

一般拡散システムの回路網による状態方程式と そのシステムパラメーターの同定理論

正 会 員 奥 山 博 康*

1. 序

建築環境工学においては拡散システムを扱う場合が多い。その拡散する状態変数は温度²⁾、湿度^{6),7)}、濃度、流速³⁾などである。そしてこれらの現象を電算機シミュレーションするときには、現実のシステムを容量を持つ節点とこれら節点間のコンダクタンスから成る近似モデルに置換え、それらの節点の状態変数のベクトルについて有限次元のベクトルマトリクス常微分方程式を立てて時間積分することに帰着させることが多い。領域型と広く分類される差分法、有限要素法などは本質的にはすべてこのようなことであり、その名称は有限次元に近似化するための空間離散化の方法に由来している。一方この方程式をシステム理論における状態方程式として統一的な視点から見ることが出来る。このときのシステムの数学的構造と特性を明らかにするには既報¹⁾で述べた回路網の概念による一般的な定式化が有効である。既報¹⁾においてはこのシステムパラメーターは何らかの空間離散化の手法から演繹的に得られることを前提にし、これから状態値を求めることを固有値解析に基づく射影分解による時間積分として論じた。今回は逆に状態値は観測から得られることを前提にし、これからシステムパラメーターを求めること、すなわち同定法について論ずる。既報¹⁾では伝導のみのシステムの特性を解明したが本論では物質移動も含んだ一般拡散システムを扱う。そこでまず本論の3でその特性を解明し、またシステムパラメーターの定義と意味も明らかにする。次に同定法は長い観測期間のあと一度に行なうものと、システムパラメーターに関する離散時間システムを作り、観測値を得る度ごとに逐次同定していくもの二通り作れることを述べる。さらにこの離散時間システムから可同定性と同定解への漸近安定性についても論ずる。また同定結果の信頼性の評価方法にも言及する。

2. 従来の成果と問題点

この同定法は空間的に離散化された近似システムについてのものであり、従って各節点の容量に対応する実現

象の体積内で状態変数が完全に拡散していると仮定される場合に最もよく適合する。このような仮定により現象が扱われるのは、環境工学においては多数室からなる家屋内での換気径路とこれらの風量の測定のためのトレーサーガスの拡散系である。この場合、各チャンパ内ではガスが完全に拡散すると仮定されている。そしてこのガスの拡散系を記述する数学モデルにおいてはチャンパ内のガス濃度が状態値、外気の濃度とガス発生量が入力値であるから、多数室間の風量はこの方程式中の係数すなわちパラメーターとなる。しかしこれらの風量というパラメーターを求めるため現状研究されている方法は S. J. I' Anson¹⁶⁾等によるチャンパ数だけの多種ガスを用いる方法である。この方法はガスの種類数が多くなってくれば測定装置として実現することが困難になってくる。またこのように換気系の構造の上には多種ガス濃度というように多種の状態値をのせることも可能ではあるが、例えばもし一般的に熱系について考えるとき、温度の拡散系の構造の上のせられる状態値は温度の1種類のみである。すなわち一般的にシステムパラメーターを求めるには本論で述べるタイプの同定法が必要になってくる。次に温度の拡散系については空間的に離散化された近似モデルとしての熱平衡系におけるシステムパラメーターの同定法を研究したのは D. V. Pryor¹⁷⁾等の文献があげられる。これは cylindrical water wall を蓄熱部材に用いているパッシブ・ソーラー・ハウスについてのものであり、温度測定の節点は室空気、water wall と外気の3点だけ、日射量も水平面全天日射量だけである。従って対応する数学モデルはかなり大きな空間離散化誤差を持つことになるにもかかわらず、同定されたパラメーターによる室温の計算値は実測値をかなりよくトレースできることが述べられている。これらの実例^{16),17)}により外気温や日射量のように低周波数の入力が入力する建物等の系においてはかなり大まかに空間離散化されたシステムのパラメーター同定法でもある程度の実用性をもって応用できる可能性がうかがえる。ところが当文献¹⁷⁾における同定法にはいくつか大きな問題点と改善すべき点があると考えられる。1つめにはそれぞれの節点方程式に別々に最小二乗法を適用しているため全体方程

* 清水建設(株)研究所・工修
(昭和58年2月7日原稿受理日, 昭和59年5月22日改訂原稿受理日,
討論期限昭和60年1月末日)

式が連成した状況での同定がなされていないということがある。すなわちある同一のパラメーターは同時に複数の節点方程式中に存在するが、これが同じものとして同定されないということである。本論文では全体方程式を状態方程式として連成した状況で扱うことによりこの問題を解決する。2つめは日射量の扱い方に関するものである。当文献¹⁷⁾では節点方程式に対する観測日射入力として有効日射量 (effective solar radiation at node (w/m^2)) と呼ぶものを計算して与えており、これに乗じられるところの同定するパラメーターは南面投影面積 (projected south facing area of node (m^2)) を節点熱容量 (thermal capacitance of node ($joul/^\circ C$)) で割ったものである。同定するパラメーターは日射の入射角変化などによって大きく変化する時変係数であってはならないことが線型性の仮定から要請されるから、そのかわり有効日射量にこの変化が考慮されなければならない。水平面全日射量の実際の観測値をもとにしてこの有効日射量を正確に算定するためには、受熱面の向きなどが先験的 (a priori) に既知であって、さらに透過率と吸収率あるいは影の面積などの入射角に依存する系の特性値が予測されなければならない。従って本来予測を含まない客観的な量とされるべき観測値がこれらの特性の予測値に左右されていることになる。そこでこれらの問題を解決するために日射吸熱量評価の別の方法を導入することができる。これは日射量を直交座標系における6方向の全日射成分として扱うことにもとづく。このような日射成分を定義すれば任意方向の受熱面がそれぞれの日射成分から吸熱する比率は入射角によらず時間的にも一定となる^{10) p.543}。また同定においては受熱面の向きなどが先験的に既知でなくてもよく、逆にこれらの比率が同定されればその向きを推定することも可能となる。この比率が本論3で定義するところの自由入力量に対する入力率と呼ぶパラメーターに相当し、各方向の日射成分は自由入力量に相当する。3つめは温度の時間による数値微分係数を観測値として用いていることであり、このような値は観測ノイズによって影響を受けやすいことはよく知られている。従って本論文ではかわりに時間積分値を用いる。さらに以上の環境工学において一般に言えることは、いまだシステム理論的概念の導入が遅れていることであり、例えば多数室換気測定の問題をシステムの同定問題としてとらえている例は皆無である。

一方、システム理論的概念の導入が最も進んでいる制御工学の現状においても同定に関する事柄を専門に扱っている著書は少ないが、例えば古田博士の著書¹³⁾の「おわりに」²²⁾に述べられていることを引用すれば次の問題点があげられる。1つめは単変数に関する同定法が中心であり、多変数系に関する有効な同定法がないことである^{同じく^{15), 19), 20)}}。すなわち単変数系で系の入出力関係を表

すには伝達関数あるいは荷重関数モデル^{13) p.149}をもちいることになるが、この場合その数学モデルが同定されても結局ブラックボックス^{定義^{13) p.149}}が得られるにすぎない。しかしより一般的には演繹的手法により得られる数学モデルと同質なモデル中のパラメーターが同定されること、つまりグレイボックス^{定義^{13) p.149}}中のパラメーター同定^{定義^{13) p.149}}が望ましい。本論文では多変数系を演繹のモデルに即した多次の状態方程式でグレイボックスとして表わし、そのパラメーター同定を行う方法について論じる。次に再び同著から引用し、あげられる2つめの問題点は同定結果の評価をどう定めるかについては未解決なことである^{13) p.223}。すなわちただ推定値の測定ノイズによる共分散マトリクスが与えられているのが現状である^{同じく^{15), 20)}}。そこで同定されて得られた数学モデルがどの程度の信頼性を持つのかを統計学的な定量的指標として定めておくことが望ましい。本論10, 11では推計学における回帰分析法で定めているいくつかの有意性検定指標を参考に、多次元多変数系にも適用できるように拡張し定義する。3つめには同定のために定義する方程式誤差の評価関数をどのように定式化するかである。現状では入力と出力の観測値を離散時間的に得ていくたびにこれらの要素によって構成されるベクトルとマトリクス (文献15) p.14ではそれぞれ Vector of observation, coefficient matrix of observation partialsと呼んでいる。)の行 (row)を増していく方法をとっているのが普通である^{同じく^{13), 19), 20)}}。このような定式化であると観測データを蓄積しておいて、あとから同定する場合 (本論文では一括同定と呼ぶ)に電算機の必要記憶領域が過大になったり、離散的観測間隔内における観測値の変動が評価関数に反映されない場合が出てくる。そこで本論文では観測方程式誤差の二次形式を時間積分した量を評価関数の基礎式とする。すなわちマトリクスの行を離散的に増していくのではなく時間方向に連続的に積分していく定式化をとる。従ってこの基礎式以後の演繹も行なう。4つめには同定結果が観測ノイズに影響されずに不偏性 (unbiasedness), 一貫性 (consistency) や有効性 (efficiency) などの^{21) p.177}良い性質を持つようにするために重み付き最小二乗法においてマルコフ推定を適用すればよいことは論じられているが^{13) p.203}、扱われている数学モデルに具体性が欠けるため、それに用いる重みマトリクスの作り方が述べられているものがないことである。重みマトリクスには観測方程式誤差の共分散マトリクスの逆マトリクスをとればよいが、本論文で扱う系においては回路網の定式化法によって観測ノイズから観測方程式誤差への誤差伝播構造を具体的に定式化できることから、その重みマトリクスを計算することができる。さらに robust 性^{14) p.163}をもたせるため Tukey の Bi-weight 法^{14) p.167}を多次元に拡張したものを付加する。5

