建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究

１ ９ ８ ７年 12 月

奥　山　博　康

建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究

1987年12月

奥山 博康

論文要旨

適正な建築環境を持つ建物を設計するために必要になる基本的で重要な技術の1つに伝熱や換気の予測計算法があげられる. 本研究の前半は, こうした現象をコンピューターを用いてシミュレーションするための, 一般的なモデル化の方法とその解法についてのものである. 一方, 実際に存在する建物の熱的な性能や換気性状の実態を現場測定により評価する技術も重要である. 本研究の後半はこうした測定データの解析法についてのものである.

建物に関する伝熱や換気のシミュレーションにおいては, 部分の精密なモデル化よりも, 部分と部分の関連を考慮することに重きをおく, 全体的で総合的なモデル化が重要である. 従来はともすれば分析的なアプローチに傾き過ぎていたと考えられる. そしてこれは測定法においても同様である. 本研究はこのような問題意識により行ったものである.

本研究の全ての成果を通して基本となるのは, 実現象を数学モデルとしてとらえる概念である. 伝熱については熱回路網モデルと呼ぶものを示している. この名称は, 数学モデルを図示すると, 電気回路網に似たものになることに由来する. 古くからこれと同様な言葉はあったが, 本研究ではその数学的背景と意味を新しいものとし, 従来のものの問題点を解決しただけでなく, さらに広い一般性を持つように拡張した. また解の精度の向上も実現した. この数学的内容については簡潔でありながら統一的な体系を持つようにし, むしろ有限要素法や差分法のモデルは特殊な場合としてみなす包括性も持っている. 次に換気については換気回路網のモデルを示した. これも従来のものより広く一般性を持つようにした. 以上の予測計算法における独特のモデル化の概念は, 数学的にむずかしいものではなく, 単にものの見方であり, 一般の技術者に容易に理解できるものとした. 従って, 従来は困難と思われていた種類のシミュレーションも, 実務的に行えるようになった.

さらに, 本研究では以上のシミュレーションモデルの同定法も示した. すなわち, 現場測定データをもとにして, モデルの中に含まれる多数の係数を, 統計的あるいは確率的に求める数学的方法も示した. シミュレーションと同定は, ちょうど逆の関係にある. 従って本研究の成果の全体は完結した体系を造っている. この同定理論の1つの応用として多数室における換気測定システムを作成した. 多数室換気測定法は, 国内外を通して多くの研究がなされているが, この理論によって, それらの持つ問題点を解決した. また建物の保温性や日射吸収性を現場測定により評価するシステムも実現した. 従来は静的な測定法がほとんどであったが, これは動的なものである. またこの同定理論による1つの特長は, 同一のデータ処理ソフトで, 測定対象物の多様性に汎用的に対応できることである.

本論文は7章により構成されている. 第1章は序論である. 第2章から第5章はコンピューターシミュレーションについてのものであり, 第6章は現場測定法についてのものである. 第7章は総括である. 以下に各章の要約を述べる.

第1章においてはまず, 現状の問題点のとらえ方とそれらに対する本研究からの解決法を明確に列記した. 次に関連する既往の研究を文献研究し, 過去の進展についての歴史観を形成するとともに, 各々の研究成果の持つ今後の課題と不備な点について詳細な考察を行った. そして最後に本研究の意義と位置ずけについて論じた. これは単に既往の研究に対するものとしてだけではなく, 広く工学的な分野間のものとしても行った.

第2章では熱回路網の数学モデルについて論じた．実現象の伝熱系は連続体であるが，分割近似することによって集中定数化し，熱容量を持つ節点系にモデル化する．この時に，総合的で自由なモデル化を可能とする実用的な方法として，検査体積法を示した．これは熱貫流率計算法の基本的知識を持つ技術者であれば行えるものである．この方法によって結局，3種のパラメータとして，熱容量m_{ij}，拡張熱コンダクタンスc_{ij}，と自由入力係数r_{ij}が得られる．節点方程式は簡潔にこれらのシステムパラメータだけによって定義した．この方程式によって，システム理論の状態方程式が一般的に組みあがるようにした．また有限要素法や差分法も含めて各種の集中定数系モデルを統一する理論も立てた．これらのモデルは，システムパラメータを共通言語として，接続性や互換性を持つようになり，標準化による様々な利便も期待できるようになった．

第3章では熱回路網の状態方程式モデルによるシミュレーション理論について論じた．この状態方程式モデルは連立常微分方程式である．従って解くためには時間積分する必要がある．このために本研究では，射影分解による解析解を導いた．従来は，このような統一的で全体的な方程式記述が不十分だっただけでなく，時間積分には差分のような近似解法がおこなわれていたが，誤差のない時間積分を行うことが可能となった．また，単なるシミュレーションだけでなく，一般的な伝熱系の動特性を指数関数和の明確な関数として把握しておくことも可能となった．このときの固有値の性質についてのいくつかの証明も行った．またシスティマティックなモデリングのために，部分システムの状態方程式どうしを連成する理論も示した．

第4章では，壁体伝熱について熱回路網の数値実験を行い，数学的精度について検討するとともに，実現象の予測精度も検証するために，太陽熱集熱器や室温について，実測値との比較も行った．まず数値実験による検討においては，どの程度の分割粗さであれば，十分な精度が得られるかの指針を与えた．また，射影分解による時間積分が正解を与えることや，時間差分解の誤差の大きさ，さらに検査体積法と有限要素法による解の違い等も示した．実測値との比較によって，計算値は実際の温度変化の傾向を良く追随することも確認した．

第5章では換気回路網のモデル化の方法と解法について論じ，実測値との比較や適用例も示した．建物だけでなく機械換気装置も含めて一般的にモデル化するために全圧節点系の考え方を述べた．この数学モデルは室内圧に関する非線形連立方程式系としてとらえられるが，これを振動や発散を起こさずに確実に解くために修正ニュートンラプソン法を示し，この修正の必要性についても考察した．またモデル化と計算を汎用性をもちながらも簡単なアルゴリズムで行うための単純で一般的なデータ構造を示した．さらに，風圧換気が支配的な低層住宅の隙間風について実測値との比較を行った．その結果，計算値は単に実現象の傾向予測ができる程度であることがわかった．この違いの原因は隙間の形状や所在の不確定さもあるが，外部風の動的な乱れを考慮しない現状の風圧係数の扱方にもあると考えられる．最後に，吹き抜けの中庭を持つ事務所建物の自然換気についての適用例を示した．その結果，この種の建築計画は風圧や煙突効果によって自然換気に適していることがわかった．

第6章では熱回路網による状態方程式の同定理論と応用例について述べた．同定理論は，最小二乗法をもとにして，一括同定と逐次同定の2つを導いた．前者は，観測期間終了後に，記録しておいた全部のデータに対して，一度に行うものであり，後者は，データサンプリング時間間隔ごとにリアルタイムで行っていくものである．さらに実際の測定システムの製作と実験によって，

この同定理論の有効性の検証を行った．まず，多数室換気測定システムでの実験においてはデータ処理ソフトとしての実用性は確認された．従来の方法は，データの数学的処理方法が不十分だったために問題があったが，それらはこの新しい方法によって解決された．建物の熱的性能を現場測定するシステムの実験においては，温度測定点がまばらにもかかわらず，良好な同定精度を得ることが出来た．さらに同定理論そのものの正確さを確かめるために，有限要素法によるシステムパラメータの逆探問題として数値実験も行った．その結果，良好な精度で同定されることがわかり，この理論の妥当性が確かめられた．

第7章では，本研究のまとめと成果を各章ごとに述べ，さらに今後の課題と展望も述べた．

本研究の指向したところを要するに，分析よりは総合化と体系化を，部分の解明よりは部分と部分の関連の解明を，複雑な扱いよりは単純明快な扱いを目指したものである．そこで，システム理論を基本思想とし，数学的には現代的な状態空間法の基本式に合せた．この基本式とは状態方程式であり，これをアルゴリズムとして組み上げるために，熱回路網モデルとこの定式化法を定めた．本研究のシミュレーション理論と同定理論についての多くの成果は，全てこの枠の中のものである．そして，それぞれはこの体系のなかでの設計法と計測法の要となる重要なものと考える．

本研究の多くの成果はモデル化の方法によってもたらされたものであるが，これは同時に適用範囲ももたらす．この限界は，本来は空間的な連続体で起こる実現象を，分割して近似化することによって生じる．しかし実用上必要な精度をもって，連続体で定義されるものに近似できることは確認された．

Abstract

This paper deals with building heat transfer and ventilation from the standpoint of basic theory for computerized calculation techniques. Unified and systematic thermal network modeling method with the system theory as background philosophy is presented to express practically complex heat transfer systems such as the one in passive solar house, and problems of multi-cell air flow measurements and thermal performance measurements of buildings are discussed from the new viewpoint of system identification. This paper consists of seven chapters as summarized in the followings.

Chapter 1 is an "Introduction." A bibliographical study is made, and characteristics of the relevant problems are also distinctly listed.

Chapter 2 is entitled "State Equation by Thermal Network," establishing the theory of synthetic and general modeling of thermal network systems. The control volume method is proposed as a parameter lumping method similar to the finite difference method. This enables to model freely without being tied down to the coordinate system. The three kinds of system parameters of thermal capacity, extended thermal conductance, and free input coefficient can be obtained by this method, and a state equation in general matrix form is structured. Further, with the system parameters as the common language, a unified theory is developed for connecting the models together with the finite element method, the finite difference method, and the control volume method, so that advantages can be looked forward by this generalization.

Chapter 3 is entitled "Simulation Theory by State Equation," where theories are developed for implementing simulations with good precision and efficiency. The convolutional solution of the state equation is expanded into eigenfunctions explicitly by spectral decomposition, and analytical time integration formulae for some kinds of input functions are derived. Regarding the conventional solutions of finite difference with time, derivations and proofs of the general conditions of numerical stability are achieved by this state equation model. Furthermore, systematic modeling and improvement of computational economy can be realized by a theory coupling the state equations of subsystems with output equations. In addition, it is shown that simultaneous transfer phenomena of heat and moisture can be handled with similar state equation models.

In Chapter 4, "Numerical Experiments in Thermal Network and Validation," mathematical and actual phenomena prediction accuracies of thermal networks are studied. In numerical experiments on wall heat transfer, examinations are made with regard to the sizes of errors in the time difference method, while a guide is given to the roughness of spatial discretization required to obtain sufficient accuracy. Further, the differences in the solutions by the control volume method and the finite element method are discussed based on the sizes of the eigenvalues. Meanwhile, validation of the thermal network is also made

through comparisons with measured values in the cases of outlet air temperature of solar collector and room temperature variation of a certain building .

In Chapter 5, "Air Flow Network,"general modeling and a solution method for ventilation are shown, with examples of verification and application. The concept of a nodal system of total pressure is shown for general modeling of not only a building, but a total system including air ducts for mechanical ventilation. A modified Newton-Raphson method is presented for rapidly and surely solving non-linear simultaneous equations of these pressures. A number of topics for future study are pointed out based on the comparisons between measured and calculated values regarding infiltration of residences. It is found through an application to an office building with an atrium-type inner court that this form of building plan is suited to passive ventilation due to wind pressure and stack effect.

Chapter 6 is entitled "System Parameter Identification of State Equation" in which the two theories of batch identification and successive identification are deduced based on the least-squares method, with theory verified by preparation of an actual measuring system and experiments. A multi-cell air flows measuring system is made applying this theory to the diffusion system of tracer gas, and experimental results shows practicality of the theory, although a number of problems regarding hardware remains for improvement. The results of experiments show even better accuracy of indentification on a system for on-site measurements of the thermal performance of a building in the case of applying theory to the diffusion system of temperature. Furthermore the appropriateness of the theory itself is ascertained, by solving with numerical experiments inverse problems of system parameters through a finite element method on heat transfer systems.

Chapter 7 is entitled "Summary," and in it principal results in this thesis by all chapters are summarized, and the outlook for future are also discussed.

目　次

第4章　熱回路網の数値実験と検証

第5章　換気回路網

第6章　状態方程式のシステムパラメータ同定

本論文で用いる字体

本論文の中で使用する数式上の字体について，スカラーはxのように小文字の斜体，ベクトルは$\mathbf{x}$のように小文字の直立した太文字，マトリクスは$\mathbf{X}$のように大文字の直立した太文字と約束する．またギリシャ文字は$\mathrm{\alpha}$, $\mathrm{\beta}$のように直立体を用いる．ただし座標についてはx, y, zのように直立した小文字で表す．

第1章　序論

1.1問題点の把握と解決法

建築物とその設備は室内環境を快適かつ安全に保つためにつくられるといっても過言ではない．そのために，とりわけ温熱環境と空気の質的な環境は重要である．これらは建物の伝熱と換気現象から成り立つ．一方，こうした建築環境を設計するためには，予測評価法が必要であり，そのためには現象の何らかの数学モデルが必要となってくる．そしてこの数学モデルとその解法は建物の伝熱現象と換気現象の持つ以下の問題点と特徴を考慮に入れることのできるものでなければならない．

(イ)種々の伝熱形態による複雑さ

建物における伝熱では，伝導，伝達，輻射，物質移動の全ての伝熱形態を考慮しなければならない．例えば，壁，床，屋根などの構成部材の内部では伝導伝熱が主に行われるが，もしそれらの内部に中空層があり，空気が流れていれば物質移動による熱流も加わることになる．さらに構成部材表面では対流熱伝達と輻射熱伝達が起こっている．また換気による室間の空気の流れも物質移動による熱流をつくる．

(ロ)熱流の多次元性

壁体等であれば一次元熱流と見なす場合が多いが，内部で熱橋の影響が大きいときや空気の流通する中空層があるとき，あるいは中空層をはさんで両側表面間に輻射伝熱があるときなどは多次元的取り扱いが必要となってくる．また室内表面間の長波長輻射伝熱も多次元的に複雑な熱的結びつき方で行われているとみなされる．

(ハ)非定常現象

これは言い換えれば蓄熱効果である．省エネルギーの要求によって，自然エネルギーのうち，とりわけ太陽熱の建築計画的利用法の見なおしが注目されるようになってきた．太陽熱は変動しやすいエネルギー源であるから構成部材への蓄熱効果を利用する方法は，その中でも重要である．

(ニ)熱的な連成効果

例えば，室温の形成過程を考えるとき，壁体等の構成部分の伝熱だけにこだわってすむものではなく，構成部分間の熱的相互影響を考えなければならないし，さらに室と室の間の空気の流れや，隔壁を通しての熱貫流による他室との相互影響も考慮しなければならない．特に，自然エネルギーの建築計画的あるいは設備計画的な利用システムを設計するときには，そのエネルギー源は希薄なものであるから，十分な量の供給を行える人工的な熱源との複合を計らねばならない．従って両者の熱的な相互影響を正確に考慮する必要がある．

(ホ)熱系の非線型性

例えば，室温は他室あるいは外気と換気風量によって大きく影響を受ける．ところが逆に換気風量は煙突効果等から室温によって大きく影響を受ける．従って建物の伝熱系の構造は温度自身によって変化するという非線型性を持つことになる．また輻射熱伝達率や対流熱伝達率の温度自身による変化もよく知られていることである．さらに建物外壁や内部の室間の開口が開け

閉めされるとすれば，これによって換気風量は変化するとともに熱貫流も変化する．つまり，建物の伝熱系の構造は時間を追って変化するという時変性も持つことになる．これも一種の非線型性である．

(ヘ)低周波数の熱的入力

建物に作用する熱的入力とは，外気温，日射量，冷暖房の投入熱量などである．これらの入力の特徴は最小で24時間周期程度の比較的に低周波数であることである．予測評価の数学モデルはこの特徴を生かしたものであるべきである．

(ト)換気系の複雑さ

建物の換気系の特徴の1つは風力，煙突効果の自然換気の駆動力だけでなく，送風機等の機械換気の駆動力も複合的に作用することである．また水道の管網計算の場合と異なり，圧力節点間を結ぶ枝は1本だけと見なすことができない．なぜならば換気の圧力節点は室内圧と呼ばれるが，これは高さ的に各室の床面に位置し，そのため，隣接する異なった室温の2室があってそれらの間に高さの異なる幾つかの通気路があれば，それらは全て別々の枝と見なさねばならないからである．従って建物の換気系では圧力節点の数に比べ枝数が圧倒的多くなる傾向がある．さらにもう1つの特徴は，それらの隙間等の通気路の形状によって通気抵抗指数が1から2の範囲で異なっていることである．日本の気候の性質から建物の通風計画は重要で，従って換気現象を予測評価することも重要である．

(チ)熱と湿気の相互影響

これは主に建築構成部材内でのハイグロスコピック状態での相互影響を意味する．建物の熱的性能の予測評価においては，通常，換気などの空気の流れによる湿気流だけが考慮され，壁体等の透湿などは無視されることが多い．しかし日本の気候は高温多湿である特徴を持つ以上，熱と湿気の相互影響を考慮した予測評価も必要となる場合もあるであろう．

(イ)~(チ)のように，建築分野であるがゆえに多くの要因がからみ合い，従って予測評価のための数学モデルとその解法は複雑で難解にならざるを得ないと考えるのではなく，むしろ建築分野だからこそ，これらの問題をより単純明快かつスマートに扱うことができるような新しいものの見方とそれによる方法を提案すること，これが本研究の1つの目的である．

すなわち具体的には，予測評価の問題に対し，本研究では次のような概念と方法論を提案する．

(a)回路網の概念

本研究においては，分布定数系(連続体)の実現象を集中定数系に近似して扱うが，このとき，分割された各部分はそれぞれ他の全ての部分とつながっていると考える．また数学モデルもそのように定式化する．これが本研究でいう回路網の意味である．このことにより，(ロ)の多次元性と(ニ)の連成効果の問題は，コンピューター利用に適したモデリングが可能となり，容易に解決される．

これは定式化法については第2章の2.1で述べる．

(b)検査体積法による空間的離散化

集中定数系に近似するために検査体積法の考えを主として用いる．検査体積法とは，計算しようとする全体系を，いくつかの部分に分け，各部分での熱流バランスあるいは何等かの保存則を直接に記述するものである．従って分布定数系を記述する偏微分方程式から数学的な方法によって集中定数系の近似モデルを導く有限要素法，差分法などと比較し，座標系に縛られずに自由なモデル化が可能となる．また非定常性を生み出す熱容量等は，その検査体積の中心に凝集し，これを節点と見なす．従って節点間の伝熱等は定常として扱えることになり，これを次の拡張コンダクタンスで表現する．

(c)拡張コンダクタンスのとらえ方

通常の概念では，コンダクタンスは伝導だけに関して定義されているものであるが，これを対流伝達，輻射伝達，さらには物質移動の範囲までにも拡張定義することにより，複雑な伝熱現象を統一的にかつ単純にとらえることを可能とする．こうして(イ)の問題に対応する．

これは前の検査体積法とともに第2章の2.3で具体的に論じる．

(d)状態方程式記述

一般に種々の工学上の動的(ダイナミカル)な問題に対して，有望視されているシステム理論がある．これはベクトル·マトリクス形式の常微分方程式を，状態方程式と呼ぶ基本的数学モデルとしている．本研究では(a)(b)(c)の考え方により，対象とする建物の伝熱系や何等かの拡散系は明快にかつシステマテックに状態方程式モデルとなることを示す．また同じく集中定数系である有限要素法や差分法と状態方程式との関係も示される．これは回路網の概念が状態方程式の骨格を構成するとみなせるからである．またこのような統一的数式記述により，線型代数の計算技術や，固有値解析技術などの既製の数学上の成果が応用し易くなる．

この定式化法については第2章の2.2で述べ，各種の集中定数化法の統一あるいは標準化については2.5で論じる．

(e)射影分解による解析的時間積分

(ハ)の非定常現象は(d)の数式記述により数学モデル化される．この状態方程式は時間に関する常微分方程式であるから，非定常現象を解いていくこと，言い換えればシミュレーションをすることは，時間積分をすることに帰着される．この方法には従来，近似積分が用いられてきたのに対し，本研究では厳密解を与える解析的時間積分法を提示する．従って伝熱系などの拡散系の状態方程式の特性も解明する．また，これによって系の熱的動特性を関数的に把握することが可能となる．

これは第3章の3.2および3.3において述べる．

(f)熱湿気同時移動の状態方程式

温度の拡散系と湿気の拡散系のそれぞれにおいて，他方からの影響を入力とする状態方程式が構成される．従って両者の系から成る全体系については，それぞれの状態方程式の次数の2倍の次数を持つ状態方程式が構成される．こうして熱湿気の同時拡散系といえども全く同一形式の状態方程式でモデル化され，(e)と同様の解法プロセスにのせて予測計算が可能となることを示す．

これは第3章の3.8で述べる.

(g)換気回路網の定式化法

(a)の回路網の概念は換気系のモデリングにおいても有効である. しかし定式化法については,伝熱系などの拡散系に比べて異なったものとなる. これは(ト)で述べたように, 圧力差と風量の関係式での抵抗指数によりそれらの関係が非線型であることと, 多数室におけるある2つの室をとってみても, その間の通気路は一般に複数あると見なさねばならないことに起因する. すなわち拡散系のように近似的な線型の状態方程式を構成するのは難しい. 従って換気系のモデリングは数学的な表示よりも, コンピューターのアルゴリズムに直結した形のものとして提示する.

この一般的なデータ構造などについては第5章の5.1.1において述べる.

(h)全圧節点系のとらえ方

(ト)で述べたように建物の換気系には自然換気駆動力だけでなく機械換気の駆動力も複合的に作用する. 送風機によって換気ダクト内を流れる空気では動圧が顕著になってくるのに対し,室内では静圧が支配的である. ダクト系に対しては統一的に全圧で扱うことの有利さが良く知られているが, 本論文では建物の室も含め全体にこの考え方を適用する. こうして建物換気系が機械換気を含んでも, 結局は底面に全圧を持つ複数のセルと, これらの間を結ぶ通気路の集まりの簡単なモデルでとらえられるようになる.

これは第5章の5.2で具体的に論じる.

(i)圧力に関する非線型方程式の解法

(ト)で述べたように換気回路網は, 水道などの配水管網と異なるたくさんの特徴を持つ. 従って, その解法も単純に流用することはできない. 本研究では室内圧ベクトルに関するヤコビアンマトリクスを用いた修正ニュートンラプソン法を示す.

これは第5章の5.1.2でその方法を, 普通のニュートンラプソン法に修正を加えなければならない必要性と, この修正法の有効性を5.1.3で論じる.

(j)熱系その他と換気系の連成

(ホ)で述べたように建物の伝熱系の非線型性が最も顕著となるのは換気系と熱系の相互影響においてである. 本研究では(c)で述べた拡張コンダクタンスのとらえ方により換気風量も物質移動による拡張コンダクタンスとして一般的に扱われる. 従って両者の系の連成計算も一般的アルゴリズムの中で行える.

これは第5章の5.3で述べる.

(k)回路網のモード変化の考え方

(ホ)で述べた非線型性のうち, 時変性は, 特に自然エネルギーの建築計画的利用法の中で問題となる. 例えば昼間は日射を取り入れるため窓ガラスの外側の断熱戸を開け, 夜間は室内からの熱損失を防ぐため, その断熱戸を閉じることなどは時間を追って熱的な構造が変化する問題である. 本研究ではこの問題に対し, 回路網のモード変化という考え方を定義することによって単純に対応する方法を示す.

これは第3章の3.7で具体的に述べる.

(l)状態方程式の次数の縮約

状態方程式の次数が大きくなってくれば計算経済性は悪くなってくる．振動解析の分野においてはエネルギー原理あるいはハミルトンの原理を用いて振動方程式の次数を減らす方法を導いている．本研究では時間領域の重み付き残差法から，より単純にその方法を導く．

これは第3章の3.5で述べる．

(m)サブシステムの連成法

建物および設備の伝熱系について，回路網の概念により，一括して状態方程式モデルを組みあげることも不可能ではないが，その次数が過大になる場合もある．加えて設計対象物毎にいちいちモデルを組みあげるのが繁雑になる場合もある．デザインのバリエーションによって変化するのはコンポーネント自体ではなく，コンポーネント間の組み合わせである場合は多いであろう．そのために，シミュレーションのための時間積分は，コンポーネント毎の次数の低い状態方程式に対して個別に行えるようにする方法も提示する．

これは第3章の3.6で述べる．

以上が設計のための予測評価に関して本研究で提示する，主な考え方と方法である．

次に，本研究では予測評価法とは逆の問題である測定法も提案する．すなわち，予測評価においては何等かの演えき的方法により数学モデルを組みあげる．これに対し，逆の問題である測定法とは，観測データから帰納的に数学モデルを求める方法である．これは，いかなる工学分野においても予測評価と並んで重要な問題である．例えば，建物の換気測定法は一般に，トレーサーガスの建物内での拡散系の数学モデルについて，その中に含まれるパラメーターとしての風量を求めようとすることであるとみなせる．この場合は観測データから数学モデルを求めることが最終目的である．ところが建物の伝熱系の設計においては実際の建物の測定から得られた，より実現象に整合する熱貫流率や熱物性，あるいは演えき的手法では作るのが困難なコンポーネントの数学モデルを，さらに設計情報にフィードバックすることも考えられる．また冷暖房の制御においては制御対象の数学モデルを必要とすることもあるが，これを現場の測定から帰納的に作れば，より現象に合うものが出来る．そして以上の意味での，主に温度やトレーサーガスの建物での拡散系についての現場測定法は，前記(イ),(ロ),(ハ),(ニ),(ヘ)の問題点と特徴に加えて以下の問題点と特徴も考慮に入れたものでなければならない．

(リ)不規則な動的状態での測定

現場測定を前提とするから，建物の伝熱では不規則な外気温や日射量の入力が作用しており，従って室温もこれに応じて変動する．この点は部材の熱貫流試験法のように定常状態をつくれる場合と大きな相違点である．逆に(ハ)で述べたような，非定常現象を表す数学モデル上のパラメーターを観測値から評価しようとするときにはむしろ動的状態でなければならないといえる．

(ヌ)比較的少ない個数の観測値からたくさんのパラメーターを求める

換気風量の測定を例にとれば，トレーサーガス濃度の観測値の個数は室数の分しかないのに比べ，求めたい室間あるいは外気との換気風量の個数は圧倒的に多い．同様なことは伝熱系においてもいえる．伝熱系を回路網のモデルでとらえた場合，節点の温度の観測値の個数に比べて節

点間の拡張コンダクタンスの個数は圧倒的に多い．またこれらの求めようとするものは直接的に測定はできない．

(ル)測定対象物のバリエーション

建物の形態はデザインによって1個々全て異なるといっていいほどである．室数や間取りもさまざまである．従って室間の換気風量による結びつき方もさまざまである．実用的な換気測定システムとなるためのデータ解析ソフトの1つの重要な条件は，この測定対象物のバリエーションに汎用的にかつ容易に対応できることである．このことは伝熱系についての測定システムにおいても同じである．

(ヲ)誤差の評価

観測値は必ず誤差を持つ．こうした観測値を用いて解析し，パラメーターを求めるとすれば，その誤差伝播の量は正確に評価されなければならない．さらにこのデータ解析上，仮定した数学モデルの構造と実現象の差異にもとずく誤差も統計的な意味で評価されなければならない．

(ワ)リアルタイム処理

測定によって得られた数学モデルを制御に用いる場合には，測定過程と同時的に数学モデルが得られていかなければならない．

以上のごとく，多数室換気測定では各室のガス濃度変化の観測から換気風量を求めるが，このように相互影響のある多くの変数の観測によって，それよりもはるかに多くのパラメーターを推定するような問題を，状態方程式のパラメーター同定という新しい観点からとらえ，この方法を提案することが本研究の2つめの大きな目的である．

