

熱回路網の状態方程式モデルによる最適制御理論 その2:拡大系による基本理論の一般化と数値実験

正会員 ○ 奥山 博康*

熱回路網 最適レギュレータ制御 拡大系

1 はじめに

建物の室温制御等に現代制御理論を応用するために、制御対象の数式モデルである状態方程式の一般的構成法として熱回路網モデルを適用してみる。前報 [1] では最適レギュレータ問題の最小自乗法による解法を導き、この基本理論の数値実験による検証を行った。しかし基本理論であるが故に、制御の目標値が0であることや外乱を考慮していないこと、等の制約を設けていた。そこで本論文では拡大系というものを導入することによってそれらの制約を取り除く方法 [2] を導入し数値実験によって確認を行う。

2 制御対象の系の漸化式

建築物伝熱系を一般的かつシステマティックに状態方程式のモデルにするのが本熱回路網のモデリング法である。状態方程式モデルは既報 [3] に述べたごとくであるが、本論文では系に対する入力を制御操作によるものと外乱によるものに区別する必要があるので次式のように記述する。

$$\begin{aligned} M \cdot \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{C}_{oc} \cdot \mathbf{x}_{oc} + \mathbf{R}_c \cdot \mathbf{g}_c \\ &\quad + \mathbf{C}_{od} \cdot \mathbf{x}_{od} + \mathbf{R}_d \cdot \mathbf{g}_d \\ &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + [\mathbf{C}_{oc}, \mathbf{R}_c] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{oc} \\ \mathbf{g}_c \end{bmatrix} + [\mathbf{C}_{od}, \mathbf{R}_d] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{od} \\ \mathbf{g}_d \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{u}_c + \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{u}_d \end{aligned} \quad (1)$$

ここに記号は既報 [3] と同様であるが、 \mathbf{M} は熱容量マトリクス ($n \times n$)、 \mathbf{C} は熱コンダクタンスマトリクス ($n \times n$)、 \mathbf{x} は温度状態ベクトル (n) であり上の'は時間微分を表す。前述した二種類の入力をそれぞれ添字 c, d で区別するが、一般に \mathbf{x}_o は規定温度ベクトル (n_o)、 \mathbf{g} は発熱量ベクトル (n_g) である。これら系に対する入力ないしは境界条件を記述するマトリクスやベクトルをアルゴリズムとして構成するために約束を設けておく。それは温度節点番号と発熱節点番号に関して、制御操作入力によるものは外乱のそれよりも前詰めにすることである。ここで \mathbf{u}_c と \mathbf{u}_d の操作入力と外乱入力のベクトルのサイズは各々 (n_c) と (n_d) とする。(1) 式の時間常微分方程式の解法のために、 $\mathbf{C}^* = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}_c^* = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{D}_c$ 、 $\mathbf{D}_d^* = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{D}_d$ な

る記号定義をする。すると (1) 式は次の (2) 式のように記述される。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D}_c^* \cdot \mathbf{u}_c + \mathbf{D}_d^* \cdot \mathbf{u}_d \quad (2)$$

この状態方程式の解析的な時間積分は既報 [3] のように射影分解を用いて行うことが出来る。ここでは階段関数的な入力に対して Δt の時間間隔で厳密な時間積分を行っていく漸化式を定式化しておく。系の固有値の1つが α_i として対応する射影子を \mathbf{P}_i とする。推移マトリクス Φ は (3) 式、制御操作入力と外乱に対する駆動マトリクス \mathbf{U}_c 、 \mathbf{U}_d は共に (4) 式で計算される。 k は時刻番号である。これらのマトリクスを用いて時刻 k から時刻 $k+1$ への系の状態推移を計算する時間漸化式は (5) 式のようになる。

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot e^{\alpha_i \Delta t} \quad (3)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot (1/\alpha_i) \cdot (e^{\alpha_i \Delta t} - 1) \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{U}_c \cdot \mathbf{u}_{c k} + \mathbf{U}_d \cdot \mathbf{u}_{d k} \quad (5)$$

3 拡大系の導入

まず全状態変数のうち制御量となる一部の状態変数を出力する方程式を定義する。ここに \mathbf{H} は ($n_y \times n$) のサイズの定数マトリクスである。(6) 式を観測方程式と呼ぶことにする。

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_k \quad (6)$$

目標値ベクトル \mathbf{r} (n_y) を定義しベクトル \mathbf{y}_k がこれに近づくように制御する。次に (7) 式のようにいくつかの新たなベクトルを定義する。 ξ なるベクトルが0に近づくということは系が安定化することである。 ϵ が0に近づくことは目標値を達成することである。 ν_c が0に近づくことは外乱の下で系の平衡状態を達成する入力となることである。従って前二者を併せて状態ベクトルとし、 ν_c を入力とする系を構成すれば基本理論 [1] が適用できる。

$$\begin{cases} \xi_k = & \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \\ \epsilon_k = & \mathbf{y}_k - \mathbf{r} \\ \nu_{c k} = & \mathbf{u}_{c k+1} - \mathbf{u}_{c k} \end{cases} \quad (7)$$