つめには可同定性^{13) p. 174}の考察のためにパラメータのベクトルに関して入力を持つ離散時間システムを構成して議論している例がないことである。本論9ではその推移マトリクスの漸近安定性を考察することから可同定性をより明快に論じる。6つめとして最後にあげる問題点は実用的観点から最も重要である。制御工学においては、まず最初の問題であるモデリングに関する問題が割合に無視されていた、または注意を引かなかった面としてあげられる^{13) p. 3}。すなわちこの問題はとばし、抽象的な数学モデルを仮定したあとの問題だけが議論されてきた。しかしこのような同定の問題にしても電算機を用いずに解くことは不可能である以上、そのモデリングの方法やこれにもとづく同定の方法は具体的にアルゴリズムに直結し、かつどのような形態の系にも汎用的に対応できることが要求される。このようなアルゴリズムが出来てはじめて同定理論は実用的なものになると言える。そこで本論文では一般的な拡散システムを空間離散化した近似モデルに対してその汎用的な構成法と同定法を直ちにプログラミング可能な具体的定式化法で提示するが、これが本回路網の概念とその定式化法に基づくものなのである。

3. 状態方程式とその特性

回路網の概念とは、すべての部分は他のすべての部分とつながっていると考えることである。この概念に基づいて定式化するので物理的空間次元の1次元から3次元の対象も、さらに工学的に必要となってくる一般*n*次元対象もすべて同一の数式で記述できる。それゆえこの定式化を完全システム記述と呼ぶ。モデリングと同定のアルゴリズムにおいて完全な汎用性を実現できるようになる理由はここにある。いま本論文で扱う一般拡散システムの近似モデルにおいては空間的に離散化して得られたある1つの部分を代表する*i*番節点において次式に示すような保存則が節点方程式として成り立つ。

$$m_{ii} \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot x_j - \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ji} \cdot x_i + g_{di} \dots \dots \dots (1)$$

ここに m_{ii} は *i* 節点の容量、 x_i , x_j はそれぞれ *i*, *j* 節点における状態変数、 c_{ij} は *j* から *i* 節点へ向かう一般化コンダクタンスである。以下に断らない限り、省略してコンダクタンスと呼ぶことにする。 g_{di} は *i* 節点への直接入力量である。*n* はシステムの次数であり、 n_0 は外部システムの次数である。従って $n+1$ から $n+n_0$ の節点は独立した状態量を持ち入力となる。伝導のみのコンダクタンスは対称性を持ち c_{ij} と c_{ji} は等しい。それに対し物質移動によるコンダクタンスは *j* から *i* 節点への流量を q とすれば c_{ij} は q 、 c_{ji} は 0 となる非対称性を持つ。また *i*, *j* 節点間に伝導と物質移動が同時に存在しても c_{ij} は両者の和で定められる。今 x を状態ベクトルと呼び (x_1, x_2, \dots, x_n) とすると (1) 式から状態

方程式はベクトルマトリクス形式で直ちに次式のように構成される。

$$M \cdot \dot{x} = C \cdot x + f \dots \dots \dots (2)$$

ここに M は容量マトリクス ($n \times n$)、 C はコンダクタンスマトリクス ($n \times n$)、 f は入力ベクトル (n) と呼ぶことにする。さらに直接入力 g_{di} の発生源が g_i から g_{n_0} まで n_0 個あるとし、そのうち g_j から *i* 節点への入力率を τ_{ij} で定義すると g_{di} は次式で表される。

$$g_{di} = \sum_{j=1}^{n_0} \tau_{ij} \cdot g_j \dots \dots \dots (3)$$

この g_j で構成されるベクトル $g = (g_1, \dots, g_{n_0})$ を自由入力ベクトル、また $x_0 = (x_{n+1}, \dots, x_{n+n_0})$ を規定入力ベクトルと呼ぶことにすれば、 f は次式のように記述できる。

$$f = C_0 \cdot x_0 + R \cdot g \dots \dots \dots (4)$$

ここに $C_0 (n \times n_0)$, $R (n \times n_0)$ の要素はそれぞれ c_{ij} , τ_{ij} である。以上によりここで、システムパラメータとは状態方程式 (2) における、状態 x と入力 x_0 , g 以外の係数となる容量 m_{ii} 、一般化コンダクタンス c_{ij} と入力率 τ_{ij} であると定義することにする。ただし m_{ii} とは M の *i* 行 *j* 列要素を表す。これは一般には M が対角マトリクスとは限らないためである。例えば拡散現象の支配偏微分方程式をガレルキン法などで空間離散化した状態方程式を作れば⁷⁾, M は対称マトリクスとなり非対角要素も存在する場合があるため一般に拡張する必要がある。既報では¹¹⁾では (2) 式で表わされるシステムのシミュレーション、つまり時間積分について主に論じた。すなわち (2) 式から次の (5) 式をつくれば、この推移マトリクスは (6) 式のように射影分解によって表されることになり、解は (7) 式のように記述された。

$$\dot{x} = M^{-1} \cdot C \cdot x + M^{-1} \cdot f = C^* \cdot x + f^* \dots \dots \dots (5)$$

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i t} \dots \dots \dots (6)$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i(t-\tau)} \cdot f^*(\tau) d\tau \dots \dots \dots (7)$$

ここに α_i は C^* の固有値、 P_i は対応する射影子 ($n \times n$) である。離散時間システムとしては、その入力の間を直線補間するものと階段補間するものを作ることができる¹⁾。前者は (8a)~(8e) 式で、後者は (9a), (9b) 式で表される。ただし Δt は時間積分間隔、 k は時刻番号とする。

$$x(k\Delta t) = \phi(\Delta t) \cdot x((k-1)\Delta t) + U_0 \cdot f^*((k-1)\Delta t) + U_1 \cdot f^*(k\Delta t) \dots (8a)$$

ここに

$$U_0 = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i0} \dots \dots \dots (8b)$$

$$a_{i0} = -\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 e^{\alpha_i \Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) + \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) e^{\alpha_i \Delta t} \dots (8c)$$

$$U_1 = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i1} \dots \dots \dots (8d)$$

$$a_{i1} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 e^{\alpha_i \Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 - \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) \dots \dots \dots (8e)$$

$$\mathbf{x}(k\Delta t) = \phi(\Delta t) \cdot \mathbf{x}((k-1)\Delta t) + U_s \cdot \mathbf{f}^*(k\Delta t) \dots \dots (9a)$$

ここに

$$U_s = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i(k\Delta t - \tau)} \cdot d\tau$$

$$= \sum_{i=1}^n P_i \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) \cdot (e^{\alpha_i \Delta t} - 1) \dots \dots \dots (9b)$$

既報¹⁾では伝導拡散系，すなわち C が対称性を持つシステムでは固有値 α_i が負の実数となることを証明した。本論では物質移動もある一般拡散系について考えるが，この場合は少なくとも α_i の実部は負になることが証明される。いま α_i を一般に複素数であるとみなし $\alpha_i = \mu_i + i \cdot \nu_i$ とおき，対応する固有ベクトルを $\mathbf{p} + i\mathbf{q}$ とおく。このとき固有値の定義式から (10) 式が，またそれを実部と虚部に分けることによって (11 a) と (11 b) 式が得られる。

$$(\mu_i + i\nu_i) \cdot M \cdot (\mathbf{p} + i\mathbf{q}) = C \cdot (\mathbf{p} + i\mathbf{q}) \dots \dots \dots (10)$$

$$M \cdot (\mu_i \mathbf{p} - \nu_i \mathbf{q}) = C \cdot \mathbf{p} \dots \dots \dots (11 a)$$

$$M \cdot (\mu_i \mathbf{q} + \nu_i \mathbf{p}) = C \cdot \mathbf{q} \dots \dots \dots (11 b)$$

実部 μ_i についての評価式を作るため (11 a)，(11 b) 式のそれぞれ左方から ${}^t\mathbf{p}$ ， ${}^t\mathbf{q}$ を乗じて辺々加える。 M は対称であることに注意して (12) 式を得る。

$$\mu_i \cdot ({}^t\mathbf{p} \cdot M \cdot \mathbf{p} + {}^t\mathbf{q} \cdot M \cdot \mathbf{q}) = {}^t\mathbf{p} \cdot C \cdot \mathbf{p} + {}^t\mathbf{q} \cdot C \cdot \mathbf{q} \dots \dots (12)$$

ところで伝導と物質移動が混じっていても質量保存則により次式がなりたつ。

$$\sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ji} \dots \dots \dots (13)$$

これを用い，付録 1 の証明過程を経て，次の二つの不等式が成立する。

$${}^t\mathbf{p} \cdot M \cdot \mathbf{p} > 0 \dots \dots \dots (14)$$

$${}^t\mathbf{p} \cdot C \cdot \mathbf{p} < 0 \dots \dots \dots (15)$$

これらの式は \mathbf{p} を \mathbf{q} に置き換えても同様になりたつ。ゆえに (12) 式から固有値 α_i の実部は負であることが証明された。またもし M が対称でなく負の要素があっても (14) 式の正定値が示せればよい。その具体例には熱水分同時移動系^{6),7)}があげられる。この場合はシステムの次数 $2n$ に関する数学的帰納法によって示せる。ところで流速の拡散系を記述するナビエ Stokes の方程式における移流項をマイクロに中央差分などで離散化した場合は負のコンダクタンスがでてくるので，付録 1 の (80) 式右辺の和のいくつかの項は正になる可能性がある。