すなわち具体的には，測定法の問題に対し，本研究では次のような考え方と方法論を解決法として提案する．

(n)回路網の概念による状態方程式のパラメーター同定という考え方

集中定数系に近似された一般的な拡散現象は(c)の拡張コンダクタンスの考え方により統一的にとらえられ，(a)の回路網の概念によりコンピューター利用上汎用的な(d)の状態方程式で記述される．状態方程式は現象の非定常の状態を記述するから，この方程式を測定上の基本的解析モデルとすれば，(リ)の不規則な動的状態での測定に対しても対応できることになる．また(ル)の測定対象物のバリエーションに対しても対応できることにになる．そして推定したい換気風量あるいは熱コンダクタンスのような拡張コンダクタンスはこの方程式中のパラメーターと見なされ，従ってこれらを求めることはパラメーター同定としてとらえられる．ちなみに同定とは制御理論において定義されている意味であり，それは「測定されたプロセスの応答からプロセスの動的挙動を表す数学的モデルをつくりあげることをいい，近代デジタル制御における重要技術である．」とされている．

これは第6章の6.1で述べる．

(o)一般化最小二乗法

本研究では状態方程式の誤差を二次形式の時間積分量としたものを評価関数として最小二乗法を適用する．すなわちこのことは連立の常微分方程式に対して適用される最小二乗法を意味

する．従って(ヌ)の問題点は解決される．さらに観測誤差の伝播構造は回路網の概念によって明確に定式化されるから推定結果の良好な一般最小二乗法にすることができる．

これは第6章の，とくに6.1.3で論じる．

(p)一括同定と逐次同定

長い観測期間のデータを蓄積してから，一括して同定する方法と，データサンプリング時間間隔毎に逐次同定していく方法を示す．後者の方法によって(ワ)のリアルタイム同定が可能となる．

これらは第6章において，一括同定については6.1.2で，逐次同定については6.1.4で述べる．

(q)同定結果の評価法

本研究では，同定したパラメーターの誤差分散だけではなく，同定したパラメーターによって構成される状態方程式の実現象への適合度評価指標をいくつか与える．つまり単に観測誤差だけでなく，方程式の次数や構造の不適合をも考慮するために残差を利用して評価する方法を示す．

これは第6章の6.1.5で述べる．

(r)マイクロコンピューターを利用した実際の測定システム

本研究ではこの同定理論について数値実験による検証だけでなく，実際の測定システムとすることを目標とする．従って，現場の計測機器からの観測データはマイクロコンピューターでリアルタイムに解析するような実際の測定システムを作成した．

多数室換気測定システムについては第6章の6.2で，建物の熱的性能の現場測定システムについては6.3で述べる．

以上が本研究で扱う問題と目的及びそれらの主な解決方法である．

1.2　既往の研究

1.2.1　伝熱解析の既往の研究

伝熱系を分布定数系の数学モデルでとらえるか，あるいは集中定数系の数学モデルでとらえるかで既往の研究は2つに大別される．そして研究の歴史が古く，実用上も主流になっているのは分布定数系のとらえ方である．

i)分布定数系の数学モデル

熱伝導の偏微分方程式の解析的な解が求められるのは，空間次元も境界条件も単純な場合だけである．一方，建物の伝熱系における熱流は，壁体に関しては法線方向の1次元熱流と見なせる場合が多いことから，分布定数系の数学モデルといっても既往の研究で扱われているのは壁体の1次元伝熱系である．すなわち建物全体を直接に分布定数系のモデルにするのは困難である．

壁体の1次元伝熱系を記述する偏微分方程式の解析的解を求めるための研究は古くから行われている．特に外気温，日射量などの条件を調和解析などによりフーリエ級数の周期関数で表した場合については，前田の解式があり，建築学大系に便利な図表とともにまとめられている．[1]　同様な周期関数の条件に対しての解法は，米国においては，C.O.MackeyとL.T.Wright等によって研究されている．[2]

しかし，これらの方法は，いわゆる不定常状態と見なさなければならない冷暖房開始直後の過渡的状態や，不規則な変動をする日射の影響の正しい予測評価には不十分である．そこで壁体に対して任意の変動をする条件が作用している場合の解を求めるためにラプラス変換による解法が研究された．単層の壁体に関してはラプラス変換によって簡単に解が求まるため，問題となったのは多層壁体に関してであった．この問題に対し，境界層における発熱や[3]，熱容量0の中空層がある場合[4]も含め，長谷川が解式を与えた．長谷川は周期的熱伝導の問題に対しても前田のとった方法とは別に，ラプラス変換を用いた解法を示した．[5]　さらに壁体の伝熱系における像空間での特性関数の特異点(pole)が負の実根であることも示した．[3]

しかし，この長谷川の解法は複雑で難解であったため，さらに実用的な解法をめざして研究がなされた．そしてこの実用的解法となる基本的考え方は，実は長谷川の論文が掲載される2年前に米国のL.A.Pipes[6]によって示されていた．多層壁体のある層について片側の温度と熱流に対し，もう一方の温度と熱流の関係をラプラス変換によって像空間に移してみれば，像空間でのそれらの関係式は2×2のマトリクスで表せる．このマトリクスの中味がいわゆる伝達関数であり，電気的現象との相似から4端子行列と呼ばれる．つまりある層の片側への温度と熱流の入力に対するもう一方の側の温度と熱流の出力は，像空間においては4端子行列によって単純にベクトルとマトリクスの積で表示される．そこで多層壁体を考えると，隣接する2つの層の境界面の厚みは0であり，それゆえ熱容量は0であるから，この境界面の片側からの熱流はもう一方の側への熱流に等しく，かつ両側の層のこの境界面での温度は同じものを共有する．従ってこのことから多層壁体全体でも，像空間では各層の4端子行列の単純な積で表示され，壁の両側の温度と熱流の関係が表される．

ここで単純な単層の場合を考えてみる．例えば，原空間での時間変数をtとし，対応するラプラス変換の像空間での変数をsとすれば，原空間のステップ関数は像空間では$1/s$である．これを4端子行列表示の一方の側の温度入力として代入し，もう一方の側を0におく．このとき原空間での両側の熱流はそれぞれ吸熱応答，貫流応答などと呼ばれる．像空間でのこれらの熱流応答は単純計算式で求められるし，これらの原空間への逆変換もHeavisideの展開定理によって容易に行える．

次に多層の場合も各層の4端子行列の積によって全体の4端子行列は，像空間においては簡単に計算できるが，しかし扱いやすい関数形として表しておくのは困難である．従って単純にHeavisideの展開定理で逆変換することも困難となる．

この困難は，D.G.Stephenson, G.P.Mitalas[7][8]とJ.G.Arseneault[9]によって解決された．しかし，このためにはコンピューターの利用が必要であった．彼らは，原空間での熱流応答は指数関数項の無限級数になることがわかっているのだから，その指数部分の時間変数に対する係数，言い換えれば根と，この指数関数に対する係数を数値計算的に求めれば良いと考えた．まずこの形の無限級数を像空間に移せば，$exp(\alpha t)$は$1/(s-\alpha)$になることから，sが根αに等しくなるとき0になるような，sの1次式を分母に持ち，分子は定数であるような分数の項の無限級数となる．一方，4端子行列表示から，温度のステップ入力に対する熱流応答の像空間での解式は，1行2列めの伝達関数を分母に持つ．従って両者の等置から，求めるべき無限個の根は1行2列めの伝達関数を0とおいたときの根となる．根は像空間でニュートン法によって数値的に求めることができる．また1つの

根が求まれば対応する係数も計算できる．この根を次々に，次第に絶対値の大きなものを求めていく過程に非常に巧妙な方法が松尾[17]によって工夫されている．これらの単位応答が求まれば，まず時間微分し，重み関数も直ちに得られ，重み関数とのデュアメル積分によって任意の関数の温度入力に対する熱流応答が求められる．一方，Nessi A. and L. Nisolleら[10]は，不規則な入力波形でも3角波パルス等の時系列で表され，応答が計算できることを示していた．この考え方を用い壁体の温度励振に対する熱流応答をレスポンスファクターとして定めた．さらに重畳の原理から各種のウェイティングファクターも定義し，これらによる建物の年間熱負荷計算法を開発した．

ところが，単純な1次元伝熱壁体についての応答係数については研究者によって相違はないものの，室温や熱負荷の計算にまでもっていくための重み係数(ウェイティングファクター)の計算の仕方には違いが出てくる．これは前者に比べ，後者で考慮すべき伝熱系は室全体での多次元的で複雑な伝熱系となるため，この伝熱機構の仮定の仕方で異なってしまうためである．熱流構造をあらかじめ決めておくことは，建築意匠によるバリエーションを考えれば困難な場合が生じる．ここに応答係数法の1つの欠点が表されている．次のii)に述べる集中定数系の考え方を発展させれば，このような複雑な伝熱機構といえども実現象に合ったモデル化をすることは可能となる．とにかく，G.P.Mitalasの応答係数の基本的考え方はASHRAEのTask Groupに採用されたが，重み係数の計算の仕方については簡略化されたものが採られた．G.P.Mitalasはこの簡略法と彼の正確な方法の違いを実験を通じて論じている.[11]　この重み係数の計算の仕方は，特に日射熱取得の扱いで異なっており，これらASHRAE, G.P.Mitalasの方法の他にも，木村，石野らの方法[12][13]がある．またこのような違いがあるため，実験によって重み係数を求めることも行われ，田中，宮川らは木村の指導のもとに，回転実験室を用いて行った．[14]　しかし測定値から重み係数を求める方法については，本研究で述べるところの同定理論から提案し改善されるべきことが多い．応答係数法にもとずく年間熱負荷計算法の日本への紹介は木村によって行われ，各種の解説書も書かれた.[15] また松尾，武田ら[16][17]によっても計算プログラムの開発が行われ，日本においても定着した技術となった．

しかし応答係数法のとらえ方も，複雑な建物の伝熱系に起こるあらゆる問題に対応できる完全なものではない．対応の困難な問題点はこの計算体系を成立させるためにとる仮定から派生する．まず壁体に関しての1次元伝熱の仮定がある．従っての(イ),(ロ)で述べたように異形壁であったり，内部に換気と輻射のある中空層がある場合などには対応が困難である．次には線型定数系の仮定がある．この仮定があってはじめて重畳原理が成立する．応答係数はそもそも熱的な構造が時間的に不変な系においてはじめて意味を持つ．従って，(ホ)で述べたような温度非線型性や，時変性を持つ建物の伝熱系には対応が困難である．

従って，これらの問題点があるために今も種々の解析法が研究されている．荒谷らは壁体だけでなく，柱，梁，隅角部，室内器物について，室温のステップ関数入力に対する表面熱流の単位応答は指数関数項の和で求まっていることを前提にして，逐次積分法による室温および負荷変動の解析法[18]を提示した．このような部材の単位応答関数は，Stephensonらによって1次元多層壁体については求められるようになっており，またKusuda[19]によって円筒，球などの単純なものについても求められるようになっている．さて，この熱流応答の特性関数を，ある時間間隔におい

て積分したときの熱流による熱平衡式を，温度の時間変化を未知数として解く．従ってこの方法は空間的な温度分布を逐次得ていくことにより，(ホ)の非線型性の問題に対応する方法とみなされる．しかし一般に多次元的に複雑な物体と境界条件については，ラプラス変換による像空間での表現さえ困難であり，従って単位応答などの特性関数を求めることは困難になる．従って彼らは，隅角部などの単位応答は差分法などの数値シミュレーションによって求めようとしている．すなわち，この解析では，まず最初に問題とされるべきところの，多次元的な計算対象物の特性関数を求める方法については適当なものは示されていない．実は，多次元的な形態の物についてはは分布定数系ではなく，集中定数系に近似したあと，この固有値解析を行って特性関数を求めるのが適当と思われる．また建物伝熱系全体を数式モデルでとらえる際に，より統一的で簡明な考え方を導入しない限り，これらの数式記述は複雑なものとなってしまい，(ニ)での連成問題を実用的な形で解決したことにはならないであろう．

一方，同様な問題意識から浦野，渡辺らによって状態遷移行列による多層平面壁体伝熱系の解析法[20)21)]が研究されている．これは文字通り，1次元伝熱系に関するもので(ロ)での多次元性の問題点や(ニ)の連成の問題を本質的に解決する試みではなく，荒谷らと同様に(ホ)の非線型性の問題解決への方法とみなされる．そして具体的には，壁体表面での各種の熱伝達率の非線型性についてであると思われる．この研究においては，壁体の熱流応答が有限項の指数関数の和で表されていることを前提にしている点では荒谷らと同様である．しかし非線型性の問題に対応するために，荒谷らは空間的温度分布を逐次に得ていく方法をとったのに対し，渡辺らは仮想的な熱流を逐次に得ていく方法をとっている．仮想的な熱流とは，熱流応答の指数関数項の和において，それぞれの項ごとに計算される熱流を意味し，従ってこれらは実際の物理現象の熱流とは直接関係なく，項数分だけ総和されてはじめて物理的熱流となるものである．なお，この研究においては，単層壁の種々の近似伝達関数をとり上げ，それらの近似精度を周波数領域で一般性のある評価をしているのが特徴である．

さらに(ロ)と(ニ)の多次元性と連成効果の問題の中で，特に室内表面間輻射伝熱の多次元問題と，多数室間の間仕切の熱貫流と換気による連成問題に取組んだものとして，長谷川らの研究[22)23)]が上げられる．これはStephensonらの応答係数法を基準としている．しかし，室内表面間の輻射伝熱を考慮するため，それらの表面温度と室温についての連立方程式を解くようにしているのが，通常の総合熱伝達率で処理してしまう応答係数法と異なっている点である．同様な問題意識で秋岡[24)]によっても研究が行われている．両者とも非常に繁雑な数式的扱いを必要としている点では共通しているが，長谷川らは実際の計算プログラムを作成し，具体的な計算例[25)]を報告している．しかし最近，話題となるパッシブソーラーハウスのいくつかの手法においては，このような解析法でも解くことが困難な，多次元性と連成効果の問題がある．またこの方法は，今度は非線型性の問題を効率よく解くことについてはおろそかになってしまっている．

以上，分布定数系の数学モデルといっても，本質的にはいずれも壁体等の部分の1次元伝熱に限られている．その熱流応答などは指数関数項の無限級数で表されるが，いずれの方法でも実際に計算する場合には有限項近似せざるを得ない．また本質的に多次元的扱いはできないから，異形壁の場合や，通気のある壁内中空層のある場合や，室内表面間の輻射伝熱を考慮したりするときには実際的取り扱いが困難となるか，数式記述が複雑となる．また(ニ)の連成効果の問題も取

り扱いが困難である．さらに応答係数法として実際に計算するときには(ホ)のような非線型性の問題にも対応が困難である．このようなことから次に述べる集中定数系の数学モデルもさかんに研究されている．

ii)集中定数系の数学モデル

分布定数系では解析的に解を求めることが困難な，多次元的な形状の物や，複雑な境界条件の場合に対しては，コンピューターの利用が出来なかった頃から，集中定数系の近似モデルにすることによって数値的な解法が行われてきた．手計算によって数表を作りながら解く方法や，シュミットの図式解法などは前田によって建築学大系[1]に紹介されている．また数値的な解法をとる場合に用いる計算式の導き方として，熱伝導の偏微分方程式を空間的にも時間的にも差分化する方法と，熱流のバランスをみる微小直方体についての熱平衡式を直接に記述する方法の2通りがあり，結局，同じ計算式が得られることが述べられている．[1)P.313] これからもわかるように集中定数系の数学モデルにおいては，まず計算対象の連続的な全体をいくつかの部分に分ける．それらの部分を代表する点に，非定常性を生み出す熱容量をそれぞれ凝集させる．従って，これらの点の間の伝熱過程は定常現象として見なせることになる．すなわち伝熱の分布定数系は，熱容量を持つ節点の集りの近似モデルとなる．いかなる集中定数系の数学モデルにおいても，結局この本質は同じである．

木村，松田[26]は壁体の熱伝導だけでなく，室温変動や予熱負荷の定量化の範囲にまで拡げて，この数値解法と図解法を適用した．しかしディジタルコンピューターの発達にともなって，手間のかかる図解法は殆ど行われなくなった．そして数値解析は残っていくことになる．その中でも差分法は種々の分野で広く行われている解法である．

差分法とは，あくまでも偏微分方程式に対しての差分近似化という意味を持つ．一方，複雑な建物伝熱系全体を単純に偏微分方程式で記述するのは困難であるから，基本的にこれによって記述できるのは壁体等の部材ということになる．もし偏微分方程式によって記述する建物の伝熱系の空間的領域を2次元，3次元と広げれば広げるほど，その差分化モデルの温度計算点すなわち節点は膨大なものとなっていくであろう．この問題点は，建物の伝熱系に対して，工学的な判断による数学モデルの簡略化ということをしないで，単に偏微分方程式の集中定数化モデルを当てはめようとするいかなる場合にも発生する．また各節点の時間的温度変化を計算していく際に，ある節点の次の時刻の温度の計算をするために，これに隣接する節点の現時刻の温度を用いるような，いわゆる陽解法の前進差分では，数値的な発散が起こる場合もある．

木村は建物の伝熱系に単に偏微分方程式の差分化モデルを当てはめることの，こうした問題点を考慮し，熱容量質点系の考え方を提案した．[27] 壁体内部を何層かに分割し，また室温も含め，熱容量を持つ節点系に近似し，節点それぞれから温度の時間変化を表す連立微分方程式を構成する．これを実際には陽解法の前進差分で数値的に解いていく．また2節点系など単純な場合についてはラプラス変換による解析解も示されている．[15)P.378] このような方法によって(ホ)の非線型性の問題は解決されることになる．しかしこの連立微分方程式の定式化に際し，(イ)での各種の伝熱形態に対する統一的なとらえ方，及びシステム理論的な全体方程式の記述とその構成法においては改善すべき問題点が残った．また数値的な解法では，どうしても時間差分化誤差の問題があり，かといってラプラス変換による解析解は2節点程度のものしか得られないことなど

から，後に固有値解析による解析解について研究することになる．このことは単に時間差分の誤差を解消するというためだけではなく，建物の伝熱系の動特性を，指数関数的な関数的認識ができるようにするためにも必要なことである．

宇田川[28]は，陽解法の前進差分では，安定条件を満たさない限り，数値的な発散が起こることから，無条件に安定な性質を持つ後退差分を用いる多数室の室温変動と負荷の計算法を示した．壁体内及び室温の全節点についての熱平衡式を連立方程式としてしまうのでは，方程式の次数が大きくなって計算機の使用上，問題があるとし，この計算法では室数分の連立方程式ですむようにしている．この次数の分割縮小化の方法を宇田川は複雑な数式記述で行っているが，実はサブシステムの連成理論として，(m)で述べたように，より統一的にかつ簡明に解決することが出来る．この宇田川の計算法においては壁体は1次元伝熱と固定的に決めてしまっているなど，応答係数法がとっている建物伝熱系の熱流構造とは基本的に同じなので，自由なモデル化という意味ではやはり制限が大きい．また時間差分である以上，動特性の関数的認識は困難である．

一方，熱と電気の相似性を利用して，伝熱現象を抵抗と容量の電気回路に置換えて解くことは国内外通じて古くから行われていた．建築への応用としては浦野ら[29][30][31]によって熱回路法が研究された．この初期の研究の主目的は，その当時はディジタルコンピューターが未発達だったことから，数学的解析解の得にくい場合に対しての近似解という位置付けであった．

こうした実際の電気回路を作製し，直接的に伝熱現象をシミュレートするという方法には，いくつかの利点があると考えられていた．1つは電気回路の入力と出力は連続的であり，また入力に対する応答が速いことである．もう1つは，温度や日射量等の外界条件の測定結果の出力のほとんどが電圧変化で得られることを考えると，その出力を直接熱回路入力として負荷変動が得られ，更には空気調和自動制御への導入が容易であるということである．[32]　こうした利点を生かすべく，石原，浦野[33][34][35][36]によって，やはり熱回路法としてさらに研究された．しかしハードウエアとして実際に電気回路を作り，その電圧を測定するといった方法であるため，問題ごとに電気回路をつくる手間がかかること，解の処理が面倒であることなどの欠点があった．さらに熱物性値が変化する場合などの非線型問題に対しても対応しにくいことなどの欠点もあった．アナログコンピューターによる解法も行われたが欠点は同様であった．この解法では数値解析で時間差分をとる場合の誤差などはないから，集中定数化近似の誤差だけとなる．従って，どの程度の壁厚を1つの節点で代表すれば，その誤差が無視できるか等についての石原らの研究[32]は有用と思われる．しかしこうした研究と，実際上の適用は，ディジタルコンピューターの発達によってほとんど行われなくなった．

一方，計算モデルは電気回路網で表示しながらも，実際の計算はデイジタルコンピューターを用いようとしている例も数多く存在する．例えばウィスコンシン大学の太陽エネルギー研究所が出したレポートの付録の中にそれが見られる．[71]　これは太陽熱集熱器のモデルであるが，実際の計算結果については述べられていない．また節点方程式にも誤りがみられ，全体方程式の扱い方も示されていないが，この文献は本研究の着想をもたらした重要なものである．

さらに，その計算機の発達に伴って，有限要素法が各分野において多く用いられるようになってきた．差分法は偏微分方程式を直接に差分近似して集中定数系モデルを導くのであるが，有限要素法はそれを空間領域での重み付き残差積分から導くものである．有限要素法は差分法より

も，よりなめらかな集中定数化ができる．これは，ある空間部分の熱容量が，その部分を代表する1つの節点に全て集められるのではなく，隣接する節点にも分散するからである．また計算対象物の複雑な形状と，境界条件に対応できる．しかしどちらも集中定数系の数学モデルである本質に違いはない．とにかく複雑な建物の伝熱系全体を座標系の中に置いて数学モデルを作るのは差分法でも有限要素法でも困難である．従って，建築の分野では，これらの他分野からの技術をそのまま流用しようとするのではなく，工学的な判断によるモデルの簡略化の方法と，構成の方法が，むしろ問題となる．そして(へ)で述べたところの，建物伝熱系へ作用する外界条件は低周波数のものであるという特徴も考慮されなければならない．

以上，集中定数系の数学モデルについて，既往の研究に総じて言えることは，系の熱的動特性を，指数関数和のような数学的関数として把握できる方法がないということである．これに対して分布定数系モデルの既往の研究においては熱流応答などの関数が得られていた．このような関数的認識が可能となる解析法でなければ，たとえ必要精度の解が求まるといっても，単なる数値計算あるいは電気回路を用いた実験に過ぎないことになる．しかし熱容量を持つ多節点系において，このような関数を導き出すためには，まず多次元の全体方程式でまとめて解析する方法が必要である．そして，種々の伝熱形態と多次元的な熱的結びつき方からなる建物伝熱系を，明快かつ統一的にその全体方程式にモデル化するための，新しいモデリングの概念が必要となってくる．

1.2.2　換気計算の既往の研究

換気計算とは，1つの室の内部での細かい気流分布を問題とするのではなく，室の集りで構成される建物全体における室の間の空気の流れや，室と外気の空気の流れを求めようとするものである．これにたいして1つの室の内部の気流分布を問題にするときには流体力学的な数値解析を行うのが通常である．前者は工学的な判断によりマクロなモデルを作って，流量バランスをもとに解こうとするものであり，後者はあくまでも空気の微視的な流れを記述するナビエストークスの偏微分方程式に則って，これを数値的に解こうとするものである．多数室から成る建物といっても，そのある部分に注目してみれば，空気の流れを正確に記述するのはナビエストークスの方程式とその他の偏微分方程式であることに相違はない．しかしこの数値解析的な方法によって，多層かつ多数室で起こる煙突効果や外気風圧での自然換気をシミュレートすることは非常に困難なものとなる．なぜなら，このような現象は，建物全体での多数室間の連成効果を考慮してはじめて把握できることであるが，そのための流体力学的数値解析に要する計算機の記憶容量と時間は膨大なものとなるからである．ところが，建築の実際の設計現場で頻発する問題には，むしろこのような現象を解かねばならないことが多い．従ってこうした意味で，マクロで工学的な換気計算の必要性があることになる．

建築の換気計算法のはじまりは他分野からの応用によってなされた．まず土木における水道管網の計算法があり，これはH.Crossによる方法[38]が有名である．また鉱業の分野における坑内通気の計算については，平松の著書[39]によれば，D.R.ScottおよびF.B.Hinsley[40]がH.Crossの方法を改良して提案した．また平松も繰り返し計算法[41]を提案している．これらは手計算によるもの

であるが，W.Maas[42]はタングステン電球を抵抗体とする通気回路網の電気的模型を用いて解析を行う方法を発表した．

しかし(ト)で述べたように建築の換気計算においては，単にこれらの方法を流用できない，いくつかの特徴がある．従ってこれに適した計算法の考案が必要となる．これはまず石原,[43]前田[44][46]らによって研究された．これらはいずれも換気回路網のモデル化の方法が用いられている．石原の方法は，建築換気回路網の特徴であるところの通気路の数に比べて圧力節点の数が少ないことを利用した，圧力仮定のクロス変法である．前田らの方法はクロス法の原理を用いた一般解法としているが，特に室が1列に並ぶ場合を一列法と呼んでいる．

換気計算においては，例え，単室の場合でも繰り返し計算が必要となる．これは通気路についての差圧と風量の関係式が非線型であることに起因する．すなわち風量は差圧の0.5乗から1乗に比例する性質を持つから，1つの室での風量収支を記述すれば圧力に関して線形の方程式とはならないからである．それゆえ，これが多数室になってくれば，その繰り返し手計算は非常に手間のかかるものとなる．従って設計現場で定着する計算法となるためには，まずデイジタルコンピューターの利用が不可欠であった．しかしデイジタルコンピューターの利用が出来るようになっても，単に手計算の手順を計算プログラムにしたものでは，解が発散したりしてうまく求まらない場合があることがわかってきた．これは手計算においては，計算と同時に，風量と圧力のグラフ上で逐次の解の位置を確かめ，次に仮定すべき圧力あるいは風量を人間の判断で適切に与えていた[45]のに対し，コンピューターのアルゴリズムではこうしたことを行うのが困難だからでもある．また手計算ではあきらめていた室数の多い場合でも，一応コンピューターでは計算可能となったことから，それまで問題とならなかった室間の計算上の連成効果が顕著になったためでもある．さらにコンピューターを用いることから，換気回路網のモデル化の考え方と定式化の仕方は，アルゴリズムに直結した新しいものにする必要が生じてきた．

これらの解決すべき問題点があるにもかかわらず，例えば建築学会の論文報告集を調べるかぎり，換気計算法に関する研究はほとんど見られない．そのかわり関連する研究として非常に多いのが室内気流の数値解析である．実際の設計現場で多い問題は換気計算で扱わねばならない特徴を持つ事は前述した通りである．こうした研究のアプローチ上の矛盾は伝熱解析の場合も同様であった．すなわちアプローチ法が分析的なものに傾きすぎ，総合的なものがおろそかになっている．

しかし多層多数室において火災時の煙流動を予測することは，人命にかかわる問題であり重要であるが，換気計算のアプローチ法を必要とする．高層建物の建築は，米国から盛んになった．このようなことからまず，カナダのTamura, G.T.とWilson, A.G.の研究が上げられる．彼等の初期の論文[47][48][49][50]を見ると，数学モデルの定式化法と解法についてはあまり詳しくふれられてはいない．しかし後に同じくカナダ国立研究所のSander D.M.との共同で出された論文[51]には比較的詳しく，それらのことが述べられている．この中で，風量バランスの式は，各階の空間と垂直シャフトでは別々に立てられている．従って，換気系をより一般的にとらえる方法については工夫がされていないようである．また換気回路網という言葉も見うけられない．解法に関しては，通気路についての差圧と風量の非線型式を線型近似し，得られた室内圧に関する線型連立方程

式を解き，これを繰り返していく方法をとっている．この種の方法は安定性はあるとしても，ニュートン法ほど解への収束の速さはないと考えられる．

また同様に煙制御の分析のために，米国のJohn H.Klote[52]によって計算プログラムが開発されている．これも，各階の空間と垂直シャフトそれぞれの風量バランスを別種のものとして定式化するなど，一般性を実現するための換気回路網の考え方はみられない．また解法も，それらの室あるいはシャフトの1つずつについて風量残差から，regula falsi法によって圧力を修正していく方法をとっているから，室あるいはシャフト間の，言いかえれば多数室間の計算上の連成がとれにくく，従って解が発散するなど安定性が良くないと考えられる．