(5)式で時刻添え字を1増やした式から(5)式を辺々引けば次の(8)式が記述できる。このとき外乱による入力是一定で変化しないという仮定を設ける。次に(6)の観測方程式で、時刻添え字を1増やした式から(6)式を辺々引いて、さらに両辺から r を引いて変数の置き換えなどを行えば次の(9)式が得られる。

$$\xi_{k+1} = \Phi \cdot \xi_k + U_c \cdot v_{c k} \quad (8)$$

$$\epsilon_{k+1} = H \cdot \xi_k + \epsilon_k \quad (9)$$

これらの(8)、(9)式から ξ 、 ϵ の合成を状態ベクトルとする系を構成すれば次式となる。ただし E は単位マトリクスを表し、ここでは $(n_y \times n_y)$ のサイズである。

$$\begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ \epsilon_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ H & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_k \\ \epsilon_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_c \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_{c k} \quad (10)$$

これを次のように記号定義して簡単化する。

$$z_{k+1} = A \cdot z_k + B \cdot v_{c k} \quad (11)$$

元の系における本来の目的はこの(11)式の拡大系に基本理論[1]を適用することによって達成される。

4 拡大系から元の系への変換

元の系で時間ステップが0から m までの最適制御軌道を考える。拡大系はその時間増分についての系である。 x_0 を与えれば(5)、(6)式などで z_0 が定まるから基本理論[1]により $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{m-1}^*$ および $v_{c 0}^*, v_{c 1}^*, \dots, v_{c m-2}^*$ を求める。 $u_{c 0}$ も与えれば(7)式からの次式により元の系での $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ と $u_{c 1}^*, u_{c 2}^*, \dots, u_{c m-1}^*$ が計算される。ここに*は最適値であることを表す。

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \xi_k \\ u_{c k+1} = u_{c k} + v_{c k} \end{cases} \quad (12)$$

5 数値実験

以上の拡大系の理論を数値実験によって確かめる。前報[1]での壁体(1x1m)6枚で立方体の室をつくり、室空気を電気ヒーターで直接加熱するものとする。従って熱回路網モデルは前報と同様であるが、9番節点が未知数の室空気温度となり、システムのサイズは $n = 9, n_o = 1, n_g = 1$ となる。ただし熱コンダクタンス、熱容量等のシステムパラメータは前報の6倍の値となる。0でない目標値の達成と外乱の考慮がなされるかを見るために室温の目標値を 20°C ($r_1 = 20$)、外気温の10番節点温度を -20°C とし、他の初期温度は 0°C とした。 $\Delta t = 0.01h$ 、 $m = 500$ である。操作量の電気ヒータ発熱量の変化を図1に、各節点の温度変化を図2に示す。妥当な結果が得られていると考えられるが、重みマトリクス[1]の種類間、各マトリクス内の対角要素間で大小関係を変えるとグラフの様相もかなり変化する。従って客観的な値決定法が必要であろう。

6 まとめ

熱回路網の状態方程式モデルを用いて、拡張された最適レギュレータ制御理論の数値実験を行った。本報では単にこの制御モデルが適用できることを示したに過ぎないが、重みマトリクスや制御系の与え方などによる結果の違いや、目標値や外乱が変化する場合の理論も今後検討する必要がある。

(参考文献) [1] 奥山博康: "熱回路網の状態方程式モデルによる最適制御理論, その1: 最適レギュレータ制御の基本的理論と数値実験," 建築学会大会学術講演梗概集(環境工学), 1989年10月, p.767 [2] 木村, 前田, 井上, 美坂, 高橋: "PC-9801 制御系設計プログラミング," 日刊工業新聞社, 1987年第4版 [3] 奥山博康: "建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究," 早稲田大学 建築環境工学 学位論文, 1987年12月(清水建設研究報告別冊第26号 1989年6月)

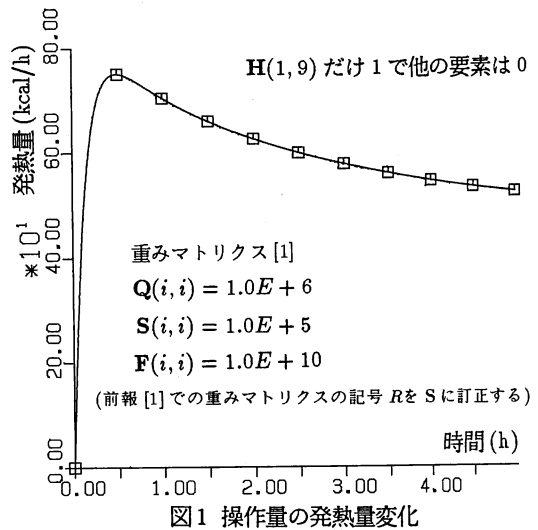


図1 操作量の発熱量変化

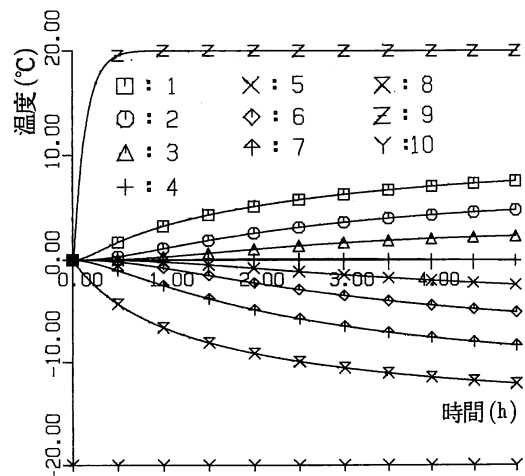


図2 各節点の温度変化

*清水建設(株) 技術研究所 主任研究員 工博