4. システムパラメーターに関する観測方程式

同定しようとするシステムパラメーターは直接観測することができない。しかし状態ベクトル \mathbf{x} および入力

\mathbf{x}_0 ， \mathbf{g} は観測できる。これらのベクトルは (2)，(4) 式によってシステムパラメーターと関係づけられているから，その観測によってシステムパラメーターは間接的に推定できると考えられる。そこでシステムパラメーターの観測方程式として (2) の状態方程式を変形したものをを用いる。今，いくつかのシステムパラメーターは既知とする。このことを実現象で例えれば，i) 換気拡散システム：各チャンバにかく拌機があり従って m_{ij} が既知，あるいはトレーサーガス発生器からの入力率 r_{ij} が既知。ii) 熱拡散システム：電熱変換効率が 1 であるヒーターがあり従って r_{ij} が既知，ある部分に流量 c_{ij} が既知な流体が流れ込んでいる，あるいは有限要素法により体積としての m_{ij} が既知，の場合などである。(4) を (2) 式に代入した式において既知システムパラメーターによってできる項は左辺に付録 2 のアルゴリズムで移項する。この左辺のベクトルを観測ベクトル $\mathbf{y}(n)$ と呼ぶことにする。つまり

$$\mathbf{y} = -\tilde{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \tilde{C} \cdot \mathbf{x} + \tilde{C}_0 \cdot \mathbf{x}_0 + \tilde{R} \cdot \mathbf{g} \dots \dots \dots (16)$$

ここに \tilde{M} ， \tilde{C} ， \tilde{C}_0 ， \tilde{R} はそれぞれ M ， C ， C_0 ， R の中から既知の要素が \mathbf{y} へ抜けていってできるマトリクスを表す。既知として与える最小個数のシステムパラメーターは，9. で述べる可同定性を満たすように選ぶ。 \tilde{M} 中の m_{ij} なる被同定パラメーターを任意の要素順番で持つベクトルを $\mathbf{m}(n_m)$ ， \tilde{C} と \tilde{C}_0 の中の c_{ij} のそれを $\mathbf{c}(n_c)$ ，同じく \tilde{R} 中の r_{ij} のそれを $\mathbf{r}(n_r)$ とする。これらの被同定パラメーターは系の物理的空間構成から現実に存在し得る必要最小限のものにとどめる。次に (16) 式右辺を \mathbf{m} ， \mathbf{c} ， \mathbf{r} について陽な形に変形する。そのためまずそれぞれのパラメーターを含む 3 つの項にまとめる。第 1 項においてはベクトル \mathbf{m} が右に出されるが，そのときその要素 m_{ij} の持つ添字数 i と j に応じて，付録 2 に示す回路網の定式化法にもとづくアルゴリズムによって状態値 x_i の時間微分値 $\dot{x}_i (i=1, \dots, n)$ を要素に持つマトリクス $D(\dot{x}_i)$ が，自動的かつ一般的に構成できる。同様に第 2 項からは \mathbf{c} に対して状態値 $x_i (i=1, \dots, n+n_0)$ を持つマトリクス $X(x_i)$ が，第 3 項からは \mathbf{r} に対して入力値 $g_i (i=1, \dots, n_g)$ を持つマトリクス $G(g_i)$ が，そのアルゴリズムによって構成される。

$$\mathbf{y} = -\tilde{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} + [\tilde{C}, \tilde{C}_0] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} + \tilde{R} \cdot \mathbf{g}$$

$$= D(\dot{x}_i) \cdot \mathbf{m} + X(x_i) \cdot \mathbf{c} + G(g_i) \cdot \mathbf{r} \dots \dots \dots (17)$$

ここに，マトリクス $D(\dot{x}_i)$ ， $X(x_i)$ ， $G(g_i)$ のサイズはそれぞれ $(n \times n_m)$ ， $(n \times n_c)$ ， $(n \times n_r)$ である。さらに， \mathbf{c} は (13) 式の物理法則，あるいは伝導の対称性により縮小すべき場合がある。例えば $1 \sim n$ 内の 1 つの節点から $n+1 \sim n+n_0$ の節点へ 2 つ以上の c_{ji} が出ている場合がある。今， i 節点 ($1 \leq i \leq n$) から j_1 と j_2 節点 ($n+1 \leq j_1, j_2 \leq n+n_0$) へ $c_{j_1, i}$ と $c_{j_2, i}$ が出ているとす

る。もしこれらの2つのコンダクタンスが c 内で k 番と l 番に位置するとすれば、付録2の(d)の構成法により、 X の k 番と l 番列ベクトルは、 i 行要素に $-x_i$ がありほかの要素は0のまったく同一のベクトルになることがわかる。すなわち X には線型従属な列ベクトルが存在することになる。このような場合は可同定性の議論以前に明らかな不可同定となる。ところが(13)式の c に関する拘束条件により、1つの節点について1本、全体で n 本までは、それらの線型従属な列ベクトルを消去できる。(13)式を $i=1, \dots, n$ について立てて、これを c に関する齊次方程式系と見なせば、 c を $c_s(n)$ と $c_m(n_c - n)$ に分割し、 ${}^t c = ({}^t c_s, {}^t c_m)$ と表したとき、 c_m によって c_s は(18)、 c は(19)式のように記述できる。

$$c_s = S \cdot c_m \dots\dots\dots (18)$$

$$c = \begin{bmatrix} S \\ E_s \end{bmatrix} \cdot c_m = L \cdot c_m \dots\dots\dots (19)$$

ここに E_s は $(n_c - n) \times (n_c - n)$ の単位マトリクスである。従属関係 $S(n \times (n_c - n))$ は与えられた一般長方マトリクスについて基底列ベクトルによって非基底列ベクトルを表す関係を生み出すような標準的数学サブルーチンライブラリにあるもので作られるが、その要素は-1, 0, 1のみで構成されることが容易に示される。(19)式のマトリクス $L(n_c \times (n_c - n))$ を c の縮小マトリクスと呼ぶことにする。これはどのような拡散系においても必ず成り立つ質量保存則を利用して c のサイズを縮小するものであるが、実際には先験的(a priori)にさらに種々の拘束条件が同定パラメーターの間に存在することがわかる場合が多いであろう。例えば伝導のみの系では $c_{ij} = c_{ji}$ の対称性の拘束式や M の容量マトリクスが対称であることから $m_{ij} = m_{ji}$ の拘束式などが考えられる。従って実際はこれらの先験情報によって可能なかぎり同定パラメーターベクトルのサイズを減らしておくことが望ましい。しかし当面は m や r に対する縮小マトリクスは省略して議論することにすれば、(17)式は次式のようになる。

$$y = D(\dot{x}_i) \cdot m + X(x_i) \cdot L \cdot c_m + G(g_i) \cdot r \dots\dots\dots (20)$$

さらに簡潔のためシステムパラメーターをひとまとめに(21)式で、 $D, X \cdot L, G$ をひとまとめに(22)式で表わしておく。

$$a = ({}^t m, {}^t c_m, {}^t r) \dots\dots\dots (21)$$

$$Z = [D, X \cdot L, G] \dots\dots\dots (22)$$

ただし a のサイズを $n_a = n_m + n_c - n + n_r$ とおく。こうして(20)式は結局次式となる。

$$y(t) = Z(t) \cdot a \dots\dots\dots (23)$$

これが a に関する観測方程式である。 $Z(t)$ は観測マトリクス $(n \times n_a)$ と呼ぶことにする。また a をシステムパラメーターベクトルと呼ぶことにする。

5. 同定のための評価関数

評価関数は観測方程式(23)の方程式誤差 $e(t)(n)$ の時間積分値を用いる。まず $e(t)$ は

$$e(t) = y(t) - Z(t) \cdot a \dots\dots\dots (24)$$

と表され、その時間積分値としてスカラー量にするのが最も妥当であるから、評価関数 $J_s(a)$ は二次形式の積分量として次式のように定める。

$$J_s(a) = \int_0^T {}^t e(t) \cdot W(t) \cdot e(t) dt \dots\dots\dots (25)$$

ここに $W(t)$ は重みマトリクス $(n \times n)$ と呼ぶことにする。 W は正定値対称であるが、その決め方は7.で述べる。また T は同定に要する時間である。積分区間 $[0, T]$ を p 分割すれば(25)式は次式となる。

$$J_s(a) = \sum_{k=1}^p \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} {}^t e(t) \cdot W(t) \cdot e(t) dt \dots\dots\dots (26)$$

ここで次のことに留意する。観測されるデータは原則的には不規則なアナログ値である。従って(26)式の被積分関数の内部の積および積分は厳密にはアナログ計算機でなければ実行できない。しかし我々が汎用的に使えるのは数値計算機であるので、次の近似を行うことにより数値計算可能なものにする。

$$J_s(a) \approx \sum_{k=1}^p \frac{1}{\Delta t^2} \left(\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} {}^t e(t) dt \right) \cdot \left(\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} W(t) dt \right) \cdot \left(\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} e(t) dt \right) \dots\dots\dots (27)$$

この近似は Δt が十分小さく、かつ Δt 内での観測値の変化が緩やかであれば十分な精度を持つと考えられる。(27)式による評価関数を作るため、 $Z(t)$ 内の状態値と入力値の $[(k-1)\Delta t, k\Delta t]$ 区間での積分量を次の(28a)~(28c)のように定義する。

$${}_b x_{ik} = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{x}_i \cdot dt = x_i(k\Delta t) - x_i((k-1)\Delta t) \dots\dots\dots (28a)$$

$${}_s x_{ik} = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x_i \cdot dt \approx \frac{\Delta t}{2} (x_i(k\Delta t) + x_i((k-1)\Delta t)) \dots\dots\dots (28b)$$

$${}_s g_{ik} = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} g_i \cdot dt \approx \frac{\Delta t}{2} (g_i(k\Delta t) + g_i((k-1)\Delta t)) \dots\dots\dots (28c)$$

(28b), (28c) 式の積分は適当な面積計により厳密に行なってもよい。これらによって $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ 区間での $Z(t)$ と $y(t)$ の積分である Z_k と y_k は次式のように表すことができる。

$$Z_k = [D({}_b x_{ik}), X({}_s x_{ik}) \cdot L, G({}_s g_{ik})] = [D_k, X_k \cdot L, G_k] \dots\dots\dots (29)$$

$$y_k = y({}_b x_{ik}, {}_s x_{ik}, {}_s g_{ik}) \dots\dots\dots (30)$$

そこで(24)式に対応して(31)式、(26)式に対応して(32)式の近似評価関数 $J(a)$ が得られる。

$$e_k = y_k - Z_k \cdot a \dots\dots\dots (31)$$

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^p (1/\Delta t^2) \cdot {}^t \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{e}_k \dots\dots\dots (32)$$