寺井[53][54]らは，やはり煙流動の予測計算の中で換気計算法を提案している．この方法では，従来の換気計算法では見られなかったインシデンス行列を利用した定式化を用いているのが特徴である．インシデンス行列の利用は，回路網解析の分野での常套手段である．ここで注意しなければならないのは，この回路網解析とは，熱回路網の場合と異なり，動的な現象を問題とするのではなく，最適輸送貯蔵問題，都市交通計画，最短距離問題，経営計画などに適用されている方法[55]をさしていることである．このインシデンス行列で，各通気路の風量から各室の風量収支をベクトル･マトリクスで数式的に記述するために用いている．風量収支は各風量の線型の代数和であるからこのことは可能であるし，こうした現代的な記述法はコンピューター利用上からも好ましい．しかし，本来は，各室の室内圧から各室の風量収支を明快に記述できるようなインシデンス行列でなければ，その適用の利点はない．なぜならば，未知数は室内圧だからである．ところが差圧と風量の非線型の関係から，そのような線型の行列を定義することは困難である．従ってこのような他分野からのインシデンス行列の導入は本質的な利益をもたらさないと考えられる．ただし解法については，室内圧に関するヤコビアン･マトリクスを構成し，連成のとれた多変数系でのニュートン法を適用している点で優れていると考えられる．

そのほかに考えられる計算法としては，エネルギー原理を用いる方法[56]がある．例えば，空気は抵抗の小さいところを流れ，敢えて抵抗の大きなところをたくさんながれるようなことはない．抵抗のあるところを空気が流れれば，質の高い圧力というエネルギーは，質の低い熱というエネルギーに変換していく．これは一種のエネルギーの散逸仕事量(dissipation work)である．自然界のあらゆる現象はこの仕事量が最も小さくなるように実現しているという原理がエネルギー原理である．従って，通気抵抗に打ち勝って空気が流れるときの仕事量を換気系全体にわたって積分したものをコスト関数におけば，これを最小にするような風量の分布が求める答となる．この最小化の方法の1つに共役勾配法(dual gradients method)がある．この基本的な考え方は非常にスマートで魅力的ではあるが，はたして実際のコンピューター計算のアルゴリズム上も単純明快なものになるのかどうかは，その論文において詳しく述べられていないので不明である．

さらに水道の分野においては，クロス法以来の新しい計算法として非常に優れた論文が佐藤[57]によって出されている．これは基本的にはMarlowら[58]の圧力を未知数とする方法の系統であるが，管網の方程式をベクトル･マトリクスの明快な線形方程式で記述することによって現代的なアプローチを行っていることに特徴がある．ただし管路の特性がやはり非線型であるため，係数行列は節点での圧力に応じて逐次変えていかなければならない．すなわち明快な線形方程式

といえども圧力を求めていく過程で逐次に近似されたものとなる．配水管網のように圧力節点間の枝が1本だけとして見なせる場合には，この方法は優れているが，建物の換気系のように圧力節点間の枝を複数として別々に扱わねばならないときには，このような明快な方程式を組み上げるまでの過程が，かえって非常に繁雑なものとなると考えられる．

以上の既往の換気計算の研究においては，まず換気系をコンピューター利用の計算にふさわしい数式記述をすることについて意見の一致が見られていない．それらは不必要な場合分けをすることによって一般性を失っていたり，建物の換気系について先覚者が指摘している特徴を忘れ，他分野からの手法を安易に導入しているために無理を生じている．換気回路網という言葉は手計算の頃からあったものであるが，コンピューター利用に適した新しい概念や定式化の定義が必要と考えられる．解法については，建物の換気系の特徴である通気路の枝数に比べ，室内圧の圧力節点が少ないことを生かし，圧力仮定法が主流である．しかし，1つの圧力節点毎に修正を繰り返していく方法は不安定で解が得られないことが多い．また全部の圧力節点について連成をとって修正量を計算する方法も工夫をしないと解を求める過程で振動を起こす．従って，この種の非線形方程式の特性を考慮する解法が必要である．さらに煙突効果などに見られるように，換気系だけを考慮すればよい場合はむしろ少なく，熱系との相互影響をいかに明快なアルゴリズムにするかも問題となってくる．

1.2.3　動的測定法の既往の研究

建物における伝熱あるいは換気についての動的な測定法の既往の研究は少ない．建築部材の伝熱に関し，実験室的な実験を行う場合には，理想的な周囲の状況や定常状態を比較的容易につくれる．しかし実在建物での総合的なフィールド実験では，気象状況の変動などによって常に不規則な動的状態にあるとみなさなければならない．ところが，建物の実際の使用状況に即した総合的なフィールド実験の結果は，分析的な実験室の実験結果などよりも，より実態を反映している有用な情報を含んでいると考えられる．それにもかかわらず動的な測定法の研究が少なかったのは，データ解析の理論上の問題だけではなく，測定装置のハードウエア上の問題もあったためと考えられる．この種の測定においては総合的であるがゆえに空間的に多くの測定点を必要とし，動的であるがゆえに時間軸方向にも多くの測定データを必要とする．従って現在非常に進歩しつつあるマイクロプロセッサの技術を利用した，多点測定を高速で行っていけるような測定装置を必要とする．さらにこれらの膨大な測定データを解析するための安価でコンパクトで高性能のコンピューターが利用できることも大前提となる．

隙間風や自然換気は，建築設計においてよく理解されていない面である．ところが冷暖房のエネルギーのかなりの部分は隙間風によって消費されていることは定性的に知られている．一方，窓などの気密性を改善する投資に対する経済効果は，あくまでそれらの実態を定量的に調査した上でなければ明言できない．このような背景により，正確な換気測定法は必要となる．従来，定着している換気測定法はJIS等の規定[59]にもあるような，単室扱いの場合である．これはトレーサーガスを室に注入し，そのガス濃度変化を測定することによる．すなわち，室内のトレーサーガスは一様に拡散すると仮定し，ガス濃度変化の微分方程式を立て，測定されるガス濃度や注入流量をこれに代入して，外気との換気風量を求める．従って単室扱いの場合でも，ガス濃度

の動的状態での測定方法といえる．しかし多数室扱いの場合と異なり，考慮するガス濃度変化の微分方程式は1本だけである．建物は多数室から成っている場合が一般的であり，全ての室が同じ濃度で変化していくと仮定するのは無理がある．また，その中の1室だけにトレーサーガスを注入し，他の室は常に外気濃度になっているという仮定も不合理である．すなわち，一般には，ガス濃度が一様と仮定できる程度の室それぞれで濃度の微分方程式を立て，連立したものを基本式としなければならない．室間の相互換気風量は，この連立によって考慮される．このような考慮をしない単室扱いの測定法は，しばしば誤った結果をもたらすことは堀江らの実験例とともに渡辺の建築計画原論Ⅲ[60)P.237]に述べられている．以上のような意味で，特に換気測定においては，動的で多次元的な方法を考えなければならない．

i)多数室換気測定法

この問題に対し，Frank W.Sinden[61)]は本格的な理論的考察を与えた．まず各室においてトレーサーガスの保存則を記述し，これらをガス濃度に関してベクトル·マトリクス形式で全室の全体方程式として明快に表した．しかしこの時間に関する常微分方程式は，トレーサーガス注入停止後の状態を記述するものであり，注入中をも記述する一般的なものではない．言いかえれば，トレーサーガスの拡散系が特殊な自由状態にある場合だけを記述するものであり，系に対して入力が作用している状態は記述されていない．またこの自由状態にある常微分方程式を解くことは，初期値問題と呼ばれるが，この特殊な場合の解析解を述べている．この解析解を具体的に記述する際には固有値解析を必要とする．さらに固有値の中の1個は必ず0であり，他の固有値は実数部分が負であることを証明している．しかしこの証明は，最初の系の記述に不備があったため，誤った結果となっている．すなわち，固有値は0が1個もなく，全ての実数部分が負であるとするのが正しい．誤った結果をもたらした原因は，外気のような規定境界条件が正しく方程式に組み入れられていないことにある．とにかくこのような，系に関する考察を行った後に，本来の問題であるところの各室間と外気の間の換気風量を求める問題を論じている．まず各室のガス濃度変化を記述する室数分の微分方程式に着目する．ある一時点での各室のガス濃度と，これらの時間平化率を測定して，それらの微分方程式へ代入すれば，室間及び外気との換気風量を未知数とする室数分の連立方程式が構成される．一般に未知数である換気風量の個数は，室数に外気の分の1を加えた数の二乗に等しい．従ってこの未知数の数に見合うだけの数の時点において測定値を得る．この時点数は室数に外気の分の1を加えた数に等しい．換気風量を求めるこの方法は，統計的な方法ではなく，決定論的な方法である．従って測定を行う時点が接近していたりして，得られた測定値が似かよっていた場合は，連立方程式の中の何本かは互いに線型従属になって解が得られないこともある．さらに統計的でないがゆえに，誤差の評価も困難である．測定値を解析するためのこれらの困難はF.W.Sinden本人も認めることであった．もし，室間の換気風量よりも，各室と外気との換気風量が求めたい重要なものであるとすれば，これらの解析上の困難は避けることが出来ると述べている．トレーサーガス注入がコンピューターによって制御される精密な流量制御装置を用いて行われるならば，全室のガス濃度が一様かつ定常的になるようにすることは可能である．この場合は，空間のガス濃度の差異がないことと，ガス濃度の時間変化もないことから，各室のガス濃度変化の微分方程式は，直ちに外気との換気風量を算出できる簡単な形になってしまう．この計算をするために必要なのは屋内の一様なガス濃度，外気

濃度およびトレーサーガスの注入流量だけである．しかし，室間の換気風量も求める一般的な目的においては，上記の解析上の問題を避けて通るわけにはいかない．

D.T.Grimsrud, M.H.Sherman等[62]は，F.W.Sindenと同様な理論によって，多数室換気測定を行った．従ってやはり，未知数である換気風量の数に等しい本数の方程式を測定値から得て，連立方程式を解く形式のものである．実験は3室の場合について行われた．用いたトレーサーガスはN_2O(nitrous oxide)であった．しかし，結果は満足のいくものではなかったと述べられている．こうしてM.H.Sherman等[63]は後に室数分の種類のトレーサーガスを用いた方が，より簡単な解析ですむと述べるに至る．

そして，この多種類のガスを用いる測定データの解析理論と実験例は，S.J.I'anson[64]等によって示された．この理論によれば最大3室までの室間および外気との換気風量が求められる．使用されたトレーサーガスは，Freon12, Freon114 とBCF(bromochlorodifluoromethane)の3種である．これらは，エレクトロンキャプチャ·ガスクロマトグラフによって分析される．測定に要する時間は1~2時間である．測定データを解析する理論は次のようである．2つの室それぞれで，ガス濃度変化の微分方程式を立てる．この場合もやはりトレーサーガスの注入中は含まない，注入後の減衰過程だけを記述している．このような2次の連立微分方程式は容易に解析的に解くことができ，それぞれの室のガス濃度は2つの指数関数の線型和として表される．またその係数部分は，換気風量，室の容積や初期濃度を用いて表される．従って，室のガス濃度の時間を追っての測定値と，室の容積が得られれば，最小二乗法によって，それらの指数部分と係数部分は求められる．次に換気風量と初期濃度についてそれらを解けばよい．ただし，係数部分だけ求めるならば，通常の最小二乗法ですむが，指数部分も求めるから，非線型最小二乗法を工夫しなければならない．この方法としてPronyの方法[65]P.457と呼ばれるものを適用している．2室の場合は以上の解析法によれば1種類のガスですむ．しかし3室も扱うためには，さらに別の種類のガスを必要とする．あるいは，多種のガスを用いることによって以上の複雑な解析が不必要になり，コンピューターを用いる必要のない程度の計算になるとしている．以上の解析理論は，各室のガス濃度変化の微分方程式が解析的に解けていて，かつそれらの式の係数部分や指数部分は，換気風量や室の容積によって明確に表されていることを前提とする．ところが，このような前提が成立するのは，やはり2室あるいは，せいぜい3室程度までである．これ以上の室数になってくれば，それらの係数や指数は数値計算でしか定められない．特に指数部分は固有値と呼ばれるものであり，多元連立常微分方程式においては一般にこの固有値は数値計算によって求められ，これを固有値解析というのである．この前提は例え多種類のトレーサーガスを用いたとしても必要となる．一方ガスの種類が多くなってくれば測定装置として実現するのが困難になる．さらに個々の換気風量と室の容積によって構成されるガスの拡散系の構造の上には，多種類のガスをのせることも可能ではあるが，もし，温度の拡散系である熱系について考えるとき，この上にのせられるのは温度の1種類しかあり得ない．もし一般的な拡散系に広く適用できるような解析法をつくろうとするならば，多種類のトレーサーガスを用いる方法は一般的なものとはいえない．

本間[66]は1種類のトレーサーガスを用いる測定方法を研究した．まず室のガス濃度変化を記述する微分方程式を解くことについて述べている．しかし連立常微分方程式を解く正統的な数学上の問題としてとらえていないために誤った結果を与えている．すなわち，それはまず単室の場

合の解式を基本とし，隣接した室間で相互影響がある場合は，一方の室の解式に他方の室の解式を代入する．従って一般に多数室の場合は隣接する室の影響だけでなく，そのさらに遠い室の影響も受けるからその代入は際限なく繰り返される．無限回の代入を行う数式は実際上は計算できないから適当なところで打ち切る．打ち切ることによる誤差補正は，その遠い室のガス濃度変化の履歴を用いるとしている．以上のやり方がもし解析的な解を得ようとしていることであれば，本当の解析解はこれとは全く異なるものである．正しい解析解はベクトルとマトリクスを用いて表される畳み込み積分(Duhamel's integration)となる．ただしこれは形式的な表示となっているから実際に積分を計算するには工夫が必要となる．この工夫については本論文で述べる．つぎに，換気風量を求めるために最小二乗法を用いている．これを前述した室毎のガス濃度を表す式に適用している．1つの室についての1本の方程式には換気風量がいくつか含まれるから，いわゆる重回帰分析を行うことと同じである．しかし室毎に最小二乗法を適用していく方法であるから，室間の相互影響は正しく反映されないことになる．この相互影響は全室での式を連立した形で扱う多次元に拡張された重回帰分析を行うことによってはじめて考慮されるものである．またこのような方法をとることによって，本間が行っているような繰り返しの収束計算などは不必要となる．

佐々木ら[67]は1種類のトレーサーガスを用いる方法を提案している．これは基本的には，求めたい室間の換気風量の個数分の連立方程式を立てて解く決定論的な方法である．従って誤差の統計的な分析法は示されていない．まずある室について，その総換気風量に対する隣接する室からの風量の比をその室からの直接侵入率という言葉で定義している．これは比率の形になった室から室への換気風量である．従って，もし全ての直接侵入率と各室の総換気風量が求められれば，室間の換気風量が計算され，さらに各室と外気との換気風量も総換気風量から室間の換気風量を差し引いて計算される．各室の総換気風量は，各室の総換気回数と容積がわかれば求められる．そしてこれらの総換気回数は，その室だけでガス発生した後の濃度減衰から，単室扱いの計算法で求められるとしている．ここで実は，室間の相互影響が無視されてしまっている．次に直接侵入率をいかに求めるかである．このために直接侵入率に関する連立方程式を立てる．そして方程式を立てる基本は各室での風量収支であり，これらを直接侵入率で表したものである．直接侵入率の個数は室間の換気風量の個数に等しい．各室自身とのつながりを除くことに注意すれば，それは一般に室数の二乗から室数を差し引いたものである．この本数の方程式を得る手順は次のようである．ある1つの室においてトレーサーガスを一定量だけ発生させる．このガス発生室を含む全室の濃度変化を記録する．これを用いて発生直後から全室の濃度がほとんど0になるまでの各室のガス濃度を積分する．この積分値によって連立方程式の係数となる総合侵入率というものを計算する．この1回の測定によって室数分の方程式が得られる．次に別の室でガス発生をし同様にしてまた室数分の方程式を得る．この測定を室数分だけ繰り返す．従って方程式の数は室数の二乗だけ得られる．しかしガス発生をした室についての方程式は不要だとして除いているから，結局得られる方程式は室数の二乗から室数を差し引いた本数となり，未知数の個数と一致するとしている．これらの方程式系とその演えき過程を見ると全く室の容積が出てこない．これは，濃度変化が0からはじまり0で終る時間長さでの積分値で議論しているためであろう．ある室での濃度変化の微分方程式を考えた場合，その室容積を係数として持つ濃度時間変化

率の項を，そのような時間長さで積分すれば，初期濃度が0で最終濃度が0である限り0になる．すなわち確かに室容積には無関係となる．しかしこのような時間長さは数時間を要するのが通常である．従って，これを室数分だけ繰り返すとなれば，非常に長い時間が必要となる．またこれは確率的な方法ではなく，決定論的な方法であるから，時変性を持つような場合には無理を生じる．

以上，従来の多数室における換気測定法はいずれも測定データの解析理論において欠点を持つ．それらの方法は大別して2通りある．1つは，求めようとする換気風量の個数に見あった本数の連立方程式を立てるものである．もう1つは最小二乗法を用いるものである．前者は，線型独立な必要本数の連立方程式を，いかに短時間で得るかが問題となる．短時間の測定では線型従属な方程式が入り込む傾向が大きくなるし，長時間の測定では換気風量の不変性が疑わしくなってくる．多種類のトレーサーガスを用いれば，短時間で多くの線型独立な方程式を得ることは可能であるが，そのかわり測定装置としての実現性や，解析理論としての一般性が失われる．また何よりも，統計的な方法ではないことから，測定誤差の悪影響を受けやすく，誤差の数学的分析も困難である．これに対し，後者は統計的な方法であるから，測定誤差の変動によらず平均的な推定値を得ることが可能となる．しかし各室1本ずつ，ガス濃度変化の微分方程式に最小二乗法を適用したのでは，室間の相互影響が正しく考慮されない．従って全室の微分方程式を連立した形で行う最小二乗法が望ましい．もしこれらの連立微分方程式が解析的に解けていて，ガス濃度が換気風量等を用いて明確に表されていれば，そのような多次元的な最小二乗法は必要ないが，このような数式記述が可能なのは2, 3室の室数が少ない場合だけである．さらに，多数室におけるガスの拡散系を記述する方法が繁雑であったり一般性がなかったりすることや，ガス濃度についての解法が間違っていたり一般解でなかったりしている問題もある．

ii)建物の伝熱系の動的測定法

実在建物の熱的性能のうち，とりわけ保温性能を調べようとする要求は多い．もし建物全部を内部におさめられる環境実験室のような設備があれば，この種の測定は容易に行うことができる．すなわち，測定しようとする建物が入った実験室内を比較的に低温に保ち，かつ測定建物内部を電気ヒータで暖房する．十分に時間がたって定常になった後，測定建物内外の温度差と電気ヒータの投入熱量から，その建物の保温性能を評価できる．事実，日本国内の住宅メーカーのいくつかはそのような実験施設を所有している．しかし，このような実験施設は高価である．収容可能な測定対象の建物の大きさが大きければ大きいほど，その実験施設は高価なものとなる．また，実験を行う際に，測定対象の建物の内部も外部も定常状態の温度にしなければならない．逆に，定常状態であればこそ評価のための測定データ解析も単純なものとすることができるとも言える．そこで安価で実態に即したフィールド実験によって評価しようとすると，外気温の変動や日射量の変動によって測定データの解析は困難なものとなる．

松尾は，フィールド実験による暖房性能の評価法について研究した.[68] 目的は，暖房中の室温上昇から外界条件の変動分のノイズを除去することであると述べられている．まず，ある室についての室温の変化を表す微分方程式を立てる．従って隣室温はこの方程式への条件となる．また日射量も方位別の相当外気温度として扱い，外気温とともに方程式への条件となる．この単室

扱いの室温の微分方程式を解けば，隣室温や相当外気温度あるいは外気温度の畳みこみ積分となる．ところで，この畳みこみ積分あるいはデュアメルの積分と呼ばれるものは，一般に自由項部分と強制項部分から構成される．自由項とは系に全く入力が作用していない場合に初期状態だけによる影響を表す部分であり，強制項とは系に作用する入力による影響を表す部分である．ところが，松尾のとっている畳みこみ積分の解式では，この自由項が省かれてしまっている．従って本来は，自由項も考慮に入れ，初期状態も未知なものとして推定すべきであろう．とにかく，こうして室温の外乱温度による関係式を表しておき，室温と外乱温度の観測値から，その関係式中の係数を推定する．この方法として測定室温と計算による室温の残差平方和を最小にするようにそれらの係数を求めようとしている．畳みこみ積分の中の重み関数は指数関数になっており，指数関数の指数部分にも推定しようとする係数が含まれる．従って残差平方和を最小にするために線型の最小二乗法を用いることができない．そこで山登り法のような繰り返し収束計算を適用している．しかしこの方法は求めようとする係数の個数が増えてくれば数値解法的に困難となる．こうして得られた係数を用いて室温を計算し，測定された室温と比較して良好なる結果を得たとしている．さらに検討すべきこととして，単室単容量モデルだけでなく多室問題も扱えるようにすることや，RC造など重量建物へも適用できるようにすることなどをあげている．さらにもし追け加えるとすれば，松尾の室温変動の基礎式では，伝導，伝達などの貫流による熱流しか考慮されていないが，換気の空気の流れによる熱流も考慮されべきであろう．このときは，扱う伝熱系が熱コンダクタンスに関して非対象性を持つことになり，室温変動の微分方程式はそれとは異なったものとしなければならない．松尾はさらに翌年，この評価方法が重構造建物にも良く適用できように，改良を行った.[69]　このため，畳みこみ積分中の重み関数を一項近似から二項近似にしている．

D.V.PryorとC.Byron Winn[70]はパッシブソーラハウスの室温変化を表す方程式中の係数を温度などの測定データから間接的に推定する方法を示した．この種の建物の性能を予測する数学モデルをASHRAEのハンドブックに載っている係数を作っても，その計算結果は実測値と大きく異なることを指摘しており，それゆえ実現象に合う数学モデルをつくるためには実物の現場測定によって確かな係数を得ておくことが必要であるとしている．測定したパッシブソーラーハウスはcylindrical water wallを蓄熱部材として持っている．温度の測定値は室空気，waterwallと外気の3点だけ，日射量も水平面全天日射量だけである．室空気の温度変化を表す熱平衡式を立て，同様にwater wallの温度変化についても立てる．それぞれの式にデータサンプリング毎の温度測定値と全天日射量から計算した正味の受熱量及び温度の時間変化率を代入する．こうしてそれぞれの式に含まれる係数についての方程式がデータサンプリング毎に得られていくが，これを最小2乗法で解く．最小2乗法は2本の方程式それぞれ別々に適用される．従って2本の方程式の間の連立性は失われている．普通の最小2乗法では求めようとする係数の個数と等しいサイズの正規方程式を解くことになり，従ってこのサイズの逆行列計算が必要となる．しかしここでは，Woodburyのmatrix inversion lemmaを用いることによってその逆行列計算を避けている．従って，小さく安価なデータ処理装置でも実行可能であるとしている．ところで以上の方法については，前記した連立性の欠如のほか，いくつかの改良すべき点があげられる．まず，日射量の扱い方についてである．当文献では熱平衡式に代入する観測日射入力として有効日射量

と呼ぶものを全日射量から計算して用いている．これは正味の受熱量を意味するが，これが正確に計算されるためには受熱面の向きや吸収率あるいは透過率さらには影の影響などの予測値と仮定値が用いられなければならない．しかし本来，観測値は予測や仮定を含まないものであるべきである．そのためには，いくつかの適切な日射成分を観測し，仮定値による加工をせずに直接用いる方法が考えられる．次には温度の時間変化率についての問題である．この時間変化率を，サンプリング時間間隔による差分近似で計算しているが，このような値は観測ノイズによって影響をうけやすいことはよく知られている．そこで観測値を代入する熱平衡式は両辺ともサンプリング時間間隔で積分したものとする．このとき時間変化率の代りに代入することになるのは時間増分値となる．また温度の瞬時の測定値の代りに代入するのは温度の時間積分値となる．

以上の従来の測定法について共通していえることは多変数系あるいは多次元的な系としての解析が望まれることである．それらはいずれも，複数存在する温度測定点についての熱平衡式を別々に扱っており，全体の方程式が連立した上での解析がなされていない．従って例えば，ある同一の係数は同時に複数の方程式中に存在するが，これが同一のものとして推定されないということになる．また測定誤差や，前提とした熱平衡式と実現象の不適合に依存する推定結果の信頼性についての統計学的な分析法が示されていないこともあげられる．さらにあげられる問題点は実用的観点から最も重要である．それはモデリングの構造に関するものである．いずれの測定法においてもまず建物伝熱系の何らかの数学モデルを基本とする．そして測定データをモデルに取込み解析する形式をとる．解析にはコンピュータ利用が必要不可欠である．従って，この計算プログラムは一般的な適用性を持っていることが望ましい．すなわち測定対象物のバリエーションに対して汎用的に対応できるものでなければならない．測定対象物ごとに数式記述からはじめて計算プログラムをつくる必要があるのでは実用的なものとは言えないということである．

1.3　本研究の意義と位置付け

建物伝熱系についてのコンピューターを用いたシミュレーション手法に関する従来の研究は分析的アプローチに傾きすぎていたといえる．これに対し本研究では総合的アプローチを行う．

すなわち，建物伝熱系の場合は，部分の精密な解析よりも，部分と部分の相互影響や，より多くの諸要因を正確に考慮に入れる総合化の過程とその方法がむしろ重要と考える．従来はともすれば壁体伝熱という部分にこだわりすぎたと考える．全体は，部分の単なる加え合せではなく，それらの連成効果によって成るものである．これに対して本研究では部分ではなく，建物伝熱系全体の骨組みに着目する新たな視点をとる．総合的な把握をするためには建物全体系を数学的にも明確なシステムの方程式として記述する必要がある．そして伝導，伝達，輻射，物質移動のさまざまな伝熱形態と多次元的な熱流から成る複雑な系をそのまま複雑なものとして扱うのではなく，新しいものの見方を導入することによって，単純明快にとらえられるようにすることも必要と考える．本研究では拡張コンダクタンスの概念を定義することによってこれらのさまざまの伝熱形態を統一的にとらえようとする．また回路網の定式化法を定めることにより，システムの方程式，つまり状態方程式が多次元的な熱流の問題に関しても一般的に組みあがるようにする．また総合的なアプローチをするためには空間座標系に縛られてばかりはいられない．

対象とする建物伝熱系は複雑で大きいから座標系においてだけ成立する偏微分方程式で全てを記述することは困難だからである．本研究では集中定数系の数学モデルを用いる．そして集中定数化の方法として，差分法や有限要素法よりも，座標系に束縛されない検査体積法を主として用いる．これによってモデル化を自由に行うことが可能となる．回路網の考え方により，一般に集中定数系の骨組みは，状態方程式としてのシステムの中で明確に把握される．従ってむしろ差分法や有限要素法はシステムとしてのより高い視点から統一的に見直せるようになる．さらにいわゆるシミュレーションと呼ばれている時間積分法には前進差分とか後退差分とか各種の近似解法があるが，それらの安定性の議論も明確になるだけでなく，なによりも厳密解としての解析解も提示することができる．すなわち，従来は単なる数値解析解で満足していたが，本研究では解析解を示すことによって系の動特性は関数として把握できることになる．一方，躯体の伝熱系について導き出された熱流応答係数法は，いわば伝達関数法の思想にもとずいているものとみなせる．これに対して本研究は現代的な状態空間法を基本的な思想とするものとして位置付けられる．状態空間法は一般に高次のマトリクス演算を必要とするものであり，それゆえ近年のコンピューターの進歩にふさわしい方法である．

