。ただし実際の総数60個）

C(1, 2)=-0.19880E+01	C(1, 4)= 0.12000E-01	C(1, 6)= 0.14400E+00	C(1,14)= 0.60000E+01	C(2, 3)=-0.97600E+00	C(2, 4)= 0.45000E+00
C(2,14)= 0.90000E+01	C(3, 5)= 0.15000E+00	C(3, 14)= 0.30000E+01	C(4, 5)= 0.26400E+00	C(4, 6)= 0.12000E-01	C(4, 7)= 0.18000E+01
C(5, 7)= 0.60000E+00	C(5, 9)= 0.36000E+00	C(5, 13)=-0.19868E-06	C(6, 7)= 0.16500E-01	C(6, 8)= 0.50000E-01	C(7, 9)= 0.14500E+01
C(8, 9)= 0.18450E+00	C(8, 10)= 0.20000E+01	C(9, 11)= 0.34000E+01	C(9,13)= 0.36000E+00	C(10, 11)=-0.62000E+00	C(10,15)= 0.24000E+01
C(11, 12)= 0.13400E+01	C(11, 13)= 0.60000E+00	C(11, 15)= 0.28800E+01	C(12, 13)=-0.16000E+00	C(12, 15)= 0.16800E+01	C(13,15)= 0.12000E+01

表5.　一括同定によるcijの推定結果（対称要素は省略）

C(1, 2)=-0.19948E+01	C(1, 4)= 0.13576E-01	C(1, 6)= 0.14344E+00	C(1,14)= 0.60061E+01	C(2, 3)=-0.96265E+00	C(2, 4)= 0.44924E+00
C(2, 14)= 0.89679E+01	C(3, 5)= 0.15046E+00	C(3, 14)= 0.29887E+01	C(4, 5)= 0.25934E+00	C(4, 6)= 0.12488E-01	C(4, 7)= 0.18111E+01
C(5, 7)= 0.61160E+00	C(5, 9)= 0.36077E+00	C(5, 13)=-0.23089E-02	C(6, 7)= 0.18491E-01	C(6, 8)= 0.52380E-01	C(7, 9)= 0.14685E+01
C(8, 9)= 0.17905E+00	C(8, 10)= 0.19979E+01	C(9, 11)= 0.33785E+01	C(9, 13)= 0.38249E+00	C(10, 11)=-0.60953E+00	C(10,15)= 0.23964E+01
C(11, 12)= 0.12993E+01	C(11, 13)= 0.56309E+00	C(11, 15)= 0.28751E+01	C(12, 13)=-0.13059E+00	C(12, 15)= 0.16819E+01	C(13,15)= 0.11930E+01

表4.　有限要素法により得られたrij（総数3個）

R(1, 1)= 0.15000E+00	R(2, 1)= 0.22500E+00	R(3, 1)= 0.75000E-01

表6.　一括同定によるrijの推定結果

R(1, 1)= 0.15012E+00	R(2, 1)= 0.22417E+00	R(3, 1)= 0.74715E-01

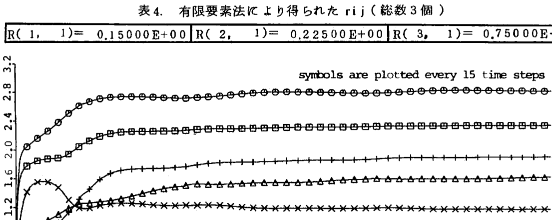

図2.　逐次同定によるCijの推移

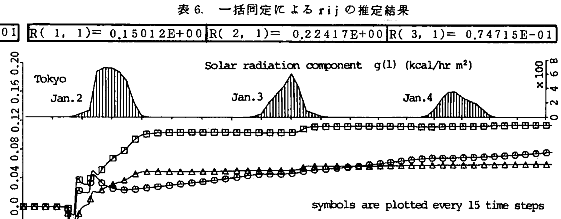

図3.　逐次同定によるrijの推移

〔参考文献〕 1) 奥山「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論」 建築学会学術講演梗概集，1983，p.511　2) 奥山「1)と同題」建築学会論文報告集，1983，2月7日投稿中　3) 奥山，木村「建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間数値積分公式」建築学会論文報告集，Vol. 269，1978，7月　4) 奥山「熱回路網によるシミュレーションの理論と応用」空・衛・学会学術講演論文集，1983，p. 541　5) 例えばZadeh & Polak「システム理論」（共立出版）（清水建設技術研究所）