6. 最小二乗法によるシステムパラメーターの同定

$J(\mathbf{a})$ は観測方程式誤差ベクトルの、重みマトリクスによって定まる、二次形式の和であるから、 $J(\mathbf{a})$ を最小にするように \mathbf{a} を決める、いわゆる最小二乗法が同定法として考えられる。これは J を \mathbf{a} によって微分し0におくことにより行われる。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \sum_{k=1}^p (1/\Delta t^2) \cdot {}^t \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \sum_{k=1}^p (1/\Delta t^2) \cdot {}^t (\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{W}_k \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \\ &= \sum_{k=1}^p (1/\Delta t^2) \cdot (-2 \cdot {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{y}_k + 2 \cdot {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \\ &= 0 \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

よって

$$\hat{\mathbf{a}} = \left(\sum_{k=1}^p {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^p {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{y}_k \right) \dots\dots (34)$$

ここに $\hat{\mathbf{a}}$ は \mathbf{a} の推定であることを表す。またもしアナログ計算機が利用できるならば次式のように連続的の最小二乗法が適用できる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= \left(\int_0^T {}^t \mathbf{Z}(t) \cdot \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{Z}(t) dt \right)^{-1} \\ &\cdot \left(\int_0^T {}^t \mathbf{Z}(t) \cdot \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{y}(t) dt \right) \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

(34)式は8.で演繹するところの \mathbf{a} に関する離散時間システムを導くための基礎式となる。

7. 重みマトリクス W

W は、観測誤差によって、 \mathbf{a} の推定が偏つたものにならないようにするために用いる。 x_i , g_i の観測値が瞬時観測誤差分散 $\sigma_{x_i}^2$, $\sigma_{g_i}^2$ を持つとする。すると(28 a), (28 b), (28 c)における積分量の持つ誤差分散 ${}_b \sigma_{x_i}^2$, ${}_s \sigma_{x_i}^2$, ${}_s \sigma_{g_i}^2$ は誤差伝播則により次式となる。

$${}_b \sigma_{x_i}^2 = 2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \dots\dots\dots (36 a)$$

$${}_s \sigma_{x_i}^2 \cong (1/2) \Delta t^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \dots\dots\dots (36 b)$$

$${}_s \sigma_{g_i}^2 \cong (1/2) \Delta t^2 \cdot \sigma_{g_i}^2 \dots\dots\dots (36 c)$$

いま

$${}_b \mathbf{x}_k = ({}_b x_{1k}, \dots, {}_b x_{nk}) \dots\dots (n) \dots\dots\dots (37 a)$$

$${}_b \sigma_{\mathbf{x}} = ({}_b \sigma_{x_1}, \dots, {}_b \sigma_{x_n}) \dots\dots (n) \dots\dots\dots (37 b)$$

$${}_s \mathbf{x}_k = ({}_s x_{1k}, \dots, {}_s x_{n+n_0k}) \dots\dots (n+n_0) \dots\dots\dots (38 a)$$

$${}_s \sigma_{\mathbf{x}} = ({}_s \sigma_{x_1}, \dots, {}_s \sigma_{x_{n+n_0}}) \dots\dots (n+n_0) \dots\dots\dots (38 b)$$

$${}_s \mathbf{g}_k = ({}_s g_{1k}, \dots, {}_s g_{n_0k}) \dots\dots (n_0) \dots\dots\dots (39 a)$$

$${}_s \sigma_{\mathbf{g}} = ({}_s \sigma_{g_1}, \dots, {}_s \sigma_{g_{n_0}}) \dots\dots (n_0) \dots\dots\dots (39 b)$$

とおく。 ${}_b \mathbf{x}_k$, ${}_s \mathbf{x}_k$, ${}_s \mathbf{g}_k$ はそれぞれ真値のベクトルに誤差ベクトル ${}_b \delta \mathbf{x}_k(n)$, ${}_s \delta \mathbf{x}_k(n+n_0)$, ${}_s \delta \mathbf{g}_k(n_0)$ が加わったものとみなす。真値のベクトルは状態方程式誤差を0とすることに注意すれば、観測誤差に起因するその方程式

誤差ベクトル $\mathbf{e}_k(n)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k &= -M \cdot {}_b \mathbf{x}_k + [C, C_0] \cdot {}_s \mathbf{x}_k + R \cdot {}_s \mathbf{g}_k \\ &= -M \cdot {}_b \delta \mathbf{x}_k + [C, C_0] \cdot {}_s \delta \mathbf{x}_k + R \cdot {}_s \delta \mathbf{g}_k \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

観測誤差による方程式誤差の分散共分散マトリクスを $\Lambda_0(n \times n)$ とおけば、これは $\mathbf{e}_k \cdot {}^t \mathbf{e}_k$ の期待値である。

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= E[\mathbf{e}_k \cdot {}^t \mathbf{e}_k] \\ &= M \cdot E[{}_b \delta \mathbf{x}_k \cdot {}^t {}_b \delta \mathbf{x}_k] \cdot {}^t M + [C, C_0] \\ &\cdot E[{}_s \delta \mathbf{x}_k \cdot {}^t {}_s \delta \mathbf{x}_k] \cdot {}^t [C, C_0] + R \cdot E[{}_s \delta \mathbf{g}_k \cdot {}^t {}_s \delta \mathbf{g}_k] \cdot {}^t R \\ &= M \cdot \text{diag}({}_b \sigma_{x_1}, \dots, {}_b \sigma_{x_n}) \cdot {}^t M + [C, C_0] \\ &\cdot \text{diag}({}_s \sigma_{x_1}, \dots, {}_s \sigma_{x_{n+n_0}}) \cdot {}^t [C, C_0] + R \cdot \text{diag}({}_s \sigma_{g_1}, \dots, {}_s \sigma_{g_{n_0}}) \cdot {}^t R \\ &\dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

ここで ${}_b \delta \mathbf{x}_k$, ${}_s \delta \mathbf{x}_k$, ${}_s \delta \mathbf{g}_k$ 間の共分散は0であること、それらベクトル内の要素間の共分散も0であることを用いた。またdiagはそのアーギュメント内のマトリクスの対角要素のみによって構成するマトリクスを表わす。こうして観測誤差から方程式誤差への伝播則(41)式が定式化された。従って不偏推定を与えるMarkov-Estimate¹³⁾の考えに従えば、重みマトリクスは

$$\mathbf{W}_k = \Lambda_0^{-1} \dots\dots\dots (42)$$

と定められる。さらに実際的な問題として、観測期間中にたまたま発生しうる信頼性のおけない観測値によって誤った方向に引張られてしまわないように、健固性(Robustness)¹⁴⁾を持たせることを考える。その方法の一つに単一の回帰式について定式化されたTukeyのBiweight推定法¹⁴⁾がある。これを多次元に拡張し次式の修正重みマトリクスを定める。 W^{adj} は(44)式で示す方程式の残差 v によって左右される。

$$\begin{aligned} W_k^{adj} &= \left(E_n - \frac{1}{c^2} \Lambda_0^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{diag}(\mathbf{v}_k \cdot {}^t \mathbf{v}_k) \cdot {}^t \Lambda_0^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot \Lambda_0^{-1} \\ &\cdot \left(E_n - \frac{1}{c^2} \Lambda_0^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{diag}(\mathbf{v}_k \cdot {}^t \mathbf{v}_k) \cdot {}^t \Lambda_0^{-\frac{1}{2}} \right) \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \hat{\mathbf{a}} \dots\dots\dots (44)$$

ここに E_n は $(n \times n)$ の単位マトリクスを表す。また c はしきい値¹⁴⁾と呼ばれているもので5~9に設定する。すなわち $\text{diag}(\mathbf{v}_k \cdot {}^t \mathbf{v}_k)$ の対角要素の1つでも Λ_0 のそれの c 倍以上になったときは W_k^{adj} は0マトリクスとする。ところで(41)式の誤差伝播構造は \mathbf{a} に左右されるものであり、それゆえ12.で述べる一括同定においては収束計算を用いなければならない。また13.での逐次同定においては、そのプロセス途中では、 \mathbf{a} が不確かなものであるから常に W_k は単位マトリクスを用いる。

8. システムパラメーター \mathbf{a} の離散時間システム

(34)式において p タイムステップまでの同定式が得られている。いま p を k に置き換え次式を得る。

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \left(\sum_{j=1}^k {}^t \mathbf{Z}_j \cdot \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{Z}_j \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^k {}^t \mathbf{Z}_j \cdot \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{y}_j \right) \dots\dots (45)$$

ここでは \mathbf{a}_{k-1} から \mathbf{a}_k への漸化式，換言すれば \mathbf{a} の離散時間システムを導く。まず次のように記号定義をする。

$$A_k = \left(\sum_{j=1}^k {}^t Z_j \cdot W_j \cdot Z_j \right)^{-1} \dots \dots \dots (46)$$

$$\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^k {}^t Z_j \cdot W_j \cdot \mathbf{y}_j \dots \dots \dots (47)$$

したがって

$$A_k^{-1} = A_{k-1}^{-1} + {}^t Z_k \cdot W_k \cdot Z_k \dots \dots \dots (48)$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + {}^t Z_k \cdot W_k \cdot \mathbf{y}_k \dots \dots \dots (49)$$

(48) 式に Woodbury^{15)p.27} の逆行列公式を適用し次式を得る。

$$A_k = A_{k-1} - A_{k-1} \cdot {}^t Z_k \cdot (W_k^{-1} + Z_k \cdot A_{k-1} \cdot {}^t Z_k)^{-1} \cdot Z_k \cdot A_{k-1} \dots \dots \dots (50)$$