ところで換気系のシミュレーションの数学的扱いは以上の伝熱系と異なる．換気現象は空間的な圧力分布によって起こるものであるが，圧力の伝播は音速で行われ，伝導伝熱などの速さよりはるかに速い．従って換気現象は定常現象として扱えることになる．とにかく，本研究において総合的アプローチを行うのはこの換気現象に対しても同様である．もし分析的アプローチを行うとすればナビエストークスの方程式の数値解析に走ってしまうであろう．しかし例えば，高層でかつ多数室の建物において起こる煙突効果をそのような分析的方法で解析することは困難である．すなわち，その中の1つの室内での3次元気流分布を解析する程度のことはできても多数室の全体にわたって3次元的に解析することは出来ない．従って1つの室の中での細かな気流分布よりも，室と室の相互影響で構成される建物全体系に目を向けて解析する，いわゆる換気計算のアプローチが実用上は重要である．換気回路網という言葉自体は古くからあったが，コンピューター利用に適した新しい換気回路網の概念の定義とアルゴリズムの研究が必要と考える．本研究では全圧節点系としての換気回路網の概念を定めることにより，自然換気だけでなく機械換気も一般的に扱えるようにする．さらに従来の換気計算の定式化法は一般的な計算プログラムをつくるためには必ずしも適したものではなかった．本研究ではアルゴリズムに直結した形での定式化を行う．また圧力に関する非線形方程式の解法にも工夫をこらす．

以上のシミュレーションについての本研究の位置付けを，また別の観点から行うとすれば，従来は複雑に扱っていたことを単純明快にとらえられるようにするものであるとも言える．複雑で大きな建物において起こる伝熱や換気現象であるから数学モデル自体あるいはその構成法も複雑にならざるを得ないとするのではなく，むしろ建築分野だからこそ単純明快な計算法が必要であろう．

一般に科学技術上の理論は実現象から確かめられる方法を伴っていなければならない．もしこれがなければ理論はいつまでも仮説の域を出ない．本研究におけるシミュレーションの計算理論についても同様なことを考慮する．すなわち，理論によって実現象を予測するということと，逆に実現象の観測によって理論の中で用いている不確かなものを確かなものにするという

ことは車の両輪のごとくどちらも重要なことである．しかしこの両方向性を持つ完結した全体系をつくる際にも分析的考え方をとることは誤ちを起こしやすい．理論によって実現象を予測するとき，既知な物性値等を用いて演えきされているとはいえ，全体の計算モデルを組み立てていく途中には種々の仮定が含まれる．従って最初の物性値がいかに正くても最終結果が必ずしも実現象に合う保証はない．またいかに部分が正確に数学モデル化されていても全体に総合化されたあとの結果が実現象に合う保証もない．このことは，常に問題を基本的な要素や要因に還元し，その分析を行いさえすれば全体は自ずと解明されるとする，いわば還元主義的な考え方の危険性を示唆している．特に建築分野のような場合，問題は分析よりもむしろ総合化の過程にあるといえる．総合的に現象を把握するにはシステムという概念を導入する必要がある．そしてシステムは数学的には状態方程式で記述される．この状態方程式を構成する概念が本研究でいうところの回路網の概念である．

本研究では一種の測定理論についても考える．これはこの状態方程式の中の不確かな係数を実際の現象の観測によって確かなものにするという意味を持つ．そもそも熱物性値にせよ熱貫流率にせよこれらの測定法も温度差と熱流の基本的関係式を大前提としている．しかし標準規格あるいは実用になっているそれらの測定法は定常状態を必要とするのがほとんどである．すなわち静的な測定法である．本研究では動的測定法について考える．実測においては気象条件等の変動により理想的な定常状態の仮定など成立しないから動的な状態で測定せざるを得ない．しかるに実験室実験などと比較し，実測の結果はより実態を反映した有用な情報を含んでいると考えられる．また静的な測定法は理想的な状況にするために必要とする条件も多く経済的にも不利である．従って動的測定法は重要である．動的測定法においては時間的変化を観測するため連続的あるいは離散時間的に長い期間のデータを必要とする．なおかつ総合的測定法であるためには空間的にも多くの測定点を必要する．従ってこのような多点高速測定を実現するためにはハードウェア的にも，高度のマイクロプロセッサ技術が必要となる．さらに測定データに比較的複雑な数学的操作をリアルタイムで施す場合には性能の良いコンピューターも必要である．本研究では近年のそれらのハードウェア上の技術の発達を十分に生かせるようなデータ解析の理論を考える．まず具体的に，本測定法が最も有効なのは多数室換気測定に対してであると思われる．単室扱いの測定法はJISの規格にもなっているが，多数室扱いのものは多くの人によって研究中である．いずれの測定法においてもトレーサーガスの濃度を測定することにより間接的に換気風量を推定しようとするものである．特に多数室の場合は観測できるガス濃度は室数分しかないのに対し，推定したい風量の個数は室数の二乗に匹敵するほど多くなる．従ってその推定の方法が重要になってくる．しかし既往の研究において述べたようにそれらはデータの解析理論において不十分であると考えられる．本研究ではトレーサーガス拡散システムについての状態方程式の同定という新しい観点から理論を示す．一方，建物の保温性や省エネ性能を実測によって評価しようとする際にも動的測定法が必要となる．外気温や日射量の変動によって室温や建物の各部分の温度は常に動的な状態にあるからである．既往の研究では，多数の温度測定点の間の熱的な相互影響が十分に考慮されていなかった．すなわち多次元的あるいは多変数的な扱いがされていなかった．これは具体的には単室扱いであったというようなことを意味する．本研究ではそもそも多次元的な状態方程式で扱うことからこの問題は解決される．また測定シス

テムは測定対象物のバリエーションに対し一般的な適用性を持つことが実用上重要である．従来は往々にして測定物件ごとにデータ解析のプログラムをつくりなおす必要があった．そこで物件が変るだけでなく測定する物理量が濃度から温度に変ろうとも全く同じデータ処理プログラムで対応することを可能にする考え方，それも本研究での回路網の概念である．

現在さまざまな工学分野はますます細分化していく傾向にある．そしてますます他分野の技術は理解し難くなっていく．そこでもしそれぞれの分野の数式記述も異なる別々の現象が，実は全く同じ形の方程式で記述でき解析できるとなれば，分野から分野への成果の移転や応用も容易になり，工学としての進歩に大きく寄与するであろう．これが状態空間法によるシステム理論家の1つの主張である．この考えによれば，構造力学的な振動の問題であろうが，航空機の運動方程式であろうが，動的な問題であれば，結局は統一的な状態方程式として記述することが可能である．これは現状の分野の細分化とは逆の統合化の方向を意味する．言い換えれば標準化の方向である．そして本研究もこの方向を指向するものである．ところがこのシステム理論においてもあまり注意されていなかったか無視されていた問題がある．それは状態方程式にもっていくためのモデリングの構造あるいは骨組みに関することである．すなわち問題を状態方程式の形に組み上げるための一般的アルゴリズムである．従来はこれが十分ではなかったために問題毎にその知識を持った人が数式記述から起こしてモデリングを行い状態方程式を作らなければならなかった．それゆえ一般技術者が使えるものにはなっていなかった．またどのような形態の系でも一般的に状態方程式として把握できるような概念と数式記述が十分ではなかったために，例えば差分法や有限要素法を統一的な視点から見おろせなかった．しかしこの問題はシステム理論自体の不備ではないと言える．なぜならば，そもそもシステム理論は，各分野の持つ問題の性質を寄せ集めて一般化した，本来抽象的なものだからである．いわゆる数学である．システム理論が数学とすれば，これを応用するのは工学である．また応用しやすいように工夫をするのも工学である．従って大きな意味において本研究は，工学の側に課せられた，こうしたモデリングの構造とアルゴリズムの問題を解決しようとするものである．

第2章　熱回路網の状態方程式モデル

2.1　熱回路網の節点方程式

伝熱の実際の現象は分布定数系すなわち連続体において起こる．しかし分布定数系を記述するのは偏微分方程式であり，この解析解は空間的形状と境界条件が単純な壁体の場合ぐらいしか得られない．さらに複雑で大きな建物伝熱系全体を全て偏微分方程式で記述するのは困難である．そこで分布定数系を集中定数系に近似することが行われる．集中定数系に近似する方法は大別して2通りある．1つは偏微分方程式を空間的に離散化する方法であり，これには差分法や有限要素法がある．もう1つは熱平衡を成立させるいくつかの検査体積に分割することによって直接的に何本かの熱平衡式を得る方法である．後者の方法は座標系に縛られていると集中定数化が難しい場合や，工学的な判断によりモデルの簡略化を行いたい場合に用いられる．建物伝熱系の場合は前者の方法だけによって建物全体にわたって近似モデル化するのは困難であるので，後者の方法も併用される．例えば，室の空気はこれ自体を1つの検査体積とし，1つの室温で代表することが多い．

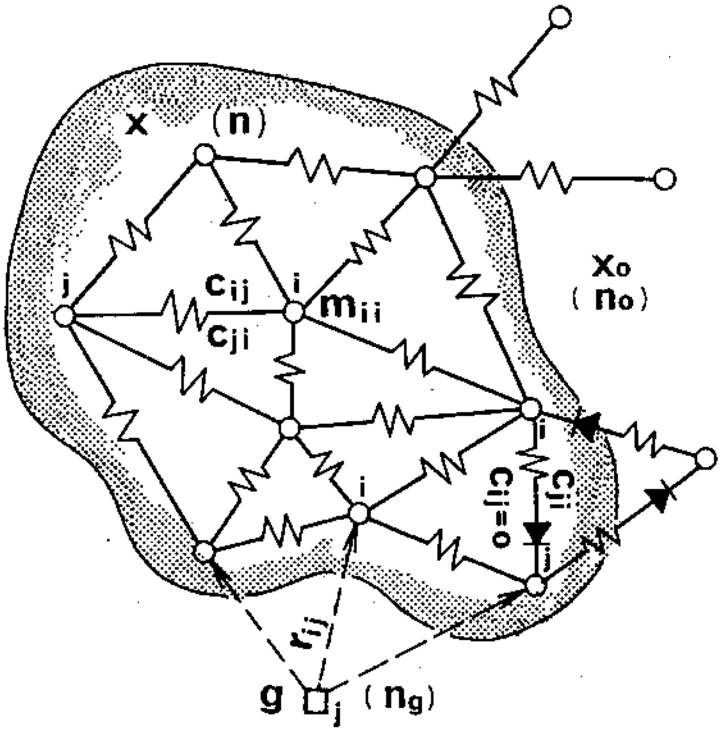


図2-1　概念図

本論文では集中定数系を扱う．集中定数化する方法は何であってもかまわないが，序論で述べたような問題点の把握の仕方から，特に検査体積法(コントロールボリューム法)に重点を置く．しかしいかなる集中定数化の方法をとるにせよ，得られるモデルの本質は同様である．すなわち，計算対象物の全体はいくつかの部分に分けられ，その1つの部分の熱容量は単一の，あるいは複数の点に凝集される．検査体積法と差分法の場合はその部分を代表する1つの点に，有限要素

法の場合にはその1つの部分とは要素を意味するが，その要素を形成する節点に分散して集められる．これらの点を熱容量節点と呼ぶことにする．記号としてはi番節点の熱容量はm_{ii}とする．

伝熱の非定常性を生み出すのは熱容量である．従って，こうして熱容量が節点に凝集してしまえば，節点と節点の間の伝熱過程は定常現象として見なせることになる．この節点と節点の間の熱の伝わり易さを拡張熱コンダクタンスとして定義する．拡張とする意味は，伝導，対流伝達，輻射伝達だけでなく，物質移動によるものも含めて，全ての伝熱形態に対して熱コンダクタンスを定義するからである．この具体的な定義は後で述べるが，検査体積法で集中定数化近似をしたときには，概ね熱貫流計算法と同様な考えかたによって計算されるものである．記号としては，i番節点とj番節点の間の拡張熱コンダクタンスをc_{ij}で表す．添字のiとjの順序によって方向性を定義する．ただし，伝導，対流伝達，輻射伝達に関しては対称性を持ち，$c_{ij}=c_{ji}$となる．これは，j節点がi節点より温度が高かろうが，i節点がj節点より温度が高かろうが，同じ温度差であれば，生じる熱流の大きさは等しいことから来る．ところがi節点とj節点がそれぞれ流体の隣接する部分を代表し，これらの部分間に流れがあれば，物質移動による拡張熱コンダクタンスは非対称性を持つことになる．もしその流体が比熱c_p，比重量γであってj節点側からi節点側へ流量qで流れていれば，$c_{ij}=c_p\cdot\gamma\cdot q$であり，逆に$c_{ji}=0$である．すなわち$c_{ij}$は$j$節点から$i$節点へ向かう拡張熱コンダクタンスを意味する．それらの2つの流体領域がマクロである限り，上流側は下流側がどのような温度状況になっていようが影響を受けない．従って，逆むきのc_{ji}は0になる．

計算対象の空間領域の外には，外気温度のように，温度が与えられる節点がある．これを規定節点と呼ぶことにする．偏微分方程式論的には，これは規定境界あるいは第1種境界条件とも呼ばれるものに相当する．ここで未知数となる総節点数をn個，規定節点の総数をno個の記号定義をする．さらに約束ごとを定める．それは未知数となる節点は1からnまで，規定節点は$n+1$番から$n+no$番までの節点番号を持つようにすることである．

ある2つの節点間に伝導，伝達から成る貫流熱流に関する拡張熱コンダクタンスのほかに，物質移動による拡張熱コンダクタンスが同時に存在する場合は，総括した拡張熱コンダクタンスは両者の和で定められる．例えば，ドアを持つ間仕切壁をはさんで2つの部屋がある場合を想像する．それぞれの部屋の空間を熱平衡の検査体積と見なす．すると間仕切壁を貫流する熱流と開いたドアを通して流れる空気によって生ずる熱流は同時に存在する．そして両検査体積の間の拡張熱コンダクタンスは貫流の分のそれと物質移動の分のそれの和である．貫流の分の拡張熱コンダクタンスは対称性を持つが，物質移動の分のそれは非対称性を持つから，足し合わされた拡張熱コンダクタンスも非対称性を持つ．しかし，ある部屋に空気の出入りがあっても，その入ってくる質量と出ていく質量は一致するように，必ず質量保存則が成立する．従って一般にあるi番節点において次式が成り立つ．

$$\sum_{j=1}^{n+no} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n+no} c_{ji} \qquad (2\text{-}1)$$

左辺はi番節点に向かう拡張熱コンダクタンスの総和を意味し，右辺はi番節点から出ていく向きの拡張熱コンダクタンスの総和を意味する．この性質は，一般の拡散系において，そのシステムの固有値の特徴を定める重要な条件となることを3.1で述べる．

規定節点が系に作用することを規定入力とすれば，このほかに作用する入力として自由入力を定義する．例えば日射のように短波長輻射で空間中を伝わり，物体に吸収されてはじめて熱となって作用する入力がある．あるいは電気ヒーターなどの発熱の入力もある．このように直接的に熱流そのものが系に与えられる場合を自由入力と呼ぶことにする．i番節点への自由入力量をg_{di}と表す．また自由入力量は発生量と入力係数と呼ぶ，量と係数の積であると見なす．発生器がn_g個あるとし，そのうちj番の発生器の発生量をg_jと表す．そしてj番の発生器からi番節点への入力係数をr_{ij}と表す．例えば日射量については，東西南北と上下の6つの日射成分に分けて考えることもできる．この場合はn_gは6であり，g_jのjが1から6までのそれぞれが各日射成分に相当する．日射受熱をする表面温度の節点番号がi番とすれば，r_{ij}はj番の日射成分からi番節点への入力係数を表す．この場合のr_{ij}は受熱面積に吸収率を掛けたものとなる．また例えば電気ヒーターによって部屋の空気を暖める場合を考える．電気ヒーターがn_g個あるとし，そのうちのj番の電気ヒーターの消費電力をg_jとする．部屋の空気温度の節点をi番とする．すると入力係数r_{ij}は電熱変換効率を意味する．このようにして一般にi番節点への自由入力量g_{di}は

$$g_{di}=\sum_{j=1}^{ng} r_{ij}\cdot g_j \tag{2-2}$$

と表される．

以上により系の数学モデルを構成する3種類の係数として，熱容量m_{ii}，拡張熱コンダクタンスc_{ij}，入力係数r_{ij}が定められた．

熱的系の挙動をあらわすのは節点の温度である．これを$x_1, x_2, \cdots, x_n$と表す．x_{n+1}，$x_{n+2}, \cdots, x_{n+no}$の$no$個の温度は規定節点の温度を表す．任意の$i$番節点$(i=1, 2, \cdots, n)$においてエネルギーの保存則から，次の熱平衡式が成立する．これを節点方程式と呼ぶことにする．

$$m_{ii}\cdot\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n+no} c_{ij}\cdot x_j-\sum_{j=1}^{n+no} c_{ji}\cdot x_i+\sum_{j=1}^{ng} r_{ij}\cdot g_j \tag{2-3}$$

右辺はi番節点に流れこんでくる熱流の収支を意味する．左辺の$\dot{x}_i$はi番節点の温度の時間微分を表す．従ってこの式は熱流の収支によって温度が時間変化することを記述している．(2-1)の質量保存則により，(2-3)式は次式と同じである．

$$m_{ii}\cdot\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n+no} c_{ij}\cdot(x_j-x_i)+\sum_{j=1}^{ng} r_{ij}\cdot g_j \tag{2-4}$$

右辺の第一項は，熱流が温度差と熱コンダクタンスに比例するという熱伝導に関する通常の概念に適合する形となっている．(2-3)と(2-4)式は検査体積法による集中定数系モデルにおいては直感的に理解できるものである．しかし偏微分方程式の空間的な差分化による集中定数系モデルにおいても，その1つの温度節点での方程式は，これらの2つの熱平衡式と本質は同じであることが2.4で示される．ただし同じ集中定数系モデルであっても有限要素法から得られる熱平衡式は左辺が多少異なってくる．これは次式で示される．これを一般化節点方程式と呼ぶことにする．

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot\dot{x}_j=\sum_{j=1}^{n+no} c_{ij}\cdot(x_j-x_i)+\sum_{j=1}^{ng} r_{ij}\cdot g_j \tag{2-5}$$

検査体積法と差分法は(2-5)式の特殊な場合とも見なせる．すなわち，左辺において，$i\neq j$のときには$m_{ij}=0$の特殊な場合である．(2-5)式のm_{ij}は有限要素法によって数学的に計算できるものであり，これは2.5で述べるが，物理的な直感からは計算出来ない．しかしその意味を強いて述べるとすれば，m_{ij}とはi番節点へ流れ込んでくる熱流のうち，j番節点の温度上昇に使われるものに課せられる熱容量といえる．

以上の熱平衡式を立てるために用いた重要な概念がある．計算対象物の全体はいくつかの検査体積に分けられた．それらの各々の検査体積は他の全ての検査体積と拡張熱コンダクタンスによって結びついていると考える．実際に物理的に結びついていないときにはその拡張熱コンダクタンスは0である．非0の拡張熱コンダクタンスによってだけ実際に熱的に結びついている．しかし拡張熱コンダクタンスが非0であれ0であれ，数式上は1つの節点は他の全ての節点と結びついているとして定式化する．これを熱回路網の定式化法と呼ぶことにする．この定式化法によってどのような熱的結びつきかたであっても，すなわち多次元的な伝熱系であっても全く同一の数式記述が可能となる．それゆえこれを完全システム記述と呼ぶ．これはまた電算機利用の計算上も有利である．すなわち計算プログラムとしての汎用性を達成できるからである．またこの定式化法によって後に述べる状態方程式が自動的に構成されるからである．ところで(2-3)や(2-4)の単純な方程式記述を可能にする上で重要な役割をはたしているのが拡張熱コンダクタンスのとらえかたである．種々の伝熱形態をこのように統一的に単一のパラメータでとらえることがこうした数式記述を可能にし，電算機利用に適したモデル化を容易にする．

なお，以上の節点方程式は熱に関して説明したが，一般に拡散系であれば，他の物理量にもそのまま当てはまるものである．例えば第6章においては多数室における換気測定法について論じるが，この場合はトレーサーガスの濃度が温度に相当するものとして基本方程式は同じ形である．

2.2　回路網の概念による状態方程式

前節までに節点方程式と，その方程式を構成する3種類のパラメータの意味を述べてきた．ここでは系全体の方程式を導く．そしてこの全体方程式は状態方程式の形にする．そのために次の3種類のベクトルを定義する．1つは温度状態ベクトルであり，一般的には状態ベクトルと呼ばれるものである．これは，

$$\mathbf{x}={}^t(x_1,x_2,\cdots\cdots\cdots,x_n) \tag{2-6}$$

と表す．ここにtは転置(transpose)を意味する．つまり$\mathbf{x}$は列ベクトルである．いわゆる未知数となる節点は1番からn番としている．従って$\mathbf{x}$のサイズはnであるともいう．次に系に対して入力となるベクトルを定義する．入力は二種類あり，規定入力と自由入力を述べてきた．まず規定温度入力ベクトルは次のように表す．

$$\mathbf{x}_0 = {}^t(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\cdots\cdots; x_{n+no}) \tag{2-7}$$

すなわち，$n+1$番から$n+no$番の節点は既知の温度を持ち，$\mathbf{x}o$のサイズはnoである．次に自由入力ベクトルは

$$\mathbf{g} = {}^t(g_1, g_2, \cdots\cdots\cdots, g_{ng}) \tag{2-8}$$

で表す．個々のg_jは入力係数r_{ij}が乗じられて，熱系においては節点iの発熱量，ガス拡散系などにおいてはガス発生量などとなる．$\mathbf{g}$のサイズはn_gである．以上の3つのベクトルが定義されれば，状態方程式は一意的に決定される．そしてまたその構成はきわめて規則的に，すなわちアルゴリズムに直結した方法で行われる．(2-3)あるいは(2-5)式の節点方程式から，(2-6), (2-7), と(2-8)式のベクトルの定義によって，状態方程式は次のベクトルとマトリクスの形式で組み立てられる．

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{C}_o\cdot\mathbf{x}_o + \mathbf{R}\cdot\mathbf{g} \tag{2-9}$$

ここに$\mathbf{M}$は熱容量のパラメータm_{ij}で構成され，熱容量マトリクスと呼ぶことにする．そして一般的に拡散系を考えるときには容量マトリクスと呼ぶことにする．$\mathbf{C}$は拡張コンダクタンスc_{ij}によって構成され，熱コンダクタンスマトリクスと呼ぶことにする．同様に一般的に拡散系を考えるときには単にコンダクタンスマトリクスと呼ぶことにする．これらのマトリクスは明らかに$n\times n$の正方マトリクスである．$\mathbf{C}_0$, $\mathbf{R}$のマトリクスは駆動マトリクスと呼ぶことにする．$\mathbf{C}_0$はc_{ij}によって構成され，$n\times no$のサイズの長方マトリクスである．$\mathbf{R}$はr_{ij}によって構成され，$n\times n_g$のサイズの長方マトリクスである．

これらのマトリクスの中味は，m_{ij}, c_{ij}, r_{ij}の添字の定義によって，簡単なものとなっている．すなわち，線型代数の記号定義上，例えばマトリクス$\mathbf{A}$のi行j列要素はa_{ij}と表すが，これと同様な方法でそれらのマトリクスの中味が直ちに書き出せるからである．ただしこのとき2つの点に注意しなければならない．1つはコンダクタンスマトリクスの対角要素のとり方であり，もう1つは，駆動マトリクス$\mathbf{C}_0$の列の番号のとり方である．すなわちそれぞれのマトリクスの中味は次のようになっている．

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,i} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,i} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \cdots & m_{i,i} & \cdots & m_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,i} & \cdots & m_{n,n} \end{bmatrix} \tag{2-10}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{n+no} c_{j,1} & c_{1,2} \cdots & c_{1,i} \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & -\sum_{j=1}^{n+no} c_{j,2} \cdots & c_{2,i} \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{i,1} & c_{i,2} \cdots & -\sum_{j=1}^{n+no} c_{j,i} \cdots & c_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} \cdots & c_{n,i} \cdots & -\sum_{j=1}^{n+no} c_{j,n} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}11)$$

$$\mathbf{C}_o=\begin{bmatrix} c_{1,n+1} & c_{1,n+2} \cdots & c_{1,n+no} \\ c_{2,n+1} & c_{2,n+2} \cdots & c_{2,n+no} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i,n+1} & c_{i,n+2} \cdots & c_{i,n+no} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n,n+1} & c_{n,n+2} \cdots & c_{n,n+no} \end{bmatrix}$$

$$(n\times n_o) \qquad (2\text{-}12)$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \cdots & r_{1,ng} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \cdots & r_{2,ng} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{i,1} & r_{i,2} \cdots & r_{i,ng} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} \cdots & r_{n,ng} \end{bmatrix}$$

$$(n\times n_g) \qquad (2\text{-}13)$$

(2-10)式のように，容量マトリクス$\mathbf{M}$は，m_{ij}を全く単純にそのi行j列へ入れたものである．前述した検査体積法と，差分法による集中定数化近似をした場合にはこの非対角要素は全て0である．有限要素法によった場合には0でない非対角要素も出てくるが，対称性は持つ．

2.3 検査体積法によるモデル化の方法

伝熱系の数学モデルを構成する3種類の係数として熱容量m_{ij}, 拡張熱コンダクタンスc_{ij}, 入力係数r_{ij}の概要を述べた. これらの係数をシステムパラメータと総称することにする. ここでは具体的にこれらのシステムパラメータの意味を論じる.

まずモデル化の基本的な手順は次のようにする.

(1) 全体を熱流の検査体積に分割する.
ただし分割の細かさについては第4章で指針を与える.

(2) それぞれの検査体積の中心に節点を設ける.

(3) 熱回路網の図表示をする.
伝導, 伝達, 輻射および貫流は抵抗の表示, 物質移動(移流)はダイオード表示をする.

(4) 節点番号を付ける. 未知温度の節点は前づめに(n個), 既知温度のものは後ろづめ(no個)にする.

(5) 各検査体積の熱容量をその節点に集中し, これをm_{ii}(i番節点)として計算する. ($i=1, 2, \cdots, n$)

(6) 節点間の拡張熱コンダクタンスc_{ij}を計算する. 非定常性を生み出す熱容量は節点に集中されて近似化されたから, 節点間の伝熱は定常扱いが出来る. 従って, 伝導と伝達に関してはおおむね熱貫流計算法と同様に考えて計算できる. ただし, この種の伝熱は対象性を持ち$c_{ij}=c_{ji}$である. しかし物質移動によるものは非対称性を持ち, どちらかは0である.

熱コンダクタンスに特に拡張と付ける意味は物質移動などによる伝熱をも含めるからであり, こうした意味で実際の伝熱系を計算モデルとしてとらえるものの見方は多少新しくしなければならない. つまりあらゆる伝熱形態を熱コンダクタンスでとらえること等の概念の変更が必要である.

この概念を論じるために以下に単純なものから複雑なものまで具体的な例をあげる.