(46)~(50) 式によって次のように (45) 式を変形する。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &= A_k \cdot \mathbf{u}_k = \left(A_{k-1} - A_{k-1} \cdot {}^t Z_k \cdot (W_k^{-1} + Z_k \cdot A_{k-1} \cdot {}^t Z_k)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \cdot Z_k \cdot A_{k-1} \right) \cdot (\mathbf{u}_{k-1} + {}^t Z_k \cdot W_k \cdot \mathbf{y}_k) \\ &= (E_a - A_{k-1} \cdot {}^t Z_k \cdot (W_k^{-1} + Z_k \cdot A_{k-1} \cdot {}^t Z_k)^{-1} \cdot Z_k) \\ &\quad \cdot \mathbf{a}_{k-1} + A_k \cdot {}^t Z_k \cdot W_k \cdot \mathbf{y}_k \end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathbf{a}_k = \Phi_k \cdot \mathbf{a}_{k-1} + B_k \cdot \mathbf{y}_k \dots \dots \dots (51 a)$$

ここで

$$\begin{cases} \Phi_k = E_a - A_{k-1} \cdot {}^t Z_k \cdot (W_k^{-1} + Z_k \cdot A_{k-1} \cdot {}^t Z_k)^{-1} \cdot Z_k \\ \dots \dots \dots (51 b) \\ B_k = A_k \cdot {}^t Z_k \cdot W_k \dots \dots \dots (51 c) \end{cases}$$

とおいた。こうして (51 a), (51 b), (51 c) および (50) 式の, \mathbf{a} に関する離散時間システムを得た。ただし E_a は $(n_a \times n_a)$ の単位マトリクスを表す。また初期の A_0 は E_a とする。このシステムは時変系 (Time Varying System) である。

9. \mathbf{a} の離散時間システムによる可同定性の考察

同定に必要な観測値の変化の程度と観測期間，さらにどのように既知システムパラメーターを与えれば同定が可能かどうかは (51 a), (51 b), (51 c) 式のシステムを考えればわかる。 \mathbf{a}_k を \mathbf{a}_0 から表すため k について順次計算すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \Phi_1 \cdot \mathbf{a}_0 + B_1 \cdot \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{a}_2 &= \Phi_2 \cdot \mathbf{a}_1 + B_2 \cdot \mathbf{y}_2 = \Phi_2 \cdot \Phi_1 \cdot \mathbf{a}_0 + \Phi_2 \cdot B_1 \cdot \mathbf{y}_1 + B_2 \cdot \mathbf{y}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_k &= \left(\prod_{i=1}^k \Phi_i \right) \cdot \mathbf{a}_0 + \sum_{j=1}^k \left(\prod_{i=j+1}^k \Phi_i \right) \cdot B_j \cdot \mathbf{y}_j \dots \dots \dots (52) \end{aligned}$$

ただし積記号 \prod は i の小さいものを右にしてマトリクスの積をとる。ところで推移マトリクス Φ_j は (51 b) 式で定義されるから (50) 式により次の (53) 式のように表される。従って (52) 式右辺第一項のマトリクスは (54) 式のように，また第二項のマトリクスは (55) 式

のように簡単化される。

$$\Phi_j = E_a - A_{j-1} \cdot {}^t Z_j \cdot (W_j^{-1} + Z_j \cdot A_{j-1} \cdot {}^t Z_j)^{-1} \cdot Z_j = A_j \cdot A_{j-1}^{-1} \dots \dots \dots (53)$$

$$\prod_{i=1}^k \Phi_i = (A_k \cdot A_{k-1}^{-1}) \cdot (A_{k-1} \cdot A_{k-2}^{-1}) \cdot \dots \cdot (A_1 \cdot A_0^{-1}) = A_k \dots \dots \dots (54)$$

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=j+1}^k \Phi_i \right) \cdot B_j \cdot \mathbf{y}_j &= (A_k \cdot A_{k-1}^{-1}) \cdot (A_{k-1} \cdot A_{k-2}^{-1}) \cdot \dots \\ &\quad \cdot (A_{j+1} \cdot A_j^{-1}) \cdot (A_j \cdot {}^t Z_j \cdot W_j \cdot \mathbf{y}_j) \\ &= A_k \cdot {}^t Z_j \cdot W_j \cdot \mathbf{y}_j \dots \dots \dots (55) \end{aligned}$$

(52), (54), (55) 式により \mathbf{a}_k は次式で記述される。

$$\mathbf{a}_k = A_k \cdot \mathbf{a}_0 + A_k \cdot \sum_{j=1}^k {}^t Z_j \cdot W_j \cdot \mathbf{y}_j \dots \dots \dots (56)$$

いまもし \mathbf{a} の真値を \mathbf{a}_s で表わせば，このとき方程式誤差ベクトルは $\mathbf{0}$ であり $\mathbf{y}_j = Z_j \mathbf{a}_s$ となるから，この \mathbf{a}_s を用いて (56) 式は

$$\mathbf{a}_k = A_k \cdot \mathbf{a}_0 + A_k \cdot \left(\sum_{j=1}^k {}^t Z_j \cdot W_j \cdot Z_j \right) \cdot \mathbf{a}_s = A_k \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_s \dots \dots \dots (57)$$

となる。ここで (46) 式を用いた。(57) 式の \mathbf{a}_s を左辺に移項し両辺の 1 ノルム¹²⁾をとれば次の不等式が成立する。

$$\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_s\| \leq \|A_k\| \cdot \|\mathbf{a}_0\| \dots \dots \dots (58)$$

可同定性とは $k \rightarrow \infty$ のとき (58) 式の左辺が 0 に近づくことと定められる。まずその必要条件は逆行列 A_k が存在するために次式が成立することである。

$$\text{rank}(A_k^{-1}) = \text{rank} \left(\sum_{j=1}^k {}^t Z_j \cdot W_j \cdot Z_j \right) = n_a \text{ (full rank)} \dots \dots \dots (59)$$

逆にこのとき A_k によって一意的に \mathbf{a}_k が決定され，かつ $k \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{a}_s$ となることから，付録 3 の証明過程を経て，示される。ゆえに (59) 式が可同定性の必要十分条件である。さらに \mathbf{a} に関する離散時間システムは推移マトリクスについて (54) 式が成立するから，付録 3 の証明過程により，そのシステムが漸近安定であることも示された。次にどのように既知パラメーターを与えれば，十分な観測データを得ることによって，可同定となるかについて考察する。これは (59) 式から演繹することは困難である。また仮りに \mathbf{a} の状態方程式として (51 a)，観測方程式として (23) の時変係数系を考え，その可制御性と可観測性の条件を導いても結局それは (59) 式の条件と同値となる。従って本論では容易にわかる十分条件をあげるにとどめる。すなわち (51 a) 式において入力 \mathbf{y}_k の影響が \mathbf{a}_k の全レンジに及ぶための十分条件は \mathbf{y}_k の要素が互いに独立なることである。これを最小数の既知のパラメーターで実現するには，それぞれの節点に関する 1 つずつのシステムパラメーターを合計 n 個与えればよい。

10. システムパラメーターの同定誤差

システムパラメーターの同定誤差を方程式誤差からの伝播としてとらえ、その伝播則を定式化する。 $\hat{\mathbf{a}}$ は (34) 式で与えられている。また誤差ベクトル \mathbf{e}_j は (31) 式で定められるが、その期待値は $E(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}$ とみなせる。従って次式が成立する。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}}) &= \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot Z_j \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot \mathbf{y}_j \right) \\ &\quad - E \left[\left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot Z_j \right)^{-1} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot (Z_j \cdot \mathbf{a} + \mathbf{e}_j) \right) \right] \\ &= \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot Z_j \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot \mathbf{e}_j \right) \quad (60) \end{aligned}$$

そこで \mathbf{a} の誤差の分散共分散マトリクスを $\Lambda_a (n_a \times n_a)$ とすると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Lambda_a &= E[(\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}})) \cdot (\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}}))^t] \\ &= \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot Z_j \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot E(\mathbf{e}_j \cdot {}^t \mathbf{e}_j) \cdot W_j \cdot Z_j \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot Z_j \right)^{-1} \quad (61) \end{aligned}$$

ここで $E(\mathbf{e}_i \cdot {}^t \mathbf{e}_j) = [0] (i \neq j)$ を用いた。次に $E(\mathbf{e}_j \cdot {}^t \mathbf{e}_j)$ をどうとるかについて考える。この場合、方程式誤差の原因は二つ考えられる。一つは観測誤差であり、もう一つは実現象を近似した状態方程式そのものの不適合である。もし観測誤差のみを考えれば $E(\mathbf{e}_j \cdot {}^t \mathbf{e}_j)$ は (41) 式の Λ_0 であり、かつ W_j を (42) 式の Λ_0^{-1} にとれば Λ_a は (46) 式の A_k そのものになることが明らかである。また方程式の不適合とはモデリングした状態方程式の次数あるいは構造の不適切さによって状態の計算値が観測値を許容誤差内でトレースできないことである。従ってその影響は (44) 式によって計算される方程式残差 \mathbf{v}_j に表われる。ここでもしこの不適合性も同定パラメーターの推定誤差に帰着させるとすれば、それは方程式残差から同定パラメーターへの誤差伝播構造によって評価される。これは (61) 式において $E(\mathbf{e}_j \cdot {}^t \mathbf{e}_j)$ を $\mathbf{v}_j \cdot {}^t \mathbf{v}_j$ の期待値においたものである。この期待値の不偏推定をするためには総和数 p からパラメーター数 n_a をひいたものを自由度にとることに注意して次式が定義できる。これを (61) 式に代入すればよい。

$$E(\mathbf{e}_j \cdot {}^t \mathbf{e}_j) \cong (1/(p - n_a)) \cdot \sum_{j=1}^p \mathbf{v}_j \cdot {}^t \mathbf{v}_j \quad (62)$$

Λ_a の対角要素にはシステムパラメーターの誤差分散が、非対角要素には共分散が位置する。

11. 同定された状態方程式の適合度

システムパラメーターが同定されれば、それによって状態方程式が構成される。この状態方程式によって現象をどの程度説明できるかの評価指標を作っておく。評価の手がかりとして観測方程式の残差二乗和をとる。それ

を $s(\hat{\mathbf{a}})$ とおけば (44) 式および (34) 式により

$$\begin{aligned} s(\hat{\mathbf{a}}) &= \sum_{j=1}^p {}^t \mathbf{v}_j \cdot W_j \cdot \mathbf{v}_j \\ &= \sum_{j=1}^p {}^t \mathbf{y}_j \cdot W_j \cdot \mathbf{y}_j - \left(\sum_{j=1}^p {}^t \mathbf{y}_j \cdot W_j \cdot Z_j \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot Z_j \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^p {}^t Z_j \cdot W_j \cdot \mathbf{y}_j \right) \quad (63) \end{aligned}$$

となる。何に対して $s(\hat{\mathbf{a}})$ の比率をとるかによって、この指標は二つ作れる。まず一つは観測誤差のみに対するものである。この残差二乗和を s_0 とおけば (41) 式を導くときと同様に考えて次式を得る。

$$\begin{aligned} s_0 &= {}^t \sigma_x \cdot {}^t M \cdot \left(\sum_{j=1}^p W_j \right) \cdot M \cdot \sigma_x + s^t \sigma_x \cdot [C, C_0] \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=1}^p W_j \right) \cdot [C, C_0] \cdot \sigma_x \\ &\quad + s^t \sigma_y \cdot {}^t R \cdot \left(\sum_{j=1}^p W_j \right) \cdot R \cdot \sigma_y \quad (64) \end{aligned}$$

したがって

$$f_0 = s(\hat{\mathbf{a}}) / s_0 \quad (65)$$

を観測誤差に対する残差二乗和比率と呼ぶことにする。もう一つは観測ベクトルの総変動に対するものである。これはいわゆる決定係数 (C. O. D.)¹⁸⁾ と同様な考え方による。総変動 s_y は、まず \mathbf{y} の重みつき平均を $\bar{\mathbf{y}}$ として (66) 式で表すとき、(67) 式で計算される。

$$\bar{\mathbf{y}} = \left(\sum_{j=1}^p W_j \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^p W_j \cdot \mathbf{y}_j \right) \quad (66)$$

$$\begin{aligned} s_y &= \sum_{j=1}^p {}^t (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}) \cdot W_j \cdot (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}) \\ &= \sum_{j=1}^p {}^t \mathbf{y}_j \cdot W_j \cdot \mathbf{y}_j - {}^t \bar{\mathbf{y}} \cdot \left(\sum_{j=1}^p W_j \right) \cdot \bar{\mathbf{y}} \\ &= \sum_{j=1}^p {}^t \mathbf{y}_j \cdot W_j \cdot \mathbf{y}_j - {}^t \left(\sum_{j=1}^p W_j \cdot \mathbf{y}_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^p W_j \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^p W_j \cdot \mathbf{y}_j \right) \\ &\quad \dots \quad (67) \end{aligned}$$

従って決定係数 f_0 は次式で計算される¹⁸⁾。ただし \mathbf{y} に恒等的に 0 の要素を持つ場合はこれを定義しない。

$$f_0 = 1 - s(\hat{\mathbf{a}}) / s_y \quad (68)$$

観測誤差分散からみて残差が妥当であるかどうか検定するには f_0 にもとづいてカイ二乗検定が¹⁴⁾、また残差だけからみて得られた状態方程式が有意かどうかには f_0 にもとづいて F 検定¹⁸⁾ ができる。ただし、 f_0 については s_0 が同定パラメーターに左右されていること、方程式誤差の原因が観測誤差のみということは現実問題ではほとんどありえないことから、 f_0 を評価指標とするほうが良いと思われる。

12. 一括同定のアルゴリズム

十分な観測期間を経たあと、一括して同定を行なうアルゴリズムは次のようになる。まず $\hat{\mathbf{a}}_0$ を $\mathbf{0}$ におく。

① もし一回目の同定であれば重みマトリクス W_k を単位マトリクス E_n におき、二回目以降の同定であれば、前回で得られている同定結果 $\hat{\mathbf{a}}_0$ を用いて、残差 \mathbf{v}_k を

(44) 式により計算し、さらに W_k^{adj} を (41), (43) 式により決めて、(34) 式右辺の $'Z_k \cdot W_k \cdot Z_k$ と $'Z_k \cdot W_k \cdot y_k$ のそれぞれの和を計算していく。

② (34) 式により \hat{a} を求め、これを \hat{a}_1 におく。

③ $\|\hat{a}_1 - \hat{a}_0\| < \varepsilon$ (ε は許容誤差) であれば同定完了とする。そうでなければ \hat{a}_0 に \hat{a}_1 を置き換え①へもどる。

13. 逐次同定のアルゴリズム

Δt の観測時間間隔ごとに同定を繰り返し続けていき、もし α が時間変化しても、同定結果はそれに追従していくアルゴリズムである。この場合は (51 a) 式の α に関する離散時間システムを用いる。ただし重みマトリクス W_k は常に単位マトリクス E_n におく。また初期の A_0 は単位マトリクス E_n である。

初期値 α_0 を与え、 $k=1$ から次のアルゴリズムを繰返す。

① k タイムステップの観測値を得て (50) 式により A_k を計算する。

② (51 b), (51 c) 式により Φ_k, B_k を計算する。

③ (51 a) 式により α_{k-1} から α_k を計算する。

④ k を 1 増やし①へもどる。

この逐次同定法が適している応用面は、例えばパッシブソーラーハウスの温度測定から同定をする場合である。このときシステムの状態方程式も逐次構成され、(8 a) または (9 a) 式によって時間積分することにより、予測制御⁹⁾に使えるからである。

14. 具体例 (数値例)

本同定法のフィージビリティを確かめるため数値実験を行った。いま、図1のようなトレーサガスの拡散システムを考える。これは両方向性の物質移動を持つ非対称の系であるが、伝導のみの対称な系よりも例題としては一般的であろう。 x_3 は外気の濃度、 g_1 はガス発生量のようなものとする。このシステムの状態方程式は (2), (4) 式に対応し次式で記述される。

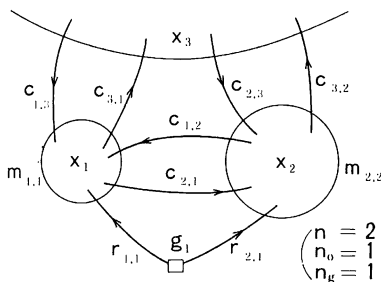


図1 トレーサガスの拡散システム

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 \\ 0 & m_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-C_{2,1} - C_{3,1}) & C_{1,2} \\ C_{2,1} & (-C_{1,2} - C_{3,2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{1,3} \\ C_{2,3} \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} r_{1,1} \\ r_{2,1} \end{pmatrix} g_1 \dots (69)$$

1 と 2 チャンバには攪拌機があり、従って $m_{1,1}$ と $m_{2,2}$ は既知とする。すると同定すべきシステムパラメーターはコンダクタンス c_{ij} について (70) 式、入力率 r_{ij} について (71) 式、まとめて (72) 式で記述される。

$$'c_m = (c_{3,2}, c_{3,1}, c_{2,3}, c_{2,1}, c_{1,3}, c_{1,2}) \dots (70)$$

$$'r = (r_{1,1}, r_{2,1}) \dots (71)$$

$$'a = ('c_m, 'r) \dots (72)$$

c_m, r 内の要素の並べ方は任意でよい。またこの場合は簡単のため (19) 式における c の縮小マトリクス L は単位マトリクスとする。こうしてシステムパラメーターベクトル α が定義されれば、(23) の観測方程式における観測ベクトル y とマトリクス Z は、付録 2 での構成法により、次式のようになる。

$$'y = (m_{1,1} \cdot \dot{x}_1, m_{2,2} \cdot \dot{x}_2) \dots (73)$$

$$Z = [X, G] = \begin{bmatrix} 0 & -x_1 & 0 & -x_1 & x_3 & x_2 \\ -x_2 & 0 & x_3 & x_1 & 0 & -x_2 \\ g_1 & 0 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} \dots (74)$$

観測値はシミュレーションした結果に正規分布のノイズを加えて得ることとする。そのためまずシステムパラメーターを表1のように設定する。次にこれらにより構成される (69) の状態方程式を (8 a) 式による入力直線補間の時間積分法によりシミュレーションして x_1 と x_2 を得る。ただし $\Delta t=1$ とする。この際に得られた固有値と固有ベクトルは表2に示す。また入力 x_3 と g_1 はまったく不規則に変化させた。これは同定のための入力には特に設計しなくてもいいことを示すためでもある。こうして得られた計算結果と入力の x_1, x_2, x_3 には標準偏差 $\sigma_{xi}=0.5$ 、 g_1 には $\sigma_{g1}=1$ の観測ノイズを乱数発生をもとにして加えて観測値とした。図2にはこの x_1 と x_2 を、図3には x_3 と g_1 を示す。

本論文の同定理論と 12. 13. で述べたそのアルゴリズムにより同定を試みた。その最終結果を表3に示す。1 列目は、図2, 3 には示していないが、ノイズを持たない観測値を仮りに用いた場合の逐次同定の結果である。2 列目以降はすべてノイズを持つ観測値によるもので、2 列目は重みマトリクスを単位マトリクスにした一

表1 仮定されたシステムパラメーター

$m_{1,1}$	$m_{2,2}$	$c_{3,2}$	$c_{3,1}$	$c_{2,3}$
50	100	8	2	3
$c_{2,1}$	$c_{1,3}$	$c_{1,2}$	$r_{1,1}$	$r_{2,1}$
10	7	5	0.2	0.5