2.3.1 壁の伝熱系

通常, 最初に問題にされるのは壁の1次元伝熱系である. 図2-2には壁の断面とその熱回路網のモデルを示す. 検査体積分割については, 断熱材と空気層はそれぞれ1つにまとめ, コンクリートの部分についてはその厚みを3等分している. さらに空気層をはさむ両表面で, 膜状であって体積が0の特別な検査体積を考える. これは輻射伝熱をモデル化するために必要となるものである. この場合, 未知数の温度の節点は1から7であり, 規定温度の節点は8と9である. 従って$n=7$, $no=2$となる.

m_{ij}の計算については明らかである. c_{ij}について, 伝熱や伝達から成る部分は熱貫流計算と同様に考えて計算できるが, 輻射によるものは次のように考える. いまi番節点で代表される面とj番のそれとの間で輻射伝熱があるとすれば, ステファン·ボルツマンの法則を基本とし, これを線形近似化して定められている次式の周知の輻射伝達率をまず計算する.[15)]

$$\alpha_r = 0.04 \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \cdot c_b \cdot (x_m/100)^3 \tag{2-14}$$

ここにε_i, ε_jは両表面の輻射率, c_bは黒体の輻射定数である. またx_mは両表面の平均絶対温度である. このα_rによって輻射のc_{ij}は,

$$c_{ij}=\alpha_r \cdot s_j \cdot f_{ji} \tag{2-15}$$

$$c_{ji}=\alpha_r \cdot s_i \cdot f_{ij} \tag{2-16}$$

で計算される．ここにs_i, s_jは面iと面jの面積，f_{ij}は面iから面jを見る形態係数，逆にf_{ji}は面jから面iを見る形態係数を表す．相反法則によって

$$s_i \cdot f_{ij}=s_j \cdot f_{ji} \tag{2-17}$$

が成立するから，輻射伝達に関しても$c_{ij}=c_{ji}$の対称性が成り立つ．

(2-14)式においてx_mは，本来は未知な温度を用いて定められるものである．即ち，輻射伝熱に関するc_{ij}は温度自身に依存しており非線形性を持つ．全体の伝熱系を非定常で計算していく場合は，前の時刻の温度によってc_{ij}を定める．図2-2の熱回路網のモデル図について，最終的に実際の電気回路を用いるわけではないから，こうした表現方法が厳密に電気の分野の表示法に対応してはいない．ただ，この図的な表現方法によって得られる利益は扱おうとする伝熱モデルの構造が直感的に明らかになることである．

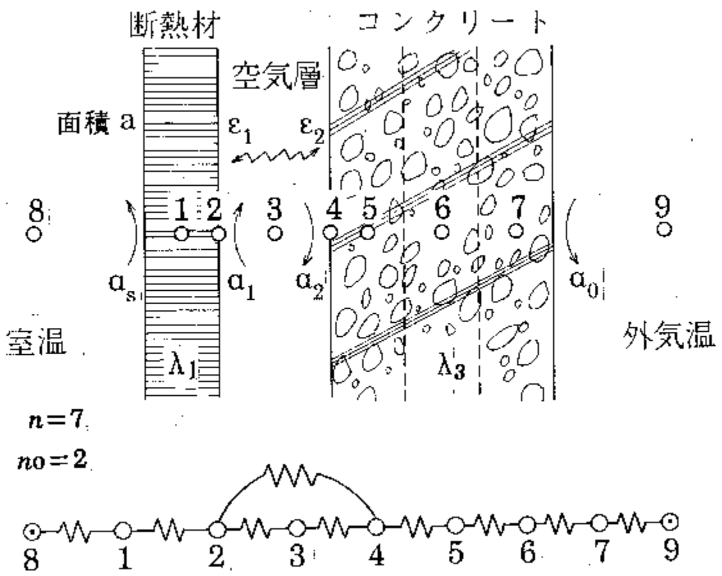


図2-2　壁の伝熱系

2.3.2　異形壁の伝熱系

この例では2次元的な熱流を持つ伝熱系についてモデル化を述べる．

図2-3は柱形を含む異形壁の断面と，この熱回路網のモデルを示す．このような場合は直方体の検査体積が適している．2次元になっても前の例と同様にしてm_{ij}，c_{ij}が計算できる．

このように幾何学的に規則正しく，かつ単純な形状の場合のシステムパラメータの作成はある一定のアルゴリズムを用いて自動的に行うこともできる．こうした方法の1つに有限要素法や差分法があげられる．しかし，大切なことは，それらの方法は結局ここでいうところのシステムパラメータを求めるものにすぎないと認識することである．検査体積法との関連と統一については後の2.4と2.5で論じる．

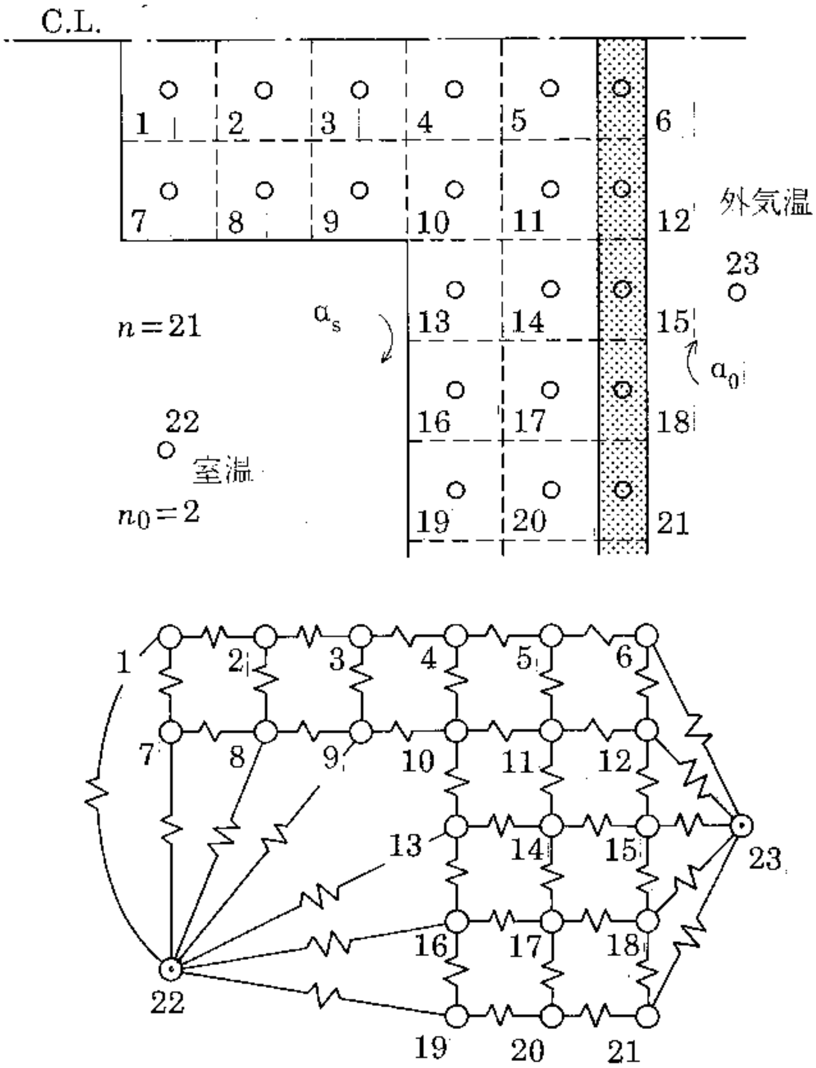


図2-3　異形壁

ところで，この例では空気との伝達表面や，異なった材質間の境界に節点を設定していない．しかし，もしそれらの面に設ける節点の熱容量が0のものであれば，結局シミュレート計算の結果は本質的に同じものとなる．なぜなら熱容量が0の節点のところは定常扱いになってしまうからである．もし，このような面に節点を設ける必要があるとすれば，輻射などの計算を伴う場合である．ただし，これらの表面の節点を設けないモデルにおいても，シミュレーションの結果からその表面温度を逆算することは可能である．一方，有限要素法においてはこうした面には必ず節点が位置し，2.5に述べる数学的方法によってこれらの節点も非0の熱容量を持つことになる．

以上の例によって，例え3次元的な伝導伝熱系になった場合についてもモデル化は明らかである．

2.3.3　多槽直列の蓄熱槽

この例では水の流れによって熱が運ばれる場合を考える．つまり，物質移動による熱流が存在する場合である．このために冷暖房の熱源としてよく用いられる多槽直列の蓄熱槽をとり上げる．図2-4は4槽が直列につながっている例を示す．右端の槽から吸上げられた水はボイラや冷凍機によって加熱·冷却され，左端の槽に戻り，蓄熱されていく．冷暖房のために放熱するときには逆に循環する．これらのボイラや冷凍機の運転状況をシミュレートするときには時々刻々に蓄熱槽からの水温が必要である．逆に放熱する際のコイルでも同様である．このような冷暖房のシミュレーションのために用いられる多槽直列の蓄熱槽モデルでは各槽において完全混合の仮定を設けるのが普通である．

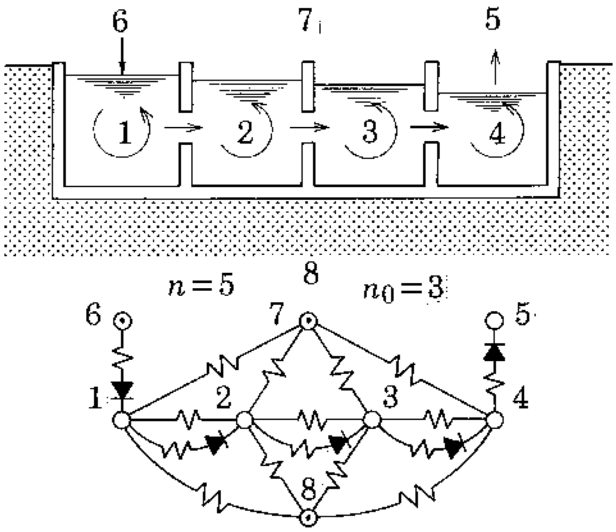


図2-4　多槽直列の蓄熱槽

この場合の検査体積は各槽に対応する．従って，m_{ij}は単に各槽の水の熱容量となる．未知温度の節点は1から5である．5の節点の熱容量を0にすれば常に5は4の温度に等くなる．節点7は周囲空気の温度，8は不易層の既定温度を表す．節点7と8の温度によって熱損失が考慮される．もし槽から槽への体積流量が全て等くqとすれば，流れ方向の$c_{1,6}$，$c_{2,1}$，$c_{3,2}$，$c_{4,3}$，$c_{5,4}$は全て$c_p{\cdot}\gamma{\cdot}q$となる．ここに$c_p{\cdot}\gamma$は水の比熱と比重量である．そして流れと逆方向の$c_{6,1}$，$c_{1,2}$，$c_{2,3}$，$c_{3,4}$，$c_{4,5}$は0である．ただし，これらの物質移動による熱流と貫流による熱流が同時に存在しているところでは，それぞれのc_{ij}を加え合せて最終的なc_{ij}とする．例えば節点2と3の間では物質移動によるもののほかに隔壁を通しての貫流があるからこれも加え合せる．従って最終的な$c_{2,3}$と$c_{3,2}$はやはり等くはなく非対称であるが，$c_{2,3}$は0ではなくなる．

2.3.4　小石蓄熱槽

物質移動による熱流のほかに伝導伝熱と対流伝達が含まれる伝熱系のモデル化の例として小石蓄熱槽がふさわしい．この種の蓄熱槽は比較的に安価であることからパッシブソーラーハウスなどに利用される．図2-5に，その断面図を示す．

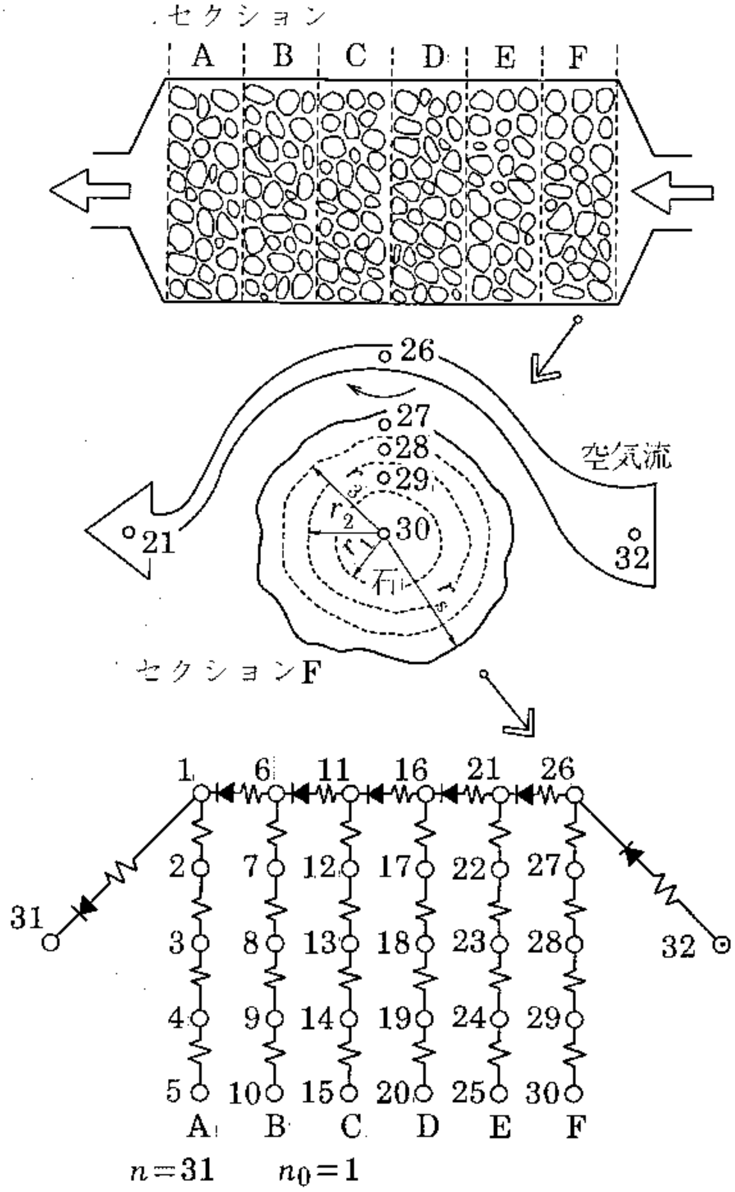


図2-5　小石蓄熱槽

蓄熱するときには，空気式の太陽熱集熱器や付設温室からの暖まった空気を流し込み，内部に詰こまれた石の間を通らせ，これらの石を暖める．暖房するために放熱するときには，室の空気を循環させる．個々の石の表面では強制対流熱伝達が行われ，石の内部では伝導が起きる．この伝導を非定常熱伝導としてモデル化することによってはじめて蓄熱･放熱状況がシミュレーションできる．また蓄熱槽に対しての空気の流れ方向に空気および石の温度分布が著しく生じるから，この分布もモデル化する必要がある．

まず，空気の流れ方向の温度変化を考慮できるモデルにするために図のようにAからFのセクションに分ける．節点1, 6, 11, 16, 21, 26は各セクション内の空気を表す．

蓄熱状況を考慮するために，小石内部でのモデル化を考える．石の1個々をモデル化したのでは非常に節点数の多い不経済なものになるので簡略化する．小石は球状のものと見なし，平均的な粒径を求める．この粒径に応じて内部を適当な数の同心球で分割する．ここでは4分割した．こうして殻状の検査体積と，中心部では球状の検査体積が得られる．それぞれの検査体積の熱容量を，各セクション内での個数分だけ足し合せ，節点の熱容量とする．Fのセクションでは27, 28, 29, 30の節点がこれらに相当する．

c_{ij}の計算法もほとんど明らかである．石の表面と空気流のc_{ij}の計算には強制対流の熱伝達率が必要である．しかし，これは標準的な伝熱工学の資料[72]に，ヌッセル数，レイノルズ数，プラントル数などの間の関係式として実験的に求められているものから得られる．石の内部のc_{ij}は球の内部での球面の熱コンダクタンスの計算式が同様な資料に示されているので，これを利用して計算できる．

実際の蓄熱槽の運転では，空気流の発停がある．さらにこの風量自身も変化する場合も考えられる．こうした現象は熱回路網のモード変化として明快に処理できることを第3章で示す．

2.3.5　日射入力係数

自由入力係数r_{ij}の具体例としては日射量に関するものが適当である．通常，外壁表面の日射受熱量計算は法線面直達日射量と天空拡散日射量の2つの基本日射量に，太陽位置によって変化する時変係数を乗じることによって行われる．すなわち，系に対する入力変数をこの2つの日射量にとる限り，系のパラメータは時変でなければならない．本研究ではシステムパラメータは原則的に線型定数のものとして扱うわけであるから，日射入力についてもこれを実現する方法を考える．

図2-6に6方位に分けられた全日射成分，g_1(南)，g_2(北)，g_3(東)，g_4(西)，g_5(上)，g_6(下)を示す．そして受熱面の法線単位ベクトルをnとし，方位角をα，傾斜角をβとする．ただし方位角は南から西まわりに正とする．受熱面の節点をiとする．そしてこの面積をsとする．またそれぞれの日射成分に対する吸収率をa_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6とする．するとr_{ij}は次のようにして計算される．

a1)　$sin\beta \cdot cos\alpha \geqq 0$ならば

$$r_{i,1} = s \cdot a_1 \cdot sin\beta \cdot cos\alpha \tag{2-18}$$

$$r_{i,2} = 0 \tag{2-19}$$

a2)　$sin\beta \cdot cos\alpha < 0$ならば

$$r_{i,1} = 0 \tag{2-20}$$

$$r_{i,2} = -s \cdot a_2 \cdot sin\beta \cdot cos\alpha \tag{2-21}$$

b1)　$-sin\beta \cdot sin\alpha \geqq 0$ならば

$$r_{i,3} = -s \cdot a_3 \cdot sin\beta \cdot sin\alpha \tag{2-22}$$

$$r_{i,4}=0 \tag{2-23}$$

b2) $-sin\beta\cdot sin\alpha<0$ならば

$$r_{i,3}=0 \tag{2-24}$$

$$r_{i,4}=s\cdot a_4\cdot sin\beta\cdot sin\alpha \tag{2-25}$$

c1) $cos\beta\geqq 0$ならば

$$r_{i,5}=s\cdot a_5\cdot cos\beta \tag{2-26}$$

$$r_{i,6}=0 \tag{2-27}$$

c2) $cos\beta<0$ならば

$$r_{i,5}=0 \tag{2-28}$$

$$r_{i,6}=-s\cdot a_6\cdot cos\beta \tag{2-29}$$

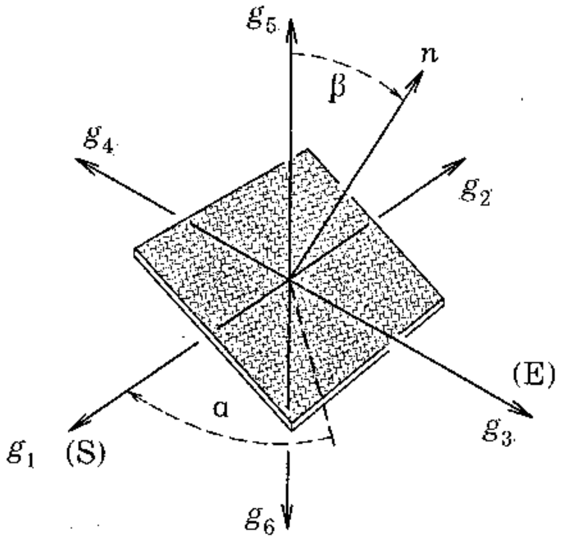


図2-6　日射成分

以上のようにして受熱面の向きが定まれば，r_{ij}は定数とすることができる．ただし窓ガラスに関し，透過日射量や吸収日射量をこの入力係数で計算することは出来ない．この透過や吸収の特性が，直達分と拡散分それぞれで定義されているからであり，全日射成分によって定義されていないからである．同様な理由から日射遮蔽物などによる影響を考慮することも困難である．

こうしたシステムパラメータを定義しておくことは，シミュレーションの計算のために有効というよりも，むしろ第6章で述べる同定理論のために有益である．なぜならば，そこでは線型のシステムパラメータについて論じるからである．

2.3.6　トロンブ壁

日射の影響を考慮する例について述べる．建築計画的な太陽熱の利用方法の中で良く知られているのがトロンブ壁である．図2-7の左にその断面を示す．トロンブ壁の基本的構成は，ある程度の厚みがあり適当な蓄熱効果を持つ壁の外気側に，空気が流通できる中空層をはさみ，ガラスの覆いを付けているものである．日射はガラスを大部分透過し，壁の中空層に面した内表面を暖める．この熱は中空層内を浮力により上昇する気流によって一部が運ばれ，多くの場合は暖房の補助になる．さらに暖まったその内表面から壁の内部に向かって伝導で流れていく熱は壁体内に蓄熱され，室温が低いときに室内側へ放熱し，これも暖房の補助となる．

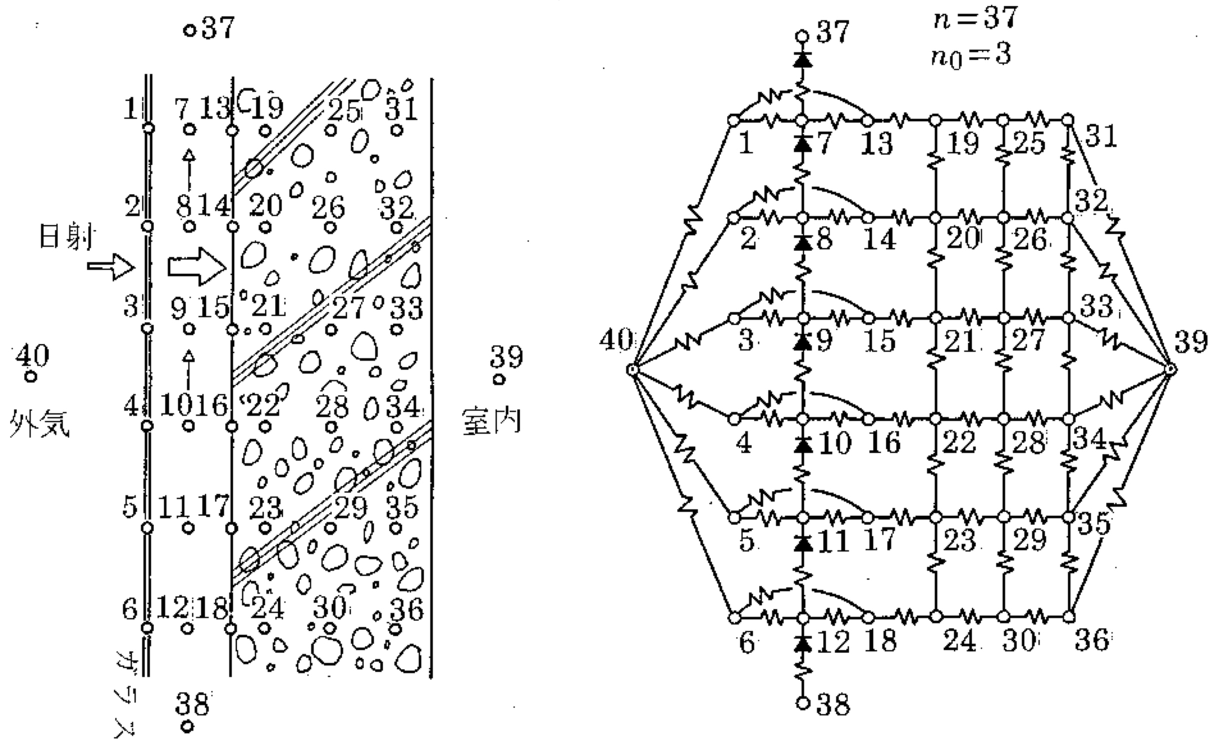


図2-7　トロンブ壁

こうした伝熱系では3つの重要な効果が利用されている．これらは温室効果，浮力の効果と蓄熱効果である．1つめの効果は長波長域の輻射や，対流伝達，伝導のc_{ij}を適切に与えてやることにより考慮される．2つめの効果は煙突効果とも呼ぶが換気計算によって対応することができる．ただし，この場合，熱と換気の総合影響も考慮しなければならない．これらのことは第5章において述べる．3つめの効果はm_{ij}のパラメータによって考慮される．

壁厚，中空層厚，日射吸収面の塗料の長波長輻射率，あるいは日射吸収率など最適化したい設計パラメータはたくさんあり，こうした場合に，実験による検討よりは，コンピューターシミュレーションが有利となる．

2.3.7 パッシブソーラーハウス

これまでの例は比較的に部分的な伝熱系に関するものであった．ところがその部分に対して与条件としていた規定節点の温度は本来さらに別の部分との熱的な相互影響を考慮して初めてわかるものである．例えば，トロンブ壁の図2-7の場合は，その中空層へ室内の空気が直接入ってきたり，あるいは小石蓄熱槽における出口からの空気が入ってきたりする．逆に中空層から出てくる空気は室内へ直接戻ったり，小石蓄熱槽へ戻ったりする．従って，こうした場合にはトロンブ壁だけを，あるいは小石蓄熱槽だけをモデル化し計算しようとしても実現象にそぐわない．つまり，これらの部分が相互影響して成る全体をモデル化し計算する必要がある．これが序論(ニ)の熱的な連成効果の問題である．

このパッシブソーラーハウスの例では今までの例より全体的なモデル化について述べる．そして，この全体化のために単に今までの考え方を延長する．部分のモデルを数学的に連成する方法については次章に述べることにする．

図2-8の上部にはパッシブソーラーハウスの断面図，下部にはその熱回路網のモデルを示す．この建物は付設温室，小石蓄熱槽，通風する二重壁，日射熱を蓄熱したり放熱するためのレンガ壁などなどから成っている．これらは日射などの自然エネルギーを自然な方法で運んだり，蓄えたり，放熱するための工夫である．夏期，冬期あるいは日射の有無によって空気の流し方を変える．これも一種の時変性であり序論の(ホ)で述べた非線型性の1つの意味である．これに対し回路網のモード変化として対応する方法は次章で述べる．

また，室内の空気1つをとってみてもさまざまな部分と各種の伝熱形態によって結びついているといえる．これが序論の(ロ)で述べた熱流の多次元性である．節点が日射を受ける外表面に必ずしもない場合についてr_{ij}の定め方を述べる．図中の節点1は日射制御および断熱のパネルを表す．また節点4や7はそれぞれ屋根と壁の外側の節点を表わす．これらの節点や，レンガ壁の12,さらに温室の床表面近くの節点21は日射の受熱をする．このように，節点が表面からめり込んでいる場合には，表面での日射量に適当な日射入力係数を乗じることによって，正味の節点での受熱量に直すことができる．ここで，x_kが外気温度，x_iが壁体内にめり込んだ節点の温度，c_{ik}がこれらの熱コンダクタンス，g_jが日射量，aが吸収率，αが表面と外気の熱伝達率とする．相当外気温度によって節点iに流れ込んで来る熱流qは次式で表される．

$$q=c_{ik}\cdot(x_k+a\cdot g_j/\alpha-x_i)$$

従って，i節点での日射入力係数r_{ij}は次式で表される．

$$r_{ij}=c_{ik}\cdot a/\alpha \tag{2-30}$$

もし，たまたまi節点が表面に位置するときには$c_{ik}=\alpha\cdot s$となり，日射入力係数は$a\cdot s$となる．ここにsは表面積である．

以上の具体的な例を通して，主に検査体積法によって集中定数化近似を行い，熱回路網のモデルをつくる考え方を述べた．このモデルは3種類の係数，熱容量m_{ij}，拡張熱コンダクタンスc_{ij}，自由入力係数r_{ij}によって構成される．特に伝導，伝達や物質移動などの種々の伝熱形態に対する統一的な拡張熱コンダクタンンスのとらえ方は重要である．また，このモデル化の概念と熱貫流