表2 固有値と固有ベクトル

α_1	α_2	p_1	p_2
-0.0709	-0.299	0.509	0.861
		0.861	-0.509

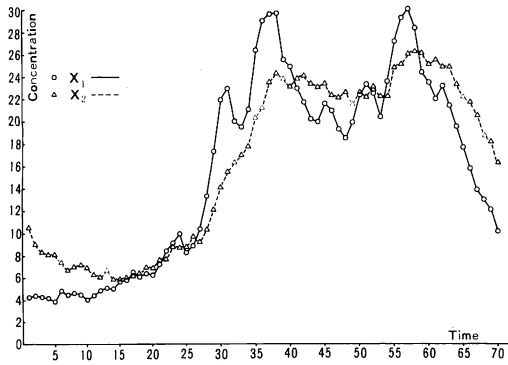


図2 観測された状態値の推移

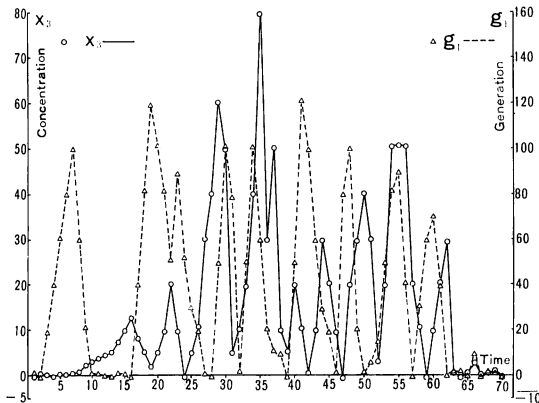


図3 観測された入力値の推移

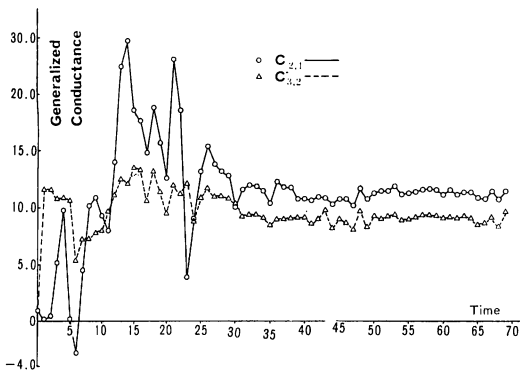


図4 逐次同定によるシステムパラメーターの推移

一括同定, 3列目は(43)式の修正重みマトリクスを用いた一括同定, 4列目は逐次同定によるものである。逐次同定は初期の \mathbf{a}_0 の要素を全て1において行ったが, 表3の結果は最終タイムステップ $k=69$ のときのものである。3列目のものについて, (68)式で定義した決定係数(C.O.D.) f_v は, 0.850であった。またこの3列目の場合について(61), (62)式で示す $\hat{\mathbf{a}}$ の誤差分散共分散マトリクス Λ_a を表4に示す。逐次同定において, 特に $c_{2,1}$ と $c_{3,2}$ に注目し, しだいに解に近づいていく様子を図4に示す。また(59)式でのrankが上昇する様子は図5である。

表3において1列目のノイズのない場合の同定結果がほぼ真値に等しいことから本論の同定法は純粋な逆探問題に対しては満足できる解を与えると考えられる。ノイズがある場合については重みマトリクスを用いてそれをフィルタリングする有効性が, 2列目と3列目の二種の一括同定の結果を比較し, 3列目の重みつきの方がほぼ全てのパラメーターにわたって真値に近いことに表れている。さらに表4の分散共分散マトリクスの対角要素の平方根である推定された同定誤差標準偏差と表3の3列目の同定法で実際に起った誤差偏差を比較するといずれ

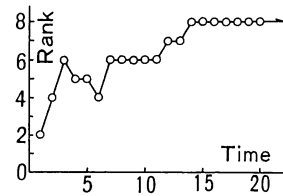


図5 可同定性のランク上昇

表3 同定結果

Method	1 Sequential (Noise Free)	2 Batch	3 Batch (Weighted)	4 Sequential
$C_{3,2}$	7.91	9.72	9.66	9.67
$C_{3,1}$	2.10	-0.0273	0.00216	0.0252
$C_{2,3}$	3.00	2.57	2.57	2.57
$C_{2,1}$	10.1	11.6	11.5	11.5
$C_{1,3}$	7.01	6.83	6.82	6.83
$C_{1,2}$	5.18	4.55	4.55	4.56
$r_{1,1}$	0.202	0.279	0.263	0.279
$r_{2,1}$	0.499	0.534	0.534	0.534

表4 システムパラメーターの誤差分散共分散マトリクス

	$\sigma_{C_{3,2}}$	$\sigma_{C_{3,1}}$	$\sigma_{C_{2,3}}$	$\sigma_{C_{2,1}}$	$\sigma_{C_{1,3}}$	$\sigma_{C_{1,2}}$	$\sigma_{r_{1,1}}$	$\sigma_{r_{2,1}}$
$\sigma_{C_{3,2}}$	0.802E+1	-0.883E+1	-0.879E+0	0.687E+1	-0.251E+0	-0.178E+1	0.163E-1	0.570E-1
$\sigma_{C_{3,1}}$		0.104E+2	0.122E+1	-0.807E+1	0.349E+0	0.196E+1	-0.236E-2	-0.770E-2
$\sigma_{C_{2,3}}$			0.410E+0	-0.124E+1	-0.618E-2	-0.130E-1	0.276E-3	-0.183E-1
$\sigma_{C_{2,1}}$				0.819E+1	0.184E-1	0.103E+0	-0.878E-4	0.783E-2
$\sigma_{C_{1,3}}$					0.121E+0	0.264E+0	-0.545E-2	0.283E-3
$\sigma_{C_{1,2}}$						0.187E+1	-0.172E-1	0.892E-3
$\sigma_{r_{1,1}}$							0.106E-1	-0.552E-3
$\sigma_{r_{2,1}}$								0.359E-1

の誤差も標準偏差以内であり、また標準偏差は誤差の大ききの傾向をよく推定していることがわかる。ところで可同定になる可能性を持つための既知として与えるパラメーターに関する十分条件は、それぞれの節点に関して少なくとも1つずつのパラメーターが合計 n 個既知であることとした。この具体例では $m_{1,1}$ と $m_{2,2}$ を既知として与えるほかにも種々の与え方を行なってみた。その結果、この条件のほかにも個数はやはり2個ではあるが節点2のみに関する $c_{2,3}$ と $c_{3,2}$ を与えた場合でも可同定となり得ることが判明した。従って今後はより範囲を広げたその必要十分条件を解明する必要がある。

15. 結論と今後の課題

伝導と物質移動による一般拡散系を回路網の概念により有限次元の状態方程式記述をしたが、その場合にそのシステムは少なくとも実部は負の固有値を持つことを証明した。この状態値と入力値の観測からシステムパラメーターを同定する理論とアルゴリズムを、最小二乗法から演繹して、二種類提示した。それらは長い観測期間の後に一度に同定する一括同定法と、システムパラメーターに関する離散時間システムをつくり、観測値を得るタイムステップごとに同定をし続けていく逐次同定法である。そしてこれらの理論は本回路網の概念により直ちにプログラミング可能な一般的アルゴリズムにしておくことができる。また可同定性の必要十分条件とシステムパラメーターの離散時間システムの漸近安定性について論じた。同定誤差は観測方程式の残差あるいは観測誤差から伝播してくるものとしてその分散共分散マトリクスを定式化した。さらに同定したシステムパラメーターによる状態方程式の適合度指標をも与えた。

今後は、この同定理論にもとづき多数室間の隙間風的な換気径路とそれらの風量等の測定システムを試作し、具体的な応用上の諸問題の検討を行ないたいと思う。これは逐次同定はオンラインで、一括同定はオフラインのバッチ処理で行う予定である。また熱系についても2.で述べたように建物という低周波数の気象入力が入作用する系においてはかなり大まかに空間離散化したモデルでも実測値をかなり良く再現できることがわかっていることから、この同定法が予測モデル構成法として実用になる可能性はあると考える。ただし同定されたパラメーターは物性的な熱容量や熱コンダクタンスというよりは現象を経験的に再現する状態方程式中の単なる係数といった意味を持つことになると思う。もし熱物性測定に適用しようとするときは、そもそも分布定数系として扱わねばならず、状態方程式のマトリクスも非線型となるからその固有関数展開の有限項近似を用いて常微分方程式化する必要があり、実用的な同定法になり得るかどうか疑問である。しかし少なくとも残された理論的問題として、この同定法では集中定数系という前提のほかに状

態値が全て直接観測可能という前提をおいたが、いくつかの状態値は直接観測出来ず、従ってシステムパラメーターのみならず状態値も推定するという、いわばパラメーターと状態の同時推定法についてはそのフィージビリティを考えてみる必要があると思われる。

謝辞

本論文をまとめるにあたり、御指導いただきました早稲田大学教授木村建一博士に感謝いたします。

参考文献

- 1) 奥山博康, 木村建一:「建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間数値積分公式」日本建築学会論文報告集 Vol. 269, 1978-7月, p.127
- 2) 木村建一, 奥山博康:「熱回路網数値解析法による自然空調に関する研究」日本建築学会大会学術講演梗概集, 1976
- 3) 奥山博康:「熱回路網数値解析法による自然空調に関する研究(その2)」日本建築学会大会学術講演梗概集, 1977
- 4) 奥山博康, 森野仁夫:「熱回路網モデルによる室温変動のシミュレーションと実測値の比較」日本建築学会大会学術講演梗概集, 1979
- 5) 奥山博康:「蓄熱槽の数値解析」日本建築学会大会学術講演梗概集, 1981
- 6) 奥山博康:「熱水分同時移動の解析法について」日本建築学会大会学術講演梗概集, 1982
- 7) 奥山博康:「熱湿気回路網によるシミュレーションの理論」空気調和・衛生工学会学術講演論文集, 1982, p. 457
- 8) 奥山博康:「空調システムシミュレーションの理論とアルゴリズム」空気調和・衛生工学会学術講演論文集, 1982, p. 461
- 9) 奥山博康:「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論」日本建築学会大会学術講演梗概集, 1983
- 10) 奥山博康:「熱回路網によるシミュレーションの理論と応用」空気調和・衛生工学会学術講演論文集, 1983, p. 541
- 11) 木村建一:「建築設備基礎理論演習」学献社
- 12) 斎藤正彦:「線形代数入門」東大出版会, 1969
- 13) 古田勝久:「線形システムの観測と同定」コロナ社, 1977
- 14) 中川 徹, 小柳義夫:「最小二乗法による実験データ解析」東大出版会, 1982
- 15) Gerald J. Bierman: "Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation" Academic Press
- 16) S. J. l'Anson, C. Irwin and A. T. Howarth: "Air Flow Measurement using three tracer gases", p. 245, Building and Environment, Vol. 17, No. 4, 1983
- 17) D. V. Pryor and C. Byron Winn: "A Sequential filter used for parameter estimation in a passive solar system", p. 65, Solar Energy Vol. 28, No. 1, 1982
- 18) 佐和隆光:「回帰分析」(朝倉書店, 1980)
- 19) 高橋安人:「システムと制御」第2版下, (朝岩波書店, 1980)
- 20) 坂和愛幸:「機械工学大系 45: 最適システム制御論」(コロナ社, 1972)
- 21) 宮川 洋, 佐藤拓未, 茅 陽一:「不規則信号論と動特性推定, 現代自動制御双書1」(朝)コロナ社, 1976