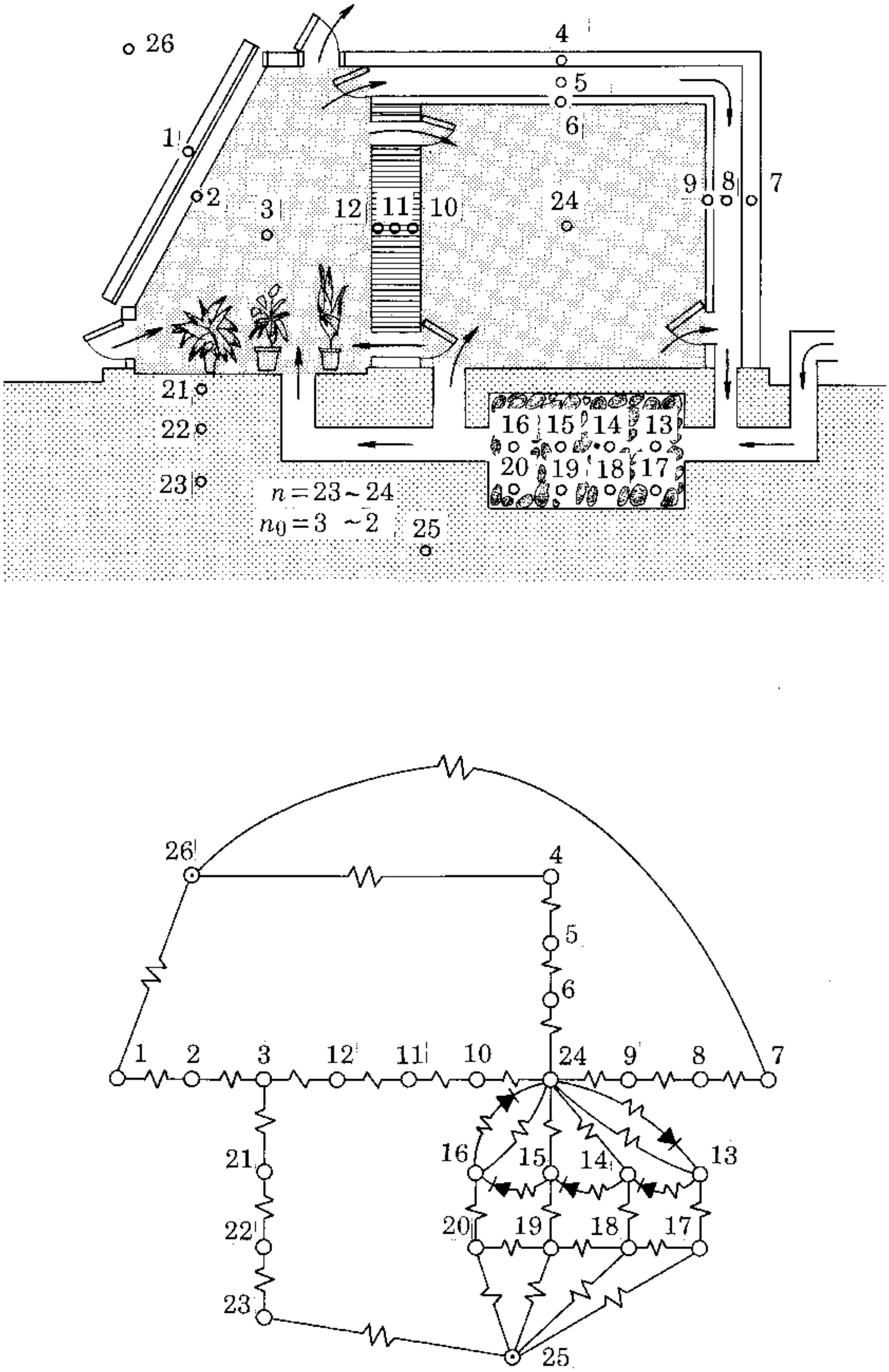


図2-8　パッシブソーラーハウス

の計算法を基本としてパラメータが計算できる．システムパラメータさえ与えられれば，あとは一般的なアルゴリズムで処理できる．

2.4 各種の集中定数化法の比較

前節までは，熱の拡散系を直接的にかつ工学的に集中定数系モデルにする方法について述べてきた．しかし従来の集中定数化の方法においては，まずはじめに拡散系を連続的な偏微分方程式によってとらえ，この偏微分方程式に対し数学的な方法を施してその種のモデルを得るのが唯一の如く論じられているのが普通である．これがいわゆる差分法や有限要素法と呼ばれるものとなっている．そして偏微分方程式の加工によって得られる最終的な数学モデルを一体的なシステムとして見なし，かつその内部構造を明快に論じているものはほとんどなかった．そこで本論文での熱回路網の考え方により，これらの差分法や有限要素法を統一的な視点から見直すことにする．

まず本論文では集中定数化と離散化という言葉の意味を明確にしておきたいと思う．集中定数化とは，連続体の分布定数系をいくつかの空間的な部分領域に分割し，それらの部分領域内あるいは部分領域間の状態分布について適当な仮定や近似を設けることにより，有限の個数の代表点が持つ状態値に関する代数的な関係式を導くことであるとする．前節までで検査体積法と呼んできたものは，その検査体積がこの部分領域に相当する．そして部分領域を代表するのは1点の場合であり，これらの点の間の状態値の分布は定常状態であるという近似が設けられていたことになる．これに対し離散化とは連続体である分布定数系を記述する偏微分方程式を空間的にあるいは時間的に集中定数化することであるとする．つまり離散化とはあくまでも偏微分方程式を基本とする．従って集中定数化の方法は次表のように分類される．

表2-1　集中定数化法

集中定数化法	偏微分方程式に対しての空間的離散化法	空間的差分法
		有限要素法
	物理法則から直接的に行う方法	検査体積法

検査体積法という言葉も種々の意味で用いられている．つまりこれも偏微分方程式を出発点として論じているものも見られるし，[73] また分割して得られる部分領域の中心1点だけを代表点とするのではなく，部分領域間の複数の界面上に代表点を複数設置しているものもある．しかしいずれの場合でも検査体積法の本質的な考えかたは同じであり，本論文ではこの本質を生かした2.3で述べたような方法をそのように呼ぶことにする．

これから行う集中定数化はいずれの場合でも時間に関しては連続系のままとするが，これは最終的な数学モデルを(2-9)式で表されるような状態方程式にしようとするためである．

数学的な離散化を行う場合，扱おうとする現象を記述する方程式は，一般に支配方程式と呼ばれる．比較の簡単化のために，1次元の熱伝導方程式を支配方程式とする．これを次式で表す．

$$c_p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{2-31}$$

ここにc_pは伝導体の比熱，γは比重量，λは熱伝導率とする．またθは温度，tは時間，xは1次元の空間座標での位置を表す．これは壁体のようなものの熱伝導を記述するものとし，従って両側の表面で次の境界条件を持つものとする．

$$\pm \lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=x_s} = \alpha \cdot (\theta_r - \theta_s) \tag{2-32}$$

ここにαは対流熱伝達率，θ_rは表面から十分に離れたところでの空気温度，θ_sはこれに面する表面温度とする．左辺の符号は，x軸負の方向の境界では負，正の方向の境界では正である．

まず，2.3節で述べてきた検査体積法を，偏微分方程式に則った空間離散化の言葉で書き直してみる．

2.4.1　検査体積法による集中定数化

これはΔx, Δy, Δzの立方体において，熱の流れの保存性を物理的な考察により，直接に数式化する方法である．このことはまず言葉によって次のように表現される．

(検査体積の温度の時間変動)＝

(熱伝導により検査体積に流入する熱量の正味の和)　・・・・・・・・・・(2-33)

この記述に従って数式を形づくる．そのために，立方体の中心に代表点を置き，このx座標の位置をx_iとする．x方向に隣接する別の立方体の中心のx座標は各々x_{i-1}, x_{i+1}とする．重要なことはこれらの代表点間の温度分布のとりかたであるが，本論文でいうところの検査体積法では，これが定常状態になるという近似をとっている．このことは一様な熱物性の物体では，これらの代表点間の温度分布は線形補間できるものであるとすることと同じである．そして検査体積の持つ熱容量はその代表点に集中される．従って(2-33)式の左辺と右辺はそれぞれ次のようになる．

(検査体積の温度の時間変動)＝

$$c_p \cdot \gamma \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \tag{2-34}$$

(熱伝導により検査体積に流入する熱量の正味の和)＝

$$\lambda \cdot \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} \cdot (\theta_{i-1} - \theta_i) + \lambda \cdot \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} \cdot (\theta_{i+1} - \theta_i) \tag{2-35}$$

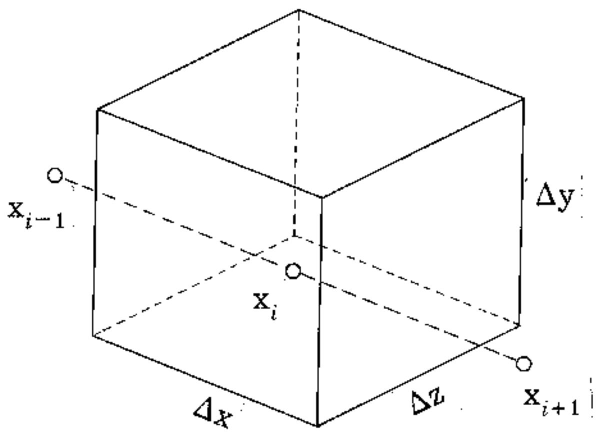


図2-9　座標系に則った検査体積

ここにθ_i, θ_{i-1}, θ_{i+1}はそれぞれx_i, x_{i-1}, x_{i+1}での温度である.

2.1での記号定義に従って熱容量のシステムパラメータm_{ij}, 拡張熱コンダクタンスのc_{ij}はこの場合, 次のようになる.

$$m_{ii}=c_p\cdot\gamma\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z \tag{2-36}$$

$$c_{i,i-1}=\lambda\cdot\Delta y\cdot\Delta z/\Delta x \tag{2-37}$$

$$c_{i,i+1}=\lambda\cdot\Delta y\cdot\Delta z/\Delta x \tag{2-38}$$

(2-37), (2-38)式は節点間のコンダクタンスであるから, 同様に考えて, 境界でのコンダクタンスも計算される. 伝導体側の節点iから表面までの距離を$\Delta x/2$, 空気の節点をjとすれば,

$$c_{i,j}=\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\dfrac{\Delta x}{2\cdot\lambda}+\dfrac{1}{\alpha}} \tag{2-39}$$

となる. 節点番号はx軸正方向に空気も含めて1から順に付けていくとすれば, 伝導体内において(2-33)式からの次式が成立する.

$$m_{ii}\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=c_{i,i-1}\cdot(\theta_{i-1}-\theta_i)+c_{i,i+1}\cdot(\theta_{i+1}-\theta_i) \tag{2-40}$$

(2-4)式のような一般的な記述は, 座標系に拘束された節点番号の付け方から離れ, 回路網の概念を導入することによって可能となる. 従ってこのままでは(2-9)式のような全体方程式を組み上げる方法も一般的にはならないことに留意する.

2.4.2　差分法による空間的離散化

これは，支配方程式を直接に空間的に差分化することによる．1次元の伝導体内をΔxで差分化するとし，これで区切られた界面に節点を設置する．節点番号の付け方はx軸の正方向へ，空気も含めて1から順に付けることにし，最後の空気の番号はntとする．このうち，伝導体内でのある節点iをとり上げ，そこでの差分式は(2-31)から

$$c_p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \lambda \frac{\dfrac{\theta_{i+1}-\theta_i}{\Delta x} - \dfrac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lambda \cdot \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 \cdot (\theta_{i+1}-\theta_i) + \lambda \cdot \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 \cdot (\theta_{i-1}-\theta_i) \qquad (2\text{-}41)$$

となる．$i=2$の境界においては

$$c_p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \lambda \frac{\dfrac{\theta_3-\theta_2}{\Delta x} - \left.\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=x_2}}{\Delta x} \qquad (2\text{-}42)$$

となる．しかるに(2-32)の境界条件式によって(2-41)式の右辺分子の第2項は置換えられ，次式となる．

$$c_p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 \cdot (\theta_3-\theta_2) + \alpha \cdot \left(\frac{1}{\Delta x}\right) \cdot (\theta_1-\theta_2) \qquad (2\text{-}43)$$

この式は，もう一方の側の境界$i=n_t-1$でも同様である．これで境界条件も定式化されたように見えるが，実はこのままでは不合理があることを，後の＜集中定数化の各方法の比較＞において述べる．

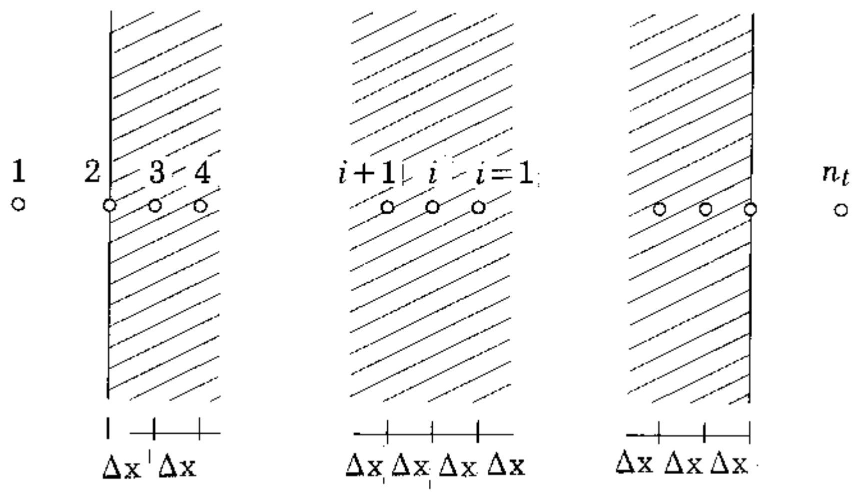


図2-10　差分法

2.4.3　有限要素法による空間的離散化

有限要素法にも2通りの方法があって1つは支配方程式に対応する汎関数を最小化することによるもので，もう1つはガレルキン法あるいは重みつき残差法と呼ばれるものである.[74)75)] どちらも最終的には同じ結果を与えるが，後者は汎関数を見出しにくい場合などに対しても適用できるものでありこの意味で有用性が高いと思われる．従ってここでは残差法によって空間的離散化を行う．

図2-11のように計算対象領域をいくつかの要素で分割する．この分割の程度に対しては有限要素法自体は何等の情報も提供しない．最終的に得られるところの，いわゆる全体の有限要素式を(2-9)の状態方程式に整合させるため，規定境界条件となる2つの空気温度の節点番号を後ろづめにする．すなわち2.1での$no=2$の場合であり，1からn番までの節点は壁体内あるいは表面上にとる．

ここで，いわゆる形状関数と呼ばれるものを導入する．これは計算対象領域内の，あるi番節点では1の値を持ち，これに隣接する節点では0になるような関数であり，これを$w_i(x)$で表す．

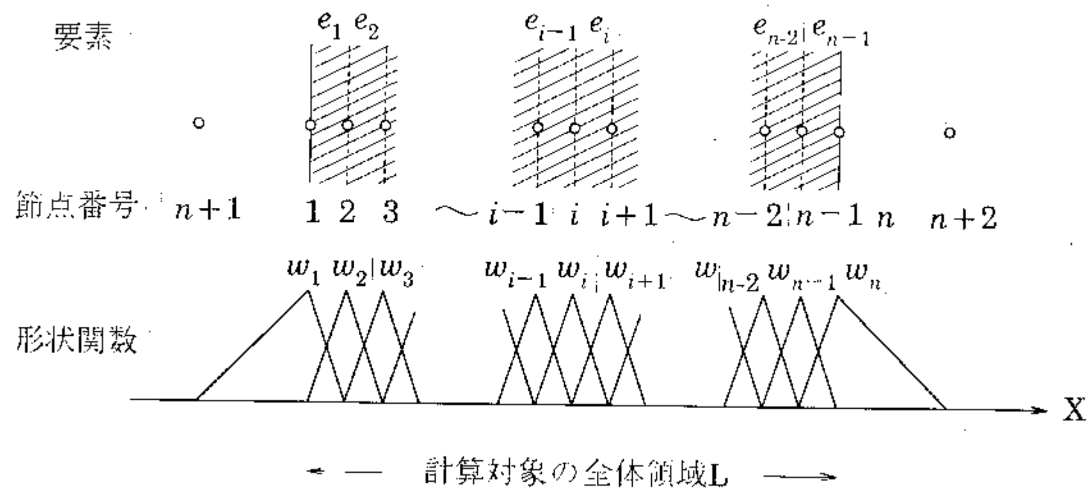


図2-11　有限要素法

求めようとするのは，$i=1,2,\cdots,n$の節点についての温度の時間関数$\theta_i(t)$である．これはあくまでも離散系での近似解であるから$\hat{\theta}_i(t)$と書くことにする．形状関数を使えば，全領域での近似解は次式で表される．

$$\hat{\theta}(x,t)=(w_1,w_2,\cdots\cdots,w_n)\cdot\begin{bmatrix}\hat{\theta}_{1(t)}\\ \hat{\theta}_{2(t)}\\ \vdots\\ \vdots\\ \hat{\theta}_{n(t)}\end{bmatrix}=\mathbf{W}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{2-44}$$

ただし$\mathbf{W}$は行マトリクスを表す．(2-31)式の左辺を右辺に移項し，これに(2-44)式の近似解θを代入すれば，

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} - c_p \cdot \gamma \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} = \mathbf{R}_{es}(x) \tag{2-45}$$

のように残差を持つ．この残差に何等かの重み関数を乗じ，領域全体で積分したものを0に置くのが，重みつき残差法である．近似関数がn個の未知関数で構成されていれば，重み関数はn通り用意しておいて，その積分を行い，n本の方程式が得られることになる．重み関数は直交性さえ備えていれば任意の関数でよい．ここでいうガレルキン法とは，この重み関数に形状関数そのものをとった場合である．従って$\hat{\theta}_i(t)$, $i=1, 2, \cdots, n$のn個の未知関数を定めるn本の方程式は，$w_i(x)$, $i=1, 2, \cdots, n$それぞれから次式で得られる．

$$\int_L \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} - c_p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} \right) \cdot dx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-46}$$

Lは領域全体を表す．この積分は全領域で一括して行うのではなく，要素ごとに行って加え合せる．なぜなら$w_i(x)$は折れ線的な関数であり，要素ごとに定義されるからである．従って(2-46)式は次のようになる．記号Σ*はマトリクス上で加え合せることを意味する．

$$\int_L {}^t\mathbf{W} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} - c_p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} \right) dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}{}^{*} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1} \end{pmatrix} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\partial^2 \hat{\theta}_{ej}}{\partial x^2} - c_p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_{ej}}{\partial t} \right) dx = \mathbf{0} \tag{2-47}$$

ここにx_jなどはj番節点のx座標を表す．また$\hat{\theta}_{ej}$はj番要素内の温度であって，これは$\hat{\theta}_j$, $\hat{\theta}_{j+1}$およびw_j, w_{j+1}で表される．さらに(2-47)式の右辺を部分積分すれば次のように変形される．

$$\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1} \end{pmatrix} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\partial^2 \hat{\theta}_{ej}}{\partial x^2} - c_p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_{ej}}{\partial t} \right) dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}{}^{*} \left[\begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1} \end{pmatrix} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_{ej}}{\partial x} \right]_{x_j}^{x_{j+1}} - \sum_{j=1}^{n-1}{}^{*} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_{ej}}{\partial x} \cdot dx$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1}{}^{*} \int_{x_j}^{x_{j+1}} c_p \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial \hat{\theta}_{ej}}{\partial t} \cdot dx$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}w_n\cdot\lambda\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_{en}}{\partial x}\bigg|_{x=x_n}-\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}w_1\cdot\lambda\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_{e1}}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\lambda\cdot\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1}\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_{ej}}{\partial x}\cdot dx$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}\int_{x_j}^{x_{j+1}}c_p\cdot\gamma\cdot\begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1}\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_{ej}}{\partial t}\cdot dx=0 \qquad (2\text{-}48)$$

この第二式の第1項について，要素間の継目のところでは，両要素から符号反対で打ち消しあい，結局残るのは$x=x_1$とx_nの境界面のところだけとなる．Σ*がついているのは単なる和ではなく，マトリクス上で加え合わすから，残った2つは(2-46)式のn本めと1本めに加えるということになる．そしてこれらはすなわち境界条件式の(2-32)式の右辺に相当するものであるから，対流伝達率αと外部空気の温度，さらにθ_1，あるいはθ_nによって書換えられる．

(2-48)式の最後の式における積分を具体的に行う．まずj番要素内での温度は，

$$\hat{\theta}_{ej}=w_j\cdot\hat{\theta}_j+w_{j+1}\cdot\hat{\theta}_{j+1} \qquad (2\text{-}49)$$

であらわされる．次に形状関数そのものをxの関数として表す．これをxについての1次関数と仮定すれば未定係数が2つ出てくる．この関数にx_jやx_{j+1}を代入すれば，それぞれθ_j, θ_{j+1}になるから，これで2つの未定係数についての連立方程式ができる．この解はθ_j, θ_{j+1}を含んでいるが，これ以外のx_j, x_{j+1}, xによる部分から次のように形状関数が計算される．

$$\begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{(x_{j+1}-x_j)}\begin{pmatrix} x_{j+1}-x \\ -x_j+x\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}50)$$

これらの(2-49), (2-50)式を(2-48)に代入する．(2-48)の最後の式で第3項は次のように計算される．

$$-\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\lambda\cdot\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1}\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_{ej}}{\partial x}dx$$

$$=-\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\lambda\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial w_j}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_j}{\partial x} & \frac{\partial w_j}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_j}{\partial x} & \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_{j+1}}{\partial x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \hat{\theta}_j \\ \hat{\theta}_{j+1}\end{pmatrix}dx$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}\frac{\lambda}{(x_{j+1}-x_j)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\theta}_j \\ \hat{\theta}_{j+1}\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}51)$$

第4項は次のように計算される.

$$-\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}\int_{x_j}^{x_{j+1}} c_p\cdot\gamma\cdot\begin{pmatrix} w_j \\ w_{j+1}\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_{ej}}{\partial t}dx$$

$$=-\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}\int_{x_j}^{x_{j+1}} c_p\cdot\gamma\cdot\begin{pmatrix} w_j\cdot w_j & w_j\cdot w_{j+1} \\ w_{j+1}\cdot w_j & w_{j+1}\cdot w_{j+1}\end{pmatrix}\cdot dx\cdot\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\hat{\theta}_j \\ \hat{\theta}_{j+1}\end{pmatrix}$$

$$=-\sum_{j=1}^{n-1}{}^{*}c_p\cdot\gamma\cdot(x_{j+1}-x_j)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\cdot\begin{pmatrix}\hat{\theta}_j \\ \hat{\theta}_{j+1}\end{pmatrix} \tag{2-52}$$

そこで(2-48)式の加え合せの計算をすれば,次のようなマトリクス形式になることがわかる.(2-48)式の最後の式の第1, 2項からはベクトル$\mathbf{f}$が,第三項からはマトリクス$\mathbf{C}$が,第4項からはマトリクス$\mathbf{M}$が形成される.

$$\mathbf{f}+\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\theta}-\mathbf{M}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\theta}=0 \tag{2-53}$$

移項すれば次式が得られる.

$$\mathbf{M}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\theta}=\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\theta}+\mathbf{f} \tag{2-54}$$

特に$\mathbf{f}$は次のようになる.

$$\mathbf{f}={}^{t}(\alpha\cdot\theta_{n+1},0,0,\cdots\cdots,0,\alpha\cdot\theta_{n+2}) \tag{2-55}$$

次に他の集中定数化法と比較するために(2-54)式のi行の方程式だけを作る.この方程式は(2-5)式の一般化節点方程式に相当する.i行に寄与してくるのは要素e_{i-1}(x_{i-1}からx_i)と要素e_i(x_iからx_{i+1})からのものだけである.この加え合せをマトリクス上で次のように行う.

$$c_p\cdot\gamma\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\hat{\theta}_{i-1} \\ \hat{\theta}_i \\ \hat{\theta}_{i+1}\end{bmatrix}$$

$$+c_p\cdot\gamma\cdot(x_{i+1}-x_i)\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\hat{\theta}_{i-1} \\ \hat{\theta}_i \\ \hat{\theta}_{i+1}\end{bmatrix}$$

$$
=\frac{\lambda}{(x_i-x_{i-1})}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{\theta}_{i-1}\\ \hat{\theta}_i\\ \hat{\theta}_{i+1}\end{bmatrix}
$$

$$
+\frac{\lambda}{(x_{i+1}-x_i)}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{\theta}_{i-1}\\ \hat{\theta}_i\\ \hat{\theta}_{i+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{2-56}
$$

ただしiは，1あるいはnではない内部のものとする．従ってこの式からi行だけをとりだすと次のようになる．

$$
c_p\cdot\gamma\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_{i-1}}{\partial t}+c_p\cdot\gamma\cdot\left\{(x_i-x_{i-1})+(x_{i+1}-x_i)\right\}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_i}{\partial t}
$$

$$
+c_p\cdot\gamma\cdot(x_{i+1}-x_i)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_{i+1}}{\partial t}
$$

$$
=\frac{\lambda}{(x_i-x_{i-1})}\cdot(\hat{\theta}_{i-1}-\hat{\theta}_i)+\frac{\lambda}{(x_{i+1}-x_i)}\cdot(\hat{\theta}_{i+1}-\hat{\theta}_i) \tag{2-57}
$$

このように1次元程度であれば，i行方程式だけ取りだしてもさほど繁雑ではないので，他の集中定数化の方法と比較できる．

2.4.4　集中定数化の各方法の比較

まず検査体積法と空間差分法は本質的に同じであることがいえる．そのために差分で得られた離散化方程式(2-41)の両辺に$\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$を乗じる．

$$
c_p\cdot\gamma\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=\lambda\cdot\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta x}\cdot(\theta_{i+1}-\theta_i)+\lambda\cdot\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta x}\cdot(\theta_{i-1}-\theta_i) \tag{2-58}
$$

この式は(2-40)式と同一である．ところが境界条件の扱い方については，作為的な技巧を施さないと大きな誤差を生む．

(2-43)式の両辺に$\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$を乗じる．

$$
c_p\cdot\gamma\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial t}=\lambda\cdot\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta x}\cdot(\theta_3-\theta_2)+\alpha\cdot\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta x}\cdot(\theta_1-\theta_2) \tag{2-59}
$$

この式の観察から，境界面上の節点2，n_i-1も内部の節点と同じ熱容量を持つことになるのがわかる．従って計算対象領域の本来の熱容量は両端に$\Delta x/2$ずつ延びた形で増えてしまう．この不

合理を解消するためには，(2-59)式の左辺に1/2を乗じなければならない．つまりこの場合は結局は検査体積法的な考え方で補うことになる．

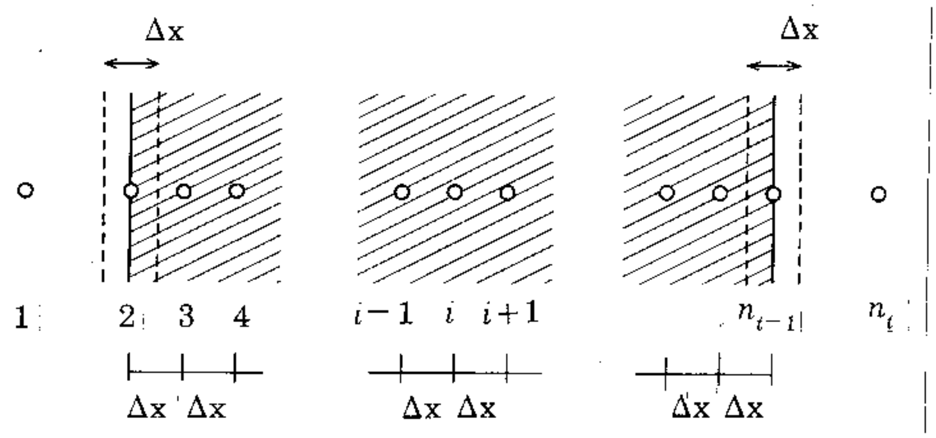


図2-12　差分法の境界条件での注意点

次に有限要素法とこれらの方法を比較してみる．そのために一般にi節点に関与する方程式として得られた(2-57)式の物理的意味を考える．

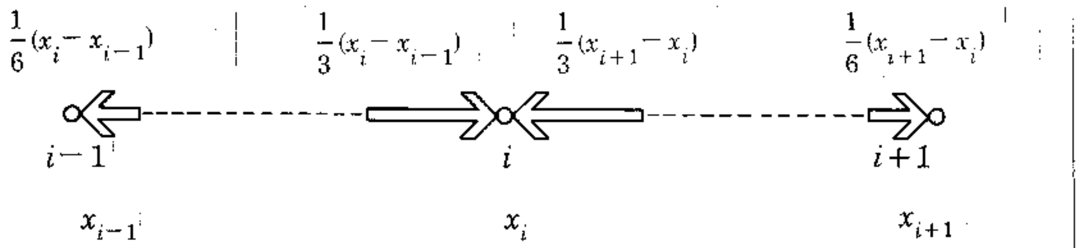


図2-13　有限要素法の節点への熱容量分散

この方程式の右辺はi節点に対して$i-1$と$i+1$節点から定常過程で流れ込んでくる熱流であり，この式の形は検査体積法と同じである．従って定常解に関しては同じであることがわかる．ただしこうして流れ込んできた熱流が各節点の時間変動に関して影響するプロセスが異なることが左辺の各項からわかる．すなわちその熱流の2/3がi節点の温度上昇に影響し，残りの1/6ずつが$i-1$節点と$i+1$節点へ分散する．よって有限要素法による非定常の温度分布はよりなめらかであろうことも予想できる．しかし，i節点への熱流の影響領域の大きさは

$$(i\text{節点への熱流の影響領域}) = \frac{1}{6}\cdot(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{3}\cdot(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{3}\cdot(x_{i+1} - x_i)$$

$$+\frac{1}{6}\cdot(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2}\cdot(x_{i+1} - x_{i-1}) \qquad (2\text{-}60)$$