付録1 固有値 α_i の実部が負となることの証明過程

M が正定値であることを示す。まず M が対角要素のみからなる場合ではそれが明らかである。また有限要素法による、 M が非負の対称行列である場合においても次式において正定値となることを示すことができる。

$$\begin{aligned} {}^t p \cdot M \cdot p &= {}^t p \cdot \sum_{v_e} \int_{v_e} N_e \cdot N_e \cdot dv \cdot p \\ &\geq {}^t p \cdot \sum_{v_e} \int_{v_e} N_e \cdot dv \cdot \sum_{v_e} \int_{v_e} N_e \cdot dv \cdot p \\ &= \left(\sum_{v_e} \int_{v_e} N_e \cdot dv \cdot p \right) \cdot \left(\sum_{v_e} \int_{v_e} N_e \cdot dv \cdot p \right) > 0 \dots\dots\dots (75) \end{aligned}$$

ここで N_e は要素 e の各頂点での形状関数を要素に持つマトリクスである。また v_e は要素 e の領域を表し、 Σ は全要素にわたって直和をとることを表わす。ただし形状関数 N_i, N_j の性質として N_i, N_j の積の要素領域積分値は N_i, N_j それぞれの積分値の積より大なることを用いた。これらの性質は面積座標等を用いた積分公式により確かめられる。これは p を q に置き換えても成立する。次に C の負定値を示す。 p の i 番要素を p_i とすると次式の要素記述ができる。

$${}^t p \cdot C \cdot p = \sum_{i=1}^n \left(- \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ji} \cdot p_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i \cdot p_j \dots\dots\dots (76)$$

さらに質量保存則の (13) 式から次式がなりたつ。

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ji} \cdot p_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 \dots\dots\dots (77)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 \dots\dots\dots (78)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ji} \cdot p_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+n_0} c_{ji} \cdot p_i^2 \dots\dots\dots (79)$$

も一般に成立する。そこで (78), (79) 式を辺々加えた左辺の 1/2 は (77) の関係式により (76) 式の右辺第一項に代入できる。

$$\begin{aligned} {}^t p \cdot C \cdot p &= -(1/2) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+n_0} c_{ji} \cdot p_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i \cdot p_j \\ &= -(1/2) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i \cdot p_j \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot p_i^2 - (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+n_0} (c_{ij} + c_{ji}) \cdot p_i^2 \\ &= -(1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot (p_i - p_j)^2 - (1/2) \cdot \\ &\quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{n+n_0} (c_{ij} + c_{ji}) p_i^2 < 0 \dots\dots\dots (80) \end{aligned}$$

移流をマクロにとらえることは風上差分を意味し⁵⁾、 c_{ij}, c_{ji} はどちらか正または0である。従って $c_{ij} + c_{ji}$ は正なのである。ゆえに ${}^t p \cdot C \cdot p$ の負定値は示された。これは p を q に置き換えても成立する。

付録2 y, D, X, G の構成アルゴリズム

(a) $y(x_i, x_j, g_i)$: もし m_{ij} が既知パラメーターであれば i 番要素には $m_{ij} \cdot x_j$ を加える。またもし c_{ij} が既知パラメーターであれば i 番要素には $-c_{ij} \cdot x_j$ を加え、かつ j 番要素には $c_{ij} \cdot x_j$ を加える、ただしこの i または j が n より大きいときは除外する。さらにもし r_{ij} が既知パラメーターであれば i 番要素には $-r_{ij} \cdot g_j$ を加える。

(b) $D(x_i)$: m 内の k 番要素が m_{ij} とする。これに対し D 内の i 行 k 列へは $-x_j$ が入る。

(c) $G(g_i)$: r 内の k 番要素が r_{ij} とする。これに対し G 内の i 行 k 列へは g_j が入る。

(d) $X(x_i)$: c 内の k 番要素が c_{ij} とする。これに対し X 内の i 行 k 列へは x_j が、かつ j 行 k 列へは $-x_j$ が入る。ただしこの i または j が n より大きいときは除外する。

付録3 可同定性の必要十分条件の証明過程

(59) 式が必要条件であることは本文で述べた。同時に十分条件であることを示す。(41)式で示す A_0 は正定値対称である。従ってその逆行列あるいは (43) 式で示される W_i も正定値対称である。正定値対称行列はその必要十分条件としてすべて正の固有値を持つことがわかっているから¹²⁾、その1つを β_i とし対応する射影子を $Q_i (n_0 \times n_0)$ とすれば A_k^{-1} は次式のように展開できる。

$$A_k^{-1} = \sum_{i=1}^{n_0} \beta_i \cdot Q_i \dots\dots (\beta_i > 0) \dots\dots\dots (81)$$

ここである逆行列の固有値はもとの行列の固有値の逆数に等しいから A_k は次式のようになる。

$$A_k = \sum_{i=1}^{n_0} (1/\beta_i) \cdot Q_i \dots\dots (\beta_i > 0) \dots\dots\dots (82)$$

いま q_i を A_k^{-1} に対して最小固有値 $\beta_{i \min}$ を与える固有ベクトルとする。 q_i は長さが1になるように正規化されていると仮定しても一般性は失われない。そこで次式が成立つ。

$${}^t q_i \cdot A_k^{-1} \cdot q_i = \beta_{i \min} \cdot {}^t q_i \cdot q_i = \beta_{i \min} \dots\dots\dots (83)$$

さらに A_{k+1}^{-1} に対して同様に最小固有値 $\beta'_{i \min}$ を与える固有ベクトルを q'_i とすれば次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} \beta'_{i \min} &= {}^t q'_i \cdot A_{k+1}^{-1} \cdot q'_i = {}^t q'_i \cdot A_k^{-1} \cdot q'_i + {}^t q'_i \cdot Z_{k+1} \cdot W_{k+1} \cdot Z_{k+1} \cdot q'_i \\ &\geq {}^t q'_i \cdot A_k^{-1} \cdot q'_i + {}^t q'_i \cdot Z_{k+1} \cdot W_{k+1} \cdot Z_{k+1} \cdot q'_i \\ &= \beta_{i \min} + {}^t q'_i \cdot Z_{k+1} \cdot W_{k+1} \cdot Z_{k+1} \cdot q'_i \dots\dots\dots (84) \end{aligned}$$

ここに (84) 式において q_i の代りにいかなるベクトルを代入してもその β_i は $\beta_{i \min}$ より小さくならないこと¹²⁾を用いた。(84) 式の右辺第二項は全観測期間通してもある正の下限值 ϵ_0 を持つとみなせる。ゆえに k の増加とともに A_k^{-1} の最小固有値 $\beta_{i \min}$ は少なくとも ϵ_0 以上ずつ増加していく。従って (82) 式において $k \rightarrow \infty$ のとき $A_k \rightarrow [0]$ が示され、(58) 式から $a_k \rightarrow a_0$ が証明された。

SYNOPSIS

UDC : 697.13 : 536.7 : 517.9

STATE EQUATION OF GENERAL DIFFUSION SYSTEM USING NETWORK CONCEPTS AND THEORY OF SYSTEM PARAMETER IDENTIFICATION

by HIROYASU OKUYAMA*, Member of A. I. J.

A general diffusion system consisting of conduction and mass flow can be clearly modeled in the form of a state equation using network concepts. In the previous paper 1), a diffusion system comprised only of conduction was discussed. That the eigenvalue of the system is a real and negative number was proved, and an exact time integration scheme was given. In Section 3 of the present paper, the diffusion system is generalized including mass flow, and proof is provided that the real part of the eigenvalue of the system is negative. Also, a definition by formulation is given for system parameters, which are the three kinds of capacity m_{ij} , generalized conductance c_{ij} , and free input ratio r_{ij} . Next, two theories of system parameter identification are deduced from the modern method of least squares. One will be called "Batch Identification", which is implemented in a single step after a long period of observing state and input variables. Its formulation is indicated by (34), and the algorithm is described in Section 12. The other will be called "Sequential Identification", implemented successively at every short observation period. It is formulated as a parameter time discrete system indicated by (51 a) (51 b) (51 c) and (50), with the algorithm described in Section 13. The recursive equations of the latter are deduced from (34) employing Woodbury's matrix inversion Lemma. The sufficient and necessary condition of identifiability and proof of the asymptotic stability of the parameter time discrete system (51 a) are presented in Section 9. Error in an identified system parameter is considered to be caused by the residual of the observing equation or by the observing noise and is evaluated by co-variance matrix (61). Two indices are given in Section 11 enabling evaluation of the appropriateness of the state equation structured by parameters identified for real phenomena.

*Research Institute of Shimizu Construction Co., Ltd., Tokyo, Japan