であるから検査体積法の場合と同じである．従って全節点の持つ状態値の平均的な値は非定常の場合も両者ほぼ同じであろうこともいえる．

2.5　各種の集中定数化法の統一

検査体積法，差分法，有限要素法等の各種の集中定数化の方法の統一を行う．この目的の1つは，各々の集中定数化法によるモデルの間に互換性を持たせることにある．すなわち，ある部分は有限要素法でモデル化し，別の部分は検査体積法でモデル化しても，お互いを接続して全体のモデルを作れるようにすれば，実用上は便利である．なぜならその部分に適した集中定数化の方法があるからである．さらにもう1つの目的は標準化の利益である．モデル化で同一形式の全体方程式にできれば，この後のシミュレーションの計算には共通のサブプログラムが使えることになる．

このためには異なる集中定数化法の間に共通言語のようなものと，背景になる統一的な概念が必要である．この共通言語に相当するものが，2.1で述べた熱容量のm_{ij}，拡張熱コンダクタンスのc_{ij}と入力係数r_{ij}のシステムパラメータである．そして統一的な概念が回路網による定式化法である．各種の集中定数化の方法は単にこれらのシステムパラメータを作るためのものと見なし，モデルの全体方程式はその定式化法によって組み上げるのである．有限要素法によれば最後に全体方程式が得られる．しかしこの方法の場合であってもそのマトリクスではなく1個々の要素にもどしておく．これらの要素がいわゆるシステムパラメータとなる．システムパラメータの段階であれば，容易に他の集中定数化法によるシステムパラメータと互換や接続を行うことが可能となる．こうした接続などを行った後に，回路網の定式化法によって全体方程式にする．

いずれの集中定数化法によっても最終的には(2-9)式の状態方程式にする．またこれを構成するために(2-5)式の一般的な節点方程式を用いる．この方針の中で互換性を実現するために若干の約束ごとが必要になってくる．検査体積法については2.3で述べた通りである．差分法と有限要素法には次のような約束を定める．

R1: 最初の偏微分方程式で表される支配方程式の単位は，単位体積当りの熱流にする．つまり$Kcal/hr/m^3$あるいはw/m^3とする．これは，温度の時間微分$\partial\theta/\partial t$に比熱と比重量$c_p$，$\gamma$が乗じられた形の方程式をとることを意味する．

R2: 節点番号の付け方について，未知数の温度のものは前詰めにし，既知数の温度のものは後詰めにする．それぞれの個数をnとnoとすれば，前者の番号が1からn，後者の番号が$n+1$から$n+no$とする．

R3: 空間的に隣接していない節点間，あるいは実質的に熱的に接続していない節点間であっても0の拡張熱コンダクタンスc_{ij}が存在するものとみなす．

さらに細かい約束が有限要素法に課せられるが，これは(2-9)式の状態方程式における$\mathbf{C}_0$, $\mathbf{R}$の駆動マトリクスを数式的に記述するためだけに必要なものであり，後述する．

次に差分法と有限要素法について，より詳しく論じた後に，検査体積法と有限要素法を接続する例をあげる．

まず差分法について考える．約束R1に従った熱伝導の偏微分方程式を差分化し，両辺に$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$を乗じる．節点$i$の近傍で差分化するとし，x方向で隣接する節点を負側から正側へj_1, j_2，同様にy方向ではj_3, j_4，z方向ではj_5, j_6とする．

$$c_p\cdot\gamma\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=\lambda\cdot\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta x}\cdot(\theta_{j1}-\theta_i)+\lambda\cdot\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta x}\cdot(\theta_{j2}-\theta_i)$$

$$+\lambda\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta z}{\Delta y}\cdot(\theta_{j3}-\theta_i)+\lambda\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta z}{\Delta y}\cdot(\theta_{j4}-\theta_i)$$

$$+\lambda\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\Delta z}\cdot(\theta_{j5}-\theta_i)+\lambda\cdot\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\Delta z}\cdot(\theta_{j6}-\theta_i) \qquad (2\text{-}61)$$

また伝達境界においては，例えばx方向であれば

$$c_p\cdot\gamma\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=\lambda\cdot\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta x}\cdot(\theta_j-\theta_i)+\alpha\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot(\theta_j-\theta_i) \qquad (2\text{-}62)$$

となる．従ってまず熱容量は対角要素だけであり

$$m_{i,i}=c_p\cdot\gamma\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z \qquad (2\text{-}63)$$

である．熱コンダクタンスはx, y, z方向それぞれについて，伝導と伝達は次のように表される．

	伝導	伝達	
	$\lambda\cdot\Delta y\cdot\Delta z/\Delta x$	$\alpha\cdot\Delta y\cdot\Delta z$	（x 方向）
$c_{ij}=$	$\lambda\cdot\Delta x\cdot\Delta z/\Delta y$	$\alpha\cdot\Delta x\cdot\Delta z$	（y 方向）
	$\lambda\cdot\Delta x\cdot\Delta y/\Delta z$	$\alpha\cdot\Delta x\cdot\Delta y$	（z 方向）　(2-64)

次に入力係数r_{ij}は日射受熱や内部発熱について定めることができる．しかしこれは熱発生量g_jの定義や単位によって異なったものとなる．g_jが単位面積当りの発熱量であれば，$r_{ij}=\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$であるし，$g_j$がある面への単位面積当り日射量であって，吸収率が$a$であれば，$rij=a\cdot\Delta x\cdot\Delta y$のようになる．

いずれにせよ差分法は検査体積法と非常に似かよった関係にある．従って座標系に束縛されるためにシステムパラメータが得にくい場合には，検査体積法で補うことになる．

より興味深いのは有限要素法と検査体積法に互換性をもたせることである．いわゆる全体の有限要素式と呼ばれる(2-54)式は，本熱回路網で定めている状態方程式の(2-9)式に相当するものである．また有限要素法での全体方程式から，任意のi行を抜き出せば，一般的に本熱回路網で定めている(2-5)の節点方程式で表される．しかし有限要素法に関する教科書的な説明では，いわゆる境界条件の状態方程式的な定式化において不十分である．すなわち次式の**f**でまとめて表示されているのが普通である．従って1つの問題はこの式の右辺のマトリクス$\mathbf{C}_0$, **R**を有限要素法からどのように定式化するかである．

$$\mathbf{f}=\mathbf{C}_o\cdot\mathbf{x}_o+\mathbf{R}\cdot\mathbf{g} \qquad (2\text{-}65)$$

そのためにR1からR3の約束のほかに，さらに細かい約束を設ける．これは伝達率あるいは日射吸収率の添字番号についての規約である．伝達率は対流伝達率と，輻射伝達率の二種を意味する．i番要素のある面が，外部の規定温度節点のj番に接しているときの伝達率をα_{ij}とし，もしこの要素が伝達境界を持たないときには0であると約束する．同様に，i番要素のある面が，日射成分g_jによる吸熱をするとき，これに対する吸収率をa_{ij}とし，もしこの要素が吸熱面を持たないときには0であると約束する．

1つの要素は何個かの節点で構成される．3次元立体要素であれば，最低4面体の4個の節点が必要であるが，モデルの作りやすさから6面体の要素が用いられることが多く，このときは少なくとも8個の節点が必要になる．形状関数はこれらの節点にそれぞれ対応して定められる．この個数を仮にn_f個とする．

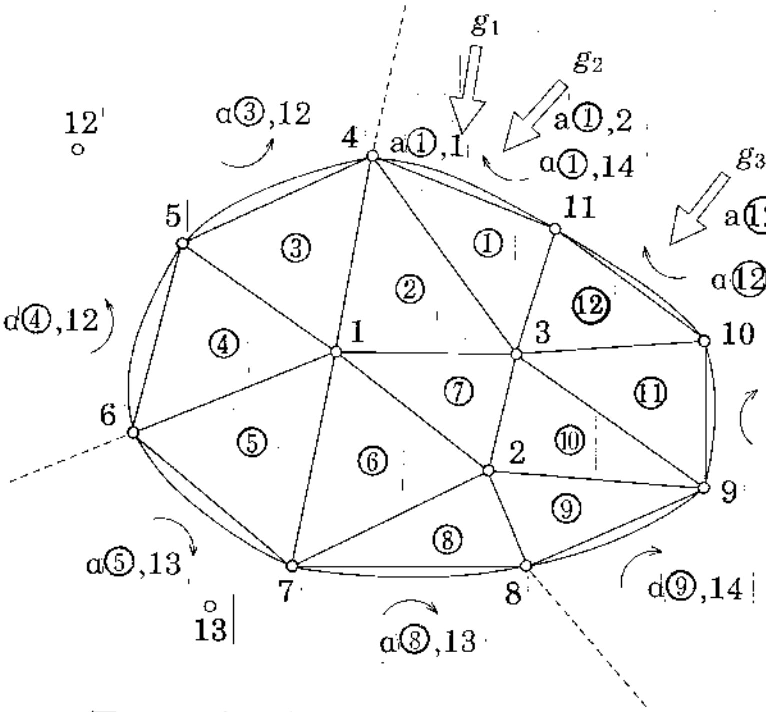


図2-14　標準化のための有限要素法での約束

1つの要素iから次の形状関数を含む行マトリクス$\mathbf{W}_i$を記述できる．

$$\mathbf{W}_i=(w_1,w_2,\cdots\cdots,w_{nf}) \tag{2-66}$$

また要素iの各節点での温度は次のベクトルで表す．

$$\boldsymbol{\theta}_i={}^t(\hat{\theta}_{e1},\hat{\theta}_{e2},\cdots\cdots,\hat{\theta}_{enf}) \tag{2-67}$$

従って要素i内での任意の位置での温度θ_iは次式で計算される．

$$\hat{\theta}_i=\mathbf{W}_i\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}_i \tag{2-68}$$

ここでは境界条件による入力をひとまとめのベクトル$\mathbf{f}$ではなく，マトリクス$\mathbf{C}_0$, $\mathbf{R}$を用いて表すことが重要なので，次にこれらの入力についての記号も定義しておく．

まず伝達境界について，節点番号の約束R2によって，$n+1$から$n+no$番の節点温度のベクトルを次のように定める．

$$\boldsymbol{\theta}_o={}^t(\theta_{n+1},\theta_{n+2},\cdots\cdots,\theta_{n+no}) \tag{2-69}$$

まず伝達境界条件式について次のように記述できる．

$$\lambda\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_i}{\partial n}=\sum_{j=n+1}^{n+no}\alpha_{ij}\cdot(\theta_j-\hat{\theta}_i)=\sum_{j=n+1}^{n+no}\alpha_{ij}\cdot(\theta_j-\mathbf{W}_i\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)$$

$$=(\alpha_{i,n+1},\alpha_{i,n+2},\cdots\cdots,\alpha_{i,n+no})\cdot\boldsymbol{\theta}_o-\sum_{j=n+1}^{n+no}\alpha_{ij}\cdot\mathbf{W}_i\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}_i \tag{2-70}$$

日射成分等の要素から成るベクトルを$\mathbf{g}$とする．サイズはn_gである．次にi番要素の日射の吸熱量q_iについては次のように記述できる．

$$q_i=(a_{i,1},a_{i,2},\cdots\cdots,a_{i,ng})\cdot\mathbf{g} \tag{2-71}$$

そこで，全体の有限要素式を得るために，重みつき残差積分を次式のように定め，部分積分により変形する．変形の最後の過程で(2-70)と(2-71)式を用いる．ただし要素の総数はn_eとする．

$$\sum_{i=1}^{ne}*\int_{vei}{}^t\mathbf{W}_i\cdot\left\{\lambda\cdot\left(\frac{\partial^2\hat{\theta}_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\theta}_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\hat{\theta}_i}{\partial z^2}\right)+q_i-c_p\cdot\gamma\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_i}{\partial t}\right\}dv$$

$$=-\sum_{i=1}^{ne}*\int_{vei}\lambda\cdot\left(\frac{\partial{}^t\mathbf{W}_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial x}+\frac{\partial{}^t\mathbf{W}_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial y}+\frac{\partial{}^t\mathbf{W}_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial z}\right)\cdot dv$$

$$+\sum_{i=1}^{ne}*\int_{sei}\lambda\cdot{}^t\mathbf{W}_i\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_i}{\partial n}\cdot ds+\sum_{i=1}^{ne}*\int_{vei}{}^t\mathbf{W}_i\cdot q_i\cdot dv-\sum_{i=1}^{ne}*\int_{vei}c_p\cdot\gamma\cdot{}^t\mathbf{W}_i\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_i}{\partial t}\cdot dv$$

$$=-\sum_{i=1}^{ne}*\int_{vei}\lambda\cdot\left(\frac{\partial{}^t\mathbf{W}_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial x}+\frac{\partial{}^t\mathbf{W}_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial y}+\frac{\partial{}^t\mathbf{W}_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial z}\right)\cdot dv\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$$

$$+\sum_{i=1}^{ne}*\int_{sei}(\alpha_{i,n+1},\cdots\cdots,\alpha_{i,n+no})\cdot{}^t\mathbf{W}_i ds\cdot\boldsymbol{\theta}_o-\sum_{i=1}^{ne}*\sum_{j=n+1}^{n+no}\int_{sei}\alpha_{i,j}\cdot{}^t\mathbf{W}_i\cdot\mathbf{W}_i ds\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$$

$$+\sum_{i=1}^{ng}*\int_{sei}(a_{i,1},\cdots\cdots,a_{i,ng})\cdot{}^t\mathbf{W}_i ds\cdot\mathbf{g}$$

$$-\sum_{i=1}^{ne}*\int_{vei}c_p\cdot\gamma\cdot{}^t\mathbf{W}_i\cdot\mathbf{W}_i dv\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}i}{\partial t}=\mathbf{o} \tag{2-72}$$

ここに，日射の自由入力項の積分が結局は要素外表面での受熱面だけになることに注意する．ただし，要素内での内部発熱があれば，その積分は体積積分のままである．この(2-72)式により，(2-9)の状態方程式の中のマトリクスは**M**, **C**, $\mathbf{C}_0$, **R**についてそれぞれ次式で計算される．

$$\mathbf{M}=\sum_{i=1}^{ne}*\int_{vei} c_p\cdot\gamma\cdot{}^t\mathbf{W}_i\cdot\mathbf{W}_i dv \tag{2-73}$$

$$\mathbf{C}=-\sum_{i=1}^{ne}*\int_{vei}\lambda\cdot\left(\frac{\partial^t\mathbf{W}_i}{\partial \mathrm{x}}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial^t\mathbf{W}_i}{\partial \mathrm{y}}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial^t\mathbf{W}_i}{\partial \mathrm{z}}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial \mathrm{z}}\right)dv$$

$$-\sum_{i=1}^{ne}*\sum_{j=n+1}^{n+no}\int_{sei}\alpha_{i,j}\cdot{}^t\mathbf{W}_i\cdot\mathbf{W}_i ds \tag{2-74}$$

$$\mathbf{C}_o=\left[\sum_{i=1}^{ne}*\int_{sei}\alpha_{i,n+1}\cdot{}^t\mathbf{W}_i ds,\cdots\cdots,\sum_{i=1}^{ne}*\int_{sei}\alpha_{i,n+no}\cdot{}^t\mathbf{W}_i ds\right] \tag{2-75}$$

$$\mathbf{R}=\left[\sum_{i=1}^{ne}*\int_{sei}a_{i,1}\cdot{}^t\mathbf{W}_i ds,\cdots\cdots,\sum_{i=1}^{ne}*\int_{sei}a_{i,ng}\cdot{}^t\mathbf{W}_i ds\right] \tag{2-76}$$

(2-75)式のマトリクスは$(n\times no)$のサイズの長方マトリクスである．また(2-76)式のマトリクスは$(n\times n_g)$のサイズである．

有限要素法からのシステムパラメータはこれらのマトリクスの要素として見なされる．

すなわち

$$\mathbf{M}\text{の } i\text{行 } j\text{列要素} \quad \rightarrow \quad m_{i,j}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}_o \\ {}^t\mathbf{C}_o & \mathbf{O} \end{bmatrix} \text{の } i\text{行 } j\text{列要素}(i\neq j)\rightarrow \quad c_{i,j}$$

$$\mathbf{R}\text{の } i\text{行 } j\text{列要素} \quad \rightarrow \quad r_{i,j}$$

である．ただしコンダクタンスマトリクス**C**については$i=j$のとき，つまり対角要素については，これをシステムパラメータとは定義しない．対角要素は，**C**と$\mathbf{C}_0$を合せた全体的なマトリクスの各行の総和を符号変更したものに等しい．

この有限要素法によるコンダクタンスマトリクスの対角要素の性質は次のようにして証明される．これは一種の背理法である．そのために全体の有限要素式を次のように書き直す．

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}=[\mathbf{C},\mathbf{C}_o]\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}_o\end{pmatrix}+\mathbf{R}\cdot\mathbf{g} \tag{2-77}$$

ここで$\mathbf{x}_o$は規定温度ベクトル，$\mathbf{g}$は発熱量のベクトルであることは前述したとおりである．ここで物理現象としてのある状態を考える．それは，全ての節点の温度が1で等く，かつ発熱量も全て0の状態である．この場合は系の中のどこにも熱量は生じないので温度の時間変化も0である．つまり$\mathbf{x}=\mathbf{0}$である．これらのことは(2-77)式の数学モデルが必ず次式の性質を持つことを意味する．

$$[\mathbf{C},\mathbf{C}_o]\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\:\\:\\1\end{bmatrix}=\mathbf{O} \tag{2-78}$$

この式は，すなわち，各行の総和が0になることを示している．言い換えれば，コンダクタンスマトリクス$\mathbf{C}$の対角要素は，マトリクス$[\mathbf{C},\mathbf{C}_0]$において，その行の対角要素を除いた全要素を加え合せて符号を変えたものになっていることを示している．数式的に示せば，質量保存則として記述した(2-1)式に相当する．この右辺がその対角要素であり，左辺はその行の要素c_{ij}の総和である．このことにより全体の有限要素式でも，各行の方程式を抜き出せば，熱回路網の一般的な節点方程式(2-5)式になることが示された．

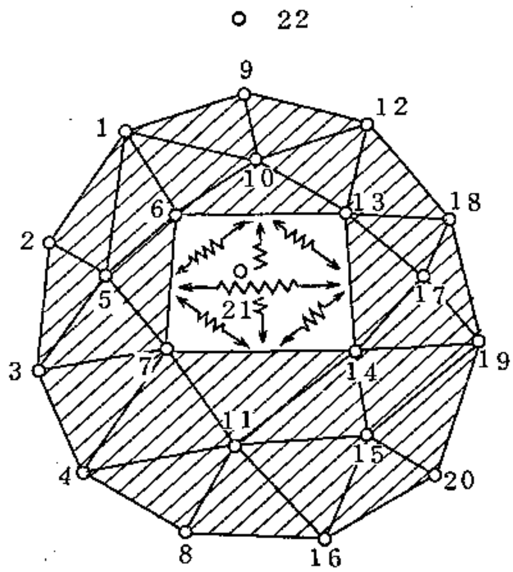
以上の考察により検査体積法も，差分法も，有限要素法もm_{ij}, c_{ij}, r_{ij}という共通言語を介して互換性を持つようになることがわかった．互換性を細別すると，交換，追加，接続になると考えられる．交換とは別の集中定数化法によるシステムパラメータによって置き換える場合である．c_{ij}あるいはr_{ij}は単に同じ添字を持つものどうしの交換が可能である．ただし有限要素法で作ったm_{ij}を検査体積法によるものと置き換える場合には注意を要する．例えばi番節点については，マトリクス$\mathbf{M}$のi行の総和がi行i列の対角要素になって集まるようにし，その他のi行とi列の要素は0にする．追加とは，空間をはさんで2つの節点間に輻射がある場合に輻射による拡張熱コンダクタンスを加え合せるような場合である．接続とは，異なった集中定数化の方法によって作られた部分領域をつなぎ合せるような場合である．この場合は，当然ながら節点数nの増加が起こる．

次に追加と接続を行う簡単な具体例をあげる．図2-15は伝導体内に空洞がある場合を示す．

空洞内の表面間では輻射伝熱も考慮するものとする．もちろん空洞内の空気温度も未知数とする．空洞内では空気の動きによって熱が運ばれているから，この現象を比較的正確にモデル化するためには，流れの運動方程式についても有限要素法で離散化しなければならない．しかし多くの工学的目的においては，このような複雑な扱いを必要とせず，空洞内の空気温度は自然対流の拡はんによって一様と近似して十分である．例えば建築の室温の扱いがそうである．そこでこの空洞部分は一つの検査体積としてモデル化する．また，内表面間の輻射伝達は，中間の空気を通過して行われるため，熱伝導の偏微分方程式では記述できないから，これも検査体積法の考え方でモデル化する．

有限要素法でモデル化できるのは節点21の空洞空気温度が規定温度であって，内表面間輻射のように未知数の節点間に輻射がない場合である．従ってまず有限要素法により，$n=20$, $no=2$のサイズにおいてシステムパラメータm_{ij}, c_{ij}を得る．空洞内空気温度の節点21と内表面の対流熱伝達によるc_{ij}はマトリクス$\mathbf{C}_0$の要素になっている．次に検査体積法によって空洞空気の

熱容量$m_{21,21}$と，内表面間における輻射の拡張熱コンダクタンスをつくる．面対面の輻射伝熱を形態係数によって定式化することは，その1つの面内で温度が一様であるという前提を本来は必要とする．この前提は厳密には成り立たない．最も近似性の良好なのは節点が中心に位置する折面状の一定要素をとることである．折面でありさえすれば，その1つずつの面の持つ形態係数にその面積を乗じ，全折面で和をとれば，求めようとする形態係数に全折面積を乗じたものが得られる．さらに輻射率と輻射面間の平均絶対温度が定められれば線型近似化された，$c_{6,7}$, $c_{6,13}$, $c_{6,14}$, $c_{7,13}$, $c_{7,14}$, $c_{13,14}$が計算される．これらは全て対称性を持つ．こうして有限要素法と検査体積法のそれぞれから必要なシステムパラメータは出そろった．



21：空洞空気節点
22：外部空気節点

図2-15　検査体積法と有限要素法の接続

次にシステムパラメータの段階での追加を行う．$m_{21,21}$, $c_{7,13}$, $c_{6,14}$は有限要素法では存在しなかったパラメータである．従ってこれらに関する追加は，0にこれらの数値を加えることと見なす．$c_{6,7}$, $c_{6,13}$, $c_{7,14}$, $c_{13,14}$は有限要素法でも計算されていたパラメータである．従って検査体積法によるこれらの輻射の拡張熱コンダクタンスの分をそれぞれ加え合せる．

最後に有限要素法と検査体積法の接続を行う．接続後の全体のシステムパラメータがそろっていれば，この全体的な(2-9)の状態方程式は，(2-5)の完全システムにおける一般化節点方程式によって自動的に構成される．ただしこのためには，接続後の全体でのn, no, n_gの数に変更することと，全ての節点番号を全体での通し番号に変更することが必要である．図2-15の例においては，$n=21$, $no=1$に変更するだけでよい．一般的にはそれぞれの集中定数化の方法の内部で1から順に節点番号の振り付けが行われるから，この場合に全体での通し節点番号への変更が必要になるわけである．

以上の例により，各種の集中定数化の方法によるモデルの接続や互換を一般論としてまとめておくことが出来る．そのために，もう1つの概念を定めておく必要がある．これは部分節点番号(local)と全体節点番号(global)の考え方である．一般に，個々の集中定数化は部分節点番号にお

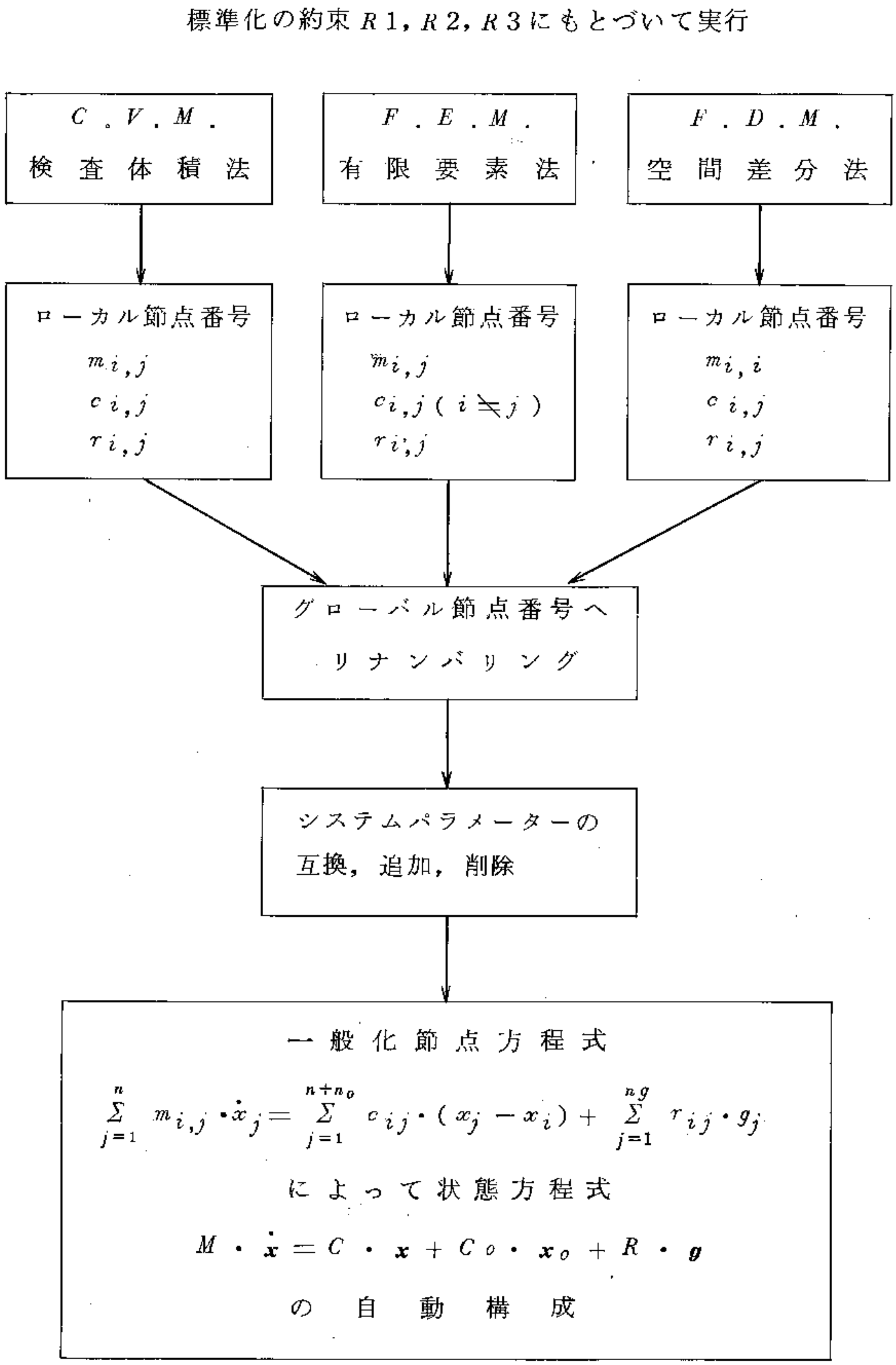


図2-16　各種の集中定数化法の統一

いて行われるものと見なす．そしてまた一般に，全体モデルはこれらの部分モデルの接続により成ると考える．従って全体モデル自体も，通しの節点番号を持つと考えられる．異なった方法からのシステムパラメータどうしの互換や追加を行うために，部分節点番号から全体節点番号へ，それぞれのパラメータの添字番号を改番(renumbering)する必要がある．この後であれば，同じ種類の同じ添字番号を持つものの間で，加え合せや交換を機械的に行うことができる．そして最後に(2-5)の一般化節点方程式によって全体の状態方程式モデルが自動的に構成される．以上のことを図2-16に示す．

2.6　まとめ

本章では建築物に関する伝熱解析に熱回路網モデルが有用であることを述べるとともに，この数学モデルの作り方について述べた．熱回路網の言葉自体は古いものであるが，本章ではその背景にシステム理論的な新しい意味と概念を持たせて定義した．

最終的な数学モデルはベクトル·マトリクス形式の状態方程式になるようにした．すなわち現代的数学による扱いが可能となるようにした．この方程式を，アルゴリズム上，自動的に組み上げるために回路網の概念による完全システムの節点方程式を立てた．そしてまた，さまざまな伝熱形態に対し，統一的な拡張熱コンダクタンスを定義することによって，電算機利用に適したモデル化を可能とした．この方程式は簡潔に，容量m_{ij}, 拡張コンダクタンスc_{ij}と自由入力係数r_{ij}の3種のシステムパラメータだけによって構成される．

本章で述べた検査体積法は，座標系に束縛される有限要素法や空間的差分法に比べ，自由にかつ総合的な集中定数系の近似モデルを得ることが出来る．そして建築物に関わる伝熱系の特徴や問題点を具体的に示すために，またシステムパラメータを得る方法を具体的に示すために，いくつかの典型的な伝熱系をとり上げた．この中で伝導，伝達，輻射，物質移動のそれぞれに対してどのように拡張熱コンダクタンスを定めるかを述べた．またその他のパラメータの計算の方法も述べた．

一般に集中定数化法には，有限要素法，空間的差分法そして検査体積法などがある．これら各々の方法によるモデルの共通点や，相異点を明らかにするために，簡単な1次元伝熱系を例にとり，その節点方程式を導き，比較をした．本章における熱回路網の一般化節点方程式はいずれの方法においても共通して成立するのでこの比較が可能となる．その結果，空間的差分法は検査体積法と本質的に同じであるが，境界条件の扱い方について作為的な手直しを施さないと誤差を生じる場合があることがわかる．つまり$\Delta x/2$の分の熱容量が大きすぎたり，小さすぎたりする可能性がある．有限要素法によるモデルが，他の2つの方法によるものと比べて大きく異なるのは，熱容量の節点への集中の仕方である．すなわち，ある節点へ，隣接する節点から流れ込んできた熱量は，その節点だけでなく隣接する節点の温度上昇にも寄与する．これに対し他の2つの方法においては，その節点だけに寄与する．

最後に，これら各種の集中定数化法の統一について論じた．この目的の1つは，いずれの方法によるモデルであっても，一般的な状態方程式による明確なシステムとして把握できるようにするためであり，2つめは，各々の方法によるモデルの間に互換性と接続性を持たせ，お互いの欠点を補ったモデル化を可能とするためである．そして3つめは，シミュレーション計算のため

の共通サブプログラムの利用を可能とすることにより標準化の利便をはかるためである．このためにはまず共通言語のようなものが必要であるが，これにシステムパラメータm_{ij}, c_{ij}, r_{ij}が用いられる．各々の方法は単にこれらのパラメータを計算するものとしてとらえられる．そして必要ならば，この共通言語上で追加，交換，接続等を行ったのち，熱回路網の一般化節点方程式によって自動的に状態方程式を組み上げることが出来る．

第3章　状態方程式によるシミュレーション理論

3.1　状態方程式の特性

第2章において述べた熱回路網の状態方程式モデルは，時間に関する常微分方程式のモデルである．従って，このモデルによって数値的にシミュレーションするためには時間積分することが必要である．本論文では解析的な時間積分法を示すが，このためにもまず扱う状態方程式の特性を解明しておく必要がある．ただし，ここで言うところの特性とは時間的な推移特性をさす．この特性は熱力学的な法則から短絡的に説明されるべきものではない．なぜなら扱うのは実際の物理的現象ではなく，これを何らかの近似の仮定を設けて数学モデル化したものだからである．また同様にして各種の時間積分法について，その推移特性を考察する必要がある．ある種の近似時間積分法は，ある条件を外れた場合に，計算を進めるに従って解の発散を起こす．これは，時間積分の近似をするまえのもとの数学モデルが本来安定なものであっても，その近似によって全く別の推移特性を持つシステムに変ってしまったからである．すなわち，特に近似的な時間積分法については推移特性の考察によって安定条件を調べておく必要がある．

まず，この状態方程式モデルそのものの特性を調べる．モデルの系が何ら入力を受けていない状態での推移において本質的な特性が表われる．(2-9)式からこの状況は次式で記述される．

$$\mathbf{M}\cdot\mathring{\mathbf{x}}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} \tag{3-1}$$

$\mathbf{x}$はn次のベクトルである．従って，いかなる温度状態もn本の線型独立なベクトル$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots\cdots,$ $\mathbf{p}_n$の線型結合によって表される．初期の状態からt時間だけ経過したときの温度状態もこれらの線型結合によって表され，各ベクトルに乗じられる係数はそれぞれ$exp(\alpha_1\cdot t),\ \cdots\cdots,\ exp(\alpha_n\cdot t)$となる．この理由は(3-1)式の常微分方程式を解く過程により説明されるが，次節の後半に述べる．従ってt時間後の温度状態$\mathbf{x}(t)$は

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i\cdot t}\cdot\mathbf{p}_i \tag{3-2}$$

となる．この式を(3-1)式へ代入すれば，次式が得られる．

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot e^{\alpha_i\cdot t}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{p}_i=\sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i\cdot t}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}_i \tag{3-3}$$

互いの$\mathbf{p}_i$の線型独立性と(3-3)式から次式が$i=1,2,\ldots\ldots,n$について成り立つ．

$$\alpha_i\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{p}_i=\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}_i \tag{3-4}$$

ただし両辺を$exp(\alpha_i\cdot t)$で除した．(3-4)式は線型代数における固有値α_iの定義式である．(3-2)式の形から推移特性は固有値α_iの性質にかかっている．一般にα_iを複素数とみなしても，もしこの実部が負であれば，$t\rightarrow+\infty$のとき，$\mathbf{x}(t)\rightarrow 0$となる．従ってモデルの特性は(3-4)式で表される固有値の性質を調べることに帰着される．そこでまず固有値を一般に複素数の形で表示しておく．

$$\alpha_i=\mu_i+i\cdot\nu_i \tag{3-5}$$

ここにiは虚数単位である．対応する固有ベクトルを$\mathbf{p}+i\cdot\mathbf{q}$と表す．これらの固有値と固有ベクトルを(3-4)式に代入すれば次式となる．

$$(\mu_i+i\cdot v_i)\cdot\mathbf{M}\cdot(\mathbf{p}+i\cdot\mathbf{q})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{p}+i\cdot\mathbf{q}) \tag{3-6}$$

これを実部と虚部に分けることによってそれぞれ次の2式が得られる．

$$\mathbf{M}\cdot(\mu_i\cdot\mathbf{p}-v_i\cdot\mathbf{q})=\mathbf{C}\cdot\mathbf{p} \tag{3-7}$$

$$\mathbf{M}\cdot(\mu_i\cdot\mathbf{q}+v_i\cdot\mathbf{p})=\mathbf{C}\cdot\mathbf{q} \tag{3-8}$$

実部μ_iについての評価式をつくるために(3-7), (3-8)式のそれぞれ左方から$^t\mathbf{p}$, $^t\mathbf{q}$を乗じて辺々加える．$\mathbf{M}$は対称であることに注意して次の(3-9)式を得る．

$$\mu_i\cdot({}^t\mathbf{p}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{p}+{}^t\mathbf{q}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{q})={}^t\mathbf{p}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}+{}^t\mathbf{q}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{q} \tag{3-9}$$

次に虚部v_iについての評価式をつくるために(3-7)式の両辺に左方から$^t\mathbf{q}$を乗じ，両辺の転置をとり，さらに(3-8)式の両辺には左から$^t\mathbf{p}$を乗じて辺々ひけば次式が成り立つ．

$$v_i\cdot({}^t\mathbf{q}\cdot{}^t\mathbf{M}\cdot\mathbf{q}+{}^t\mathbf{p}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{p})={}^t\mathbf{p}\cdot({}^t\mathbf{C}-\mathbf{C})\cdot\mathbf{q} \tag{3-10}$$

ここで伝導と物質移動が混じっていても質量保存則によって(2-1)式が必ず成立する．これを用い，付録1の証明過程を経て，次の2つの不等式が成立する．

$${}^t\mathbf{p}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{p}>0 \tag{3-11}$$

$${}^t\mathbf{p}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}<0 \tag{3-12}$$

これらの不等式は$\mathbf{p}$を$\mathbf{q}$に置換えても同様に成り立つ．ゆえに(3-9)式を参照し，固有値の実部μ_iの負が証明された．さらに物質移動を含まない全て$c_{ij}=c_{ji}$の対称性を持つ系では$^t\mathbf{C}=\mathbf{C}$により，(3-10)を参照し，固有値の虚部v_iが0になる．すなわち本論文での拡散系のモデルは必ず実数部が負の固有値を持ち，虚数部については物質移動の拡散を含まない場合だけ0が保証される．

次に物質移動による拡散系においては，一般的に$c_{ij}\neq c_{ji}$である．この場合にも質量保存則は成立しているから(3-12)式が成り立つことは明らかである．また(3-11)式も成り立つ．しかし$^t\mathrm{C}=\mathrm{C}$式は成立しないから，固有値の虚数部は必ずしも0とはいえない．

オイラーの公式により固有値のα_iが一般に複素数$\mu_i+i\cdot v_i$であっても次のようにかける．

$$e^{\alpha_i\cdot t}=e^{\mu_i\cdot t}\cdot(\cos v_i t+i\cdot\sin v_i t) \tag{3-13}$$

このことから，物質移動による拡散系のモデルにおいて，固有値の虚数部が存在するときは，何らかの振動を起こすであろうことが推測できる．しかし実部の負により，この振動が発散に到ることはない．このような挙動の最も簡単な具体例は，環状の循環流がある場合であろう．この流れにそって，初期に著しい温度分布があれば，ある1点から見たときに，1回の循環に要する時間

の周期でその温度分布を繰り返し経験することになる．しかし時間の経過とともに，その温度分布は一様になっていく．この一様化の効果は実部の負によって起こされる．

固有値の実部の負値性は，あくまでも数学モデルについて論じられたものである．すなわち，分布定数系についてのものではなく，集中定数系についてのものである．付録1のCの負の証明過程を観察すると，この負値性がゆらぐのは負の拡張コンダクタンスが出現し，この影響がかなり大きくなった場合である．本論文における検査体積法の集中定数化法においては，物質移動による拡散に関して上流法を採っている．マクロモデルにおいてはこれが最も妥当だからである．しかし偏微分方程式を支配方程式とした場合にはこれが唯一ではない．その移流項を離散化する方法によっては負の拡張コンダクタンスが出現する．離散化法を差分法にとった場合これがよく説明される．移流を含む1次元伝熱の方程式は，

$$c_p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - c_p \cdot \gamma \cdot u_v \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{3-14}$$

である．ここにu_vはx軸正方向への流速を表す．右辺第1項の伝導の部分は無視し，第2項の移流項だけについて考える．この項を中央差分化すれば，

$$-c_p \cdot \gamma \cdot u_v \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_j \simeq -c_p \cdot \gamma \cdot u_{vj} \cdot \frac{\theta_{j+1} - \theta_{j-1}}{2\Delta x} = -c_p \cdot \gamma \cdot u_{vj} \cdot \frac{\theta_{j+1} - \theta_j + \theta_j - \theta_{j-1}}{2\Delta x}$$

$$= -\frac{c_p \cdot \gamma \cdot u_{vj}}{2\Delta x}(\theta_{j+1} - \theta_j) + \frac{c_p \cdot \gamma \cdot u_{vj}}{2\Delta x}(\theta_{j-1} - \theta_j) \tag{3-15}$$

となる．従って，

$$c_{j,j+1} = -\frac{c_p \cdot \gamma \cdot u_{vj}}{2\Delta x} \tag{3-16}$$

$$c_{j,j-1} = \frac{c_p \cdot \gamma \cdot u_{vj}}{2\Delta x} \tag{3-17}$$

と拡張コンダクタンスが計算される．ここにj節点を中心に$j-1$は上流側，$j+1$は下流側の隣接節点である．従って下流側と負の拡張コンダクタンスを持つことになる．つまり計算モデルのシステムは発散を起こす場合もあり得ることになる．もしn個の全ての固有値の実部が正であれば，明らかな発散系であるが，ごく一部の固有値だけが正であれば，空間的な部分において振動を起こし，大局的には安定であろうという推測ができる．おそらく乱流のメカニズムとは集中定数系からは，このように説明されるものかもしれない．流れの運動方程式も，ある座標軸方向の流速について，集中定数化すれば，拡散系の状態方程式と同様な形になるからである．

以上の議論によって本論文で扱う数学モデルの特性が解明された．特に固有値の実部が負になることの証明に際しては，付録1の証明過程をみればわかるように，回路網の定数化法が非常に有用であった．これはモデルの数学的な構造がそれによって明快になるからである．

もし連立方程式としての状態方程式に，解析的な時間積分法ではなく，近似的な時間積分法をとる場合には，必ずしも以上の特性は保存されていないから，推移安定性について再び考察する必要がある．これは各種の近似時間積分法のところで論じる．

3.2　射影分解による解析的時間積分法

ここでは，(2-9)式の連立常微分方程式の解析解を求める．現在，他のいかなる工学分野においてもこの解析解を用いて現象の数値的なシミュレーションを行っている例は見られないようである．例え，構造力学的な振動のシミュレーションであっても，その基本とする運動方程式は，変位等についての1次および2次の連立微分方程式であるが，状態ベクトルを適当に定めることにより，結局は(2-9)と同様な形式の状態方程式になる．従って以下に論ずる解析解が利用できるはずである．しかし，用いられている解法は，ルンゲ·クッタ法をはじめとして数多くの種類の近似解法のようである．近似解法であって多少は誤差があっても，計算プログラムが単純で，また計算機の容量等の性能上の制約をうけない方が実用上は有利かもしれないが，それではあくまでも数値実験にすぎないことになる．系の挙動を数式的に把握するためには解析解を得ることが必要である．解析解によって系の動特性は数式的に把握される．

まず(2-9)の状態方程式の入力の項を1つのベクトル**f**にまとめておく．すなわち

$$\mathbf{f}=\mathbf{C}_o\cdot\mathbf{x}_o+\mathbf{R}\cdot\mathbf{g} \tag{3-18}$$

と定める．**f**を入力ベクトルと呼ぶことにする．従って(2-9)式は次式となる．

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{f} \tag{3-19}$$

(3-19)式の左方から$\mathbf{M}^{-1}$を乗じ**x**にかかるマトリクスは単位マトリクスにする．

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{f} \tag{3-20}$$

これを次式で表示する．

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}+\mathbf{f}^* \tag{3-21}$$

この連立常微分方程式の形式解は畳みこみ積分で表される．導き方は多くの本[77]に説明されている．例えば付録2のような導き方もある．この形式解は次式で表される．

$$\mathbf{x}(t)=exp\left((t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*\right)\cdot\mathbf{x}(t_o)+\int_{t_o}^{t}exp\left((t-\tau)\cdot\mathbf{C}^*\right)\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau \tag{3-22}$$

ここで

$$\Phi(t-t_o)=exp\left((t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*\right) \tag{3-23}$$

とおき，これを推移マトリクスと呼ぶ．従って(3-22)式は次のようにも記述できる．

$$\mathbf{x}(t)=\Phi(t-t_o)\cdot\mathbf{x}(t_o)+\int_{t_o}^{t}\Phi(t-\tau)\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau \tag{3-24}$$

この解式はいうなれば形式的なものである．重要な問題はこれをいかにして実際的な計算が可能な形にするかである．すなわち，推移行列を指数関数の展開式によって計算することは実際的ではない．この無限級数和が絶対収束することは言えても実用的計算の範囲にはない．ところが$\mathbf{C}^*$を相似変換し対角行列にすることができれば，この対角行列に対しては容易に指数変換がとれる．このことを利用し，最終的には，射影分解[78]による時間積分公式を導く．

3.1で状態方程式の固有値について考察した．固有値の定義式は(3-4)式であった．この両辺に左方から$\mathbf{M}^{-1}$を乗じれば，同値な式を$\mathbf{C}^*$の表示において得られる．

$$\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{p}_i=\alpha_i\cdot\mathbf{p}_i \tag{3-25}$$

この式はn個の固有値について全て成り立つ．これらをまとめて記述すれば次式となる．

$$\mathbf{C}^*\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots\cdots,\mathbf{p}_n)=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots\cdots,\mathbf{p}_n)\cdot(\delta_{ij}\cdot\alpha_i) \tag{3-26}$$

ただし$\delta_{i,j}$はクロネッカーのデルタであり，従って$(\delta_{i,j}\cdot\alpha_i)$は，

$$(\delta_{ij}\cdot\alpha_i)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & O \\ & O & \ddots & \\ & & & \alpha_n\end{bmatrix} \tag{3-27}$$

なる対角マトリクスを表す．また次のようにマトリクス$\mathbf{P}$を定める．

$$\mathbf{P}=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots\cdots,\mathbf{p}_n) \tag{3-28}$$

すなわち$\mathbf{P}$は固有ベクトル$\mathbf{p}_i$を列ベクトルとして構成されるn次の正方行列である．重複固有値がなければ，$\mathbf{P}$には線型従属な列ベクトルはない．従って$\mathbf{P}$は正則である．この場合は$\mathbf{P}$の逆行列が存在し，(3-26)式の左方から$\mathbf{P}^{-1}$を乗じれば$\mathbf{C}^*$の相似変換により対角マトリクスとする式が得られる．

$$\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{P}=(\delta_{ij}\cdot\alpha_i) \tag{3-29}$$

このようにして$\mathbf{C}^*$が対角化されれば$exp(\mathbf{C}^*)$も$exp((t-t_0)\cdot\mathbf{C}^*)$も具体的に計算することが可能となってくる．まず(3-29)式から次式も成立する．

$$\mathbf{P}^{-1}\cdot(t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{P}=\left(\delta_{ij}\cdot\alpha_i\cdot(t-t_o)\right) \tag{3-30}$$

そこで$exp((t-t_0)\cdot\mathbf{C}^*)$にも同じ相似変換を施した場合を計算する．マトリクスの指数関数の展開式を利用してこれを行えば次のようになる．

$$\mathbf{P}^{-1}\cdot exp\left((t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*\right)\cdot\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}\cdot\left(\mathbf{E}+\frac{(t-t_o)}{1!}\cdot\mathbf{C}^*+\frac{(t-t_o)^2}{2!}\cdot\mathbf{C}^{*2}+\frac{(t-t_o)^3}{3!}\cdot\mathbf{C}^{*3}+\cdots\right)\cdot\mathbf{P}$$

$$=\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}+\frac{(t-t_o)}{1!}\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{P}+\frac{(t-t_o)^2}{2!}\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^{*2}\cdot\mathbf{P}+\frac{(t-t_o)^3}{3!}\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^{*3}\cdot\mathbf{P}+\cdots$$

$$=\mathbf{E}+\frac{(t-t_o)}{1!}\cdot(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{P})+\frac{(t-t_o)^2}{2!}\cdot(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{P})$$

$$+\frac{(t-t_o)^3}{3!}\cdot(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{P})+\cdots$$

$$=\mathbf{E}+\frac{(t-t_o)}{1!}\cdot(\delta_{ij}\cdot\alpha_i)+\frac{(t-t_o)^2}{2!}\cdot(\delta_{ij}\cdot\alpha_i)^2+\frac{(t-t_o)^3}{3!}\cdot(\delta_{ij}\cdot\alpha_i)^3+\cdots$$

$$=\mathbf{E}+\frac{1}{1!}\cdot\left(\delta_{ij}\cdot\alpha_i\cdot(t-t_o)\right)+\frac{1}{2!}\left(\delta_{ij}\cdot(\alpha_i\cdot(t-t_o))^2\right)+\frac{1}{3!}\left(\delta_{ij}\cdot(\alpha_i\cdot(t-t_o))^3\right)+\cdots \tag{3-31}$$

ここにEは単位マトリクスを表わす．一方，単変数の指数関数については

$$e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}=1+\frac{1}{1!}\cdot\left(\alpha_i\cdot(t-t_o)\right)+\frac{1}{2!}\cdot\left(\alpha_i\cdot(t-t_o)\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\alpha_i\cdot(t-t_o)\right)^3+\cdots \tag{3-32}$$

であるから(3-31)式は結局次のようになる．

$$\mathbf{P}^{-1}\cdot exp\left((t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*\right)\cdot\mathbf{P}=\left(\delta_{ij}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}\right) \tag{3-33}$$

これは次式と同じである．

$$exp\left((t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*\right)=\mathbf{P}\cdot\left(\delta_{ij}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}\right)\cdot\mathbf{P}^{-1} \tag{3-34}$$

同様にして単にマトリクス$\mathbf{C}^*$の指数関数であれば次式で表される．

$$exp(\mathbf{C}^*)=\mathbf{P}\cdot(\delta_{ij}\cdot e^{\alpha_i})\cdot\mathbf{P}^{-1} \tag{3-35}$$

これらの指数関数は(3-34)のような形で扱おうとする限り，ある特定のtの値を代入し，この場合の数値的なマトリクスが得られるだけである．解析的な解式にするためには，$exp(\alpha_i\cdot(t-t_o))$の関数が表に陽な形で表われているようにする必要がある．そこで次の変形を行う．

$$exp\left((t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*\right)=(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots\cdots,\mathbf{p}_n)\cdot\left(\delta_{ij}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}\right)\cdot\mathbf{P}^{-1}$$

$$=\left(e^{\alpha_1\cdot(t-t_o)}\cdot\mathbf{p}_1, e^{\alpha_2\cdot(t-t_o)}\cdot\mathbf{p}_2,\cdots\cdots, e^{\alpha_n\cdot(t-t_o)}\cdot\mathbf{p}_n\right)\cdot\mathbf{P}^{-1}$$

$$=e^{\alpha_1\cdot(t-t_o)}\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{o},\cdots\cdots,\mathbf{o})\cdot\mathbf{P}^{-1}+e^{\alpha_2\cdot(t-t_o)}\cdot(\mathbf{o},\mathbf{p}_2,\mathbf{o},\cdots\cdots,\mathbf{o})\cdot\mathbf{P}^{-1}+$$

$$\cdots\cdots+e^{\alpha_n\cdot(t-t_o)}\cdot(\mathbf{o},\cdots\cdots,\mathbf{o},\mathbf{p}_n)\cdot\mathbf{P}^{-1} \tag{3-36}$$

ここでn次の正方マトリクス$\mathbf{P}_i$を定義する.

$$\mathbf{P}_i=(\mathbf{o},\cdots\cdots,\mathbf{o},\mathbf{p}_i,\mathbf{o},\cdots\cdots,\mathbf{o})\cdot\mathbf{P}^{-1}$$

$$=(\mathbf{o},\cdots\cdots,\mathbf{o},\mathbf{p}_i,\mathbf{o},\cdots\cdots,\mathbf{o})\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots\cdots,\mathbf{p}_n)^{-1} \tag{3-37}$$

この$\mathbf{P}_i$を用いれば(3-36)から

$$exp\left((t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)} \tag{3-38}$$

とマトリクスの指数関数が$exp(\alpha_i\cdot(t-t_0))$に関して陽な形に分解される. $\mathbf{P}_i$は射影子[78]と呼ばれるマトリクスである. 試みに射影子としての必要十分条件を備えているかどうか調べる. まず$\mathbf{P}_i$に$\mathbf{P}_i$自身を左方あるいは右方から乗じたものが$\mathbf{P}_i$になることは次のようにして示される.

$$(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots\cdots,\mathbf{p}_n)^{-1}\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots\cdots,\mathbf{p}_n)=\mathbf{E} \tag{3-39}$$

であるから

$$\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{p}_i=\mathbf{e}_i \tag{3-40}$$

となる. ここに$\mathbf{e}_i$はi行目が1でほかは0のn次ベクトルである. つまり単位ベクトルである. 従って,

$$\mathbf{P}_i^2=(\mathbf{o},\cdots,\mathbf{p}_i,\cdots,\mathbf{o})\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n)^{-1}\cdot(\mathbf{o},\cdots,\mathbf{p}_i,\cdots,\mathbf{o})\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n)^{-1}$$

$$=(\mathbf{o},\cdots,\mathbf{p}_i,\cdots,\mathbf{o})\cdot(\mathbf{o},\cdots,\mathbf{e}_i,\cdots,\mathbf{o})\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n)^{-1}$$

$$=(\mathbf{o},\cdots,\mathbf{p}_i,\cdots,\mathbf{o})\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n)^{-1}=\mathbf{P}_i \tag{3-41}$$

となる. また$i\neq j$とすれば

$$\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{p}_j=(\mathbf{o},\cdots,\mathbf{p}_i,\cdots,\mathbf{o})\cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n)^{-1}\cdot\mathbf{p}_j$$

$$=(\mathbf{o},\cdots,\mathbf{p}_i,\cdots,\mathbf{o})\cdot\mathbf{e}_j=\mathbf{o} \tag{3-42}$$

である．$i=j$のときは

$$\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{p}_i=\mathbf{p}_i \tag{3-43}$$

である．また(3-39)式からもわかるように明らかに次式も成り立つ．

$$\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\cdots\cdots+\mathbf{P}_n=\mathbf{E} \tag{3-44}$$

とにかくこのような性質を持つ射影子によってマトリクスの指数関数は，この固有値の指数関数に関して陽な形に分解された．

従って推移マトリクスの射影分解により(3-24)の形式的な解析解は，はじめて実際的な計算が可能な形になる．

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}\cdot\mathbf{x}(t_o)+\int_{t_o}^{t}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau \tag{3-45}$$

ここで右辺の第1項は自由項，第2項は強制項と呼ぶことにする．第1項は数学モデル自身の過渡的な応答特性に依存する分を表している．第2項は数学モデルに対する入力に依存する分を表している．そして状態はこれらの重畳によって形成される．第2項の積分変数は，eの指数部分と$\mathbf{f}^*$の部分ではちょうど逆方向に動く．このことからこの積分をたたみ込み積分とも呼ぶ．

今もし，入力が比較的に単純な関数形で表されれば，(3-45)式の積分は解析的に行える．扱うのが建物等の伝熱系の数学モデルであれば，外気温や日射量が入力となる．これらも適当な近似と仮定を設ければ，調和分析等によって単純な関数形にしておくことは可能であろう．しかし一般にはこうしたことが困難な不規則な変動をするものであり，そのための時間積分法を提示する．不規則な変動をする入力であっても，これを適当な時間間隔Δt刻みで折れ線状にしたり，階段状にしたりする近似をすれば実用上は十分である場合が多い．まず折れ線状に近似した場合の時間積分公式を導く．$\mathbf{f}^*$は次式で定義されていた．

$$\mathbf{f}^*(\tau)=\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{f}(\tau) \tag{3-46}$$

ここで，熱回路網の場合，その単位から$\mathbf{f}(\tau)$を熱流入力ベクトル，$\mathbf{f}^*(\tau)$を温度入力ベクトルと呼ぶことにする．

Δt区間の時間積分を行い，この解式を得ておけば，Δt毎に逐次に計算を進めていく漸化式となる．積分区間を$(k-1)\cdot\Delta t$から$k\cdot\Delta t$までとし，その積分変数をτとする．関数$\mathbf{f}^*(\tau)$はこの仮定により次のように表される．

$$\mathbf{f}^*(\tau)=\mathbf{f}^*\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big)+\left[\frac{\tau-(k-1)\cdot\Delta t}{\Delta t}\right]\cdot\Big(\mathbf{f}^*(k\cdot\Delta t)-\mathbf{f}^*((k-1)\cdot\Delta t)\Big) \tag{3-47}$$

これを(3-45)式の右辺第2項に代入し，積分を行う．

$$\int_{(k-1)\cdot\Delta t}^{k\cdot\Delta t}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(k\cdot\Delta t-\tau)}\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot\left[-\frac{1}{\Delta t}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t}+\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t}\right]\cdot\mathbf{f}^*\left((k-1)\cdot\Delta t\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot\left[\frac{1}{\Delta t}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t}-\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\right]\cdot\mathbf{f}^*(k\cdot\Delta t) \tag{3-48}$$

$\mathbf{f}^*((k-1)\cdot\Delta t)$と$\mathbf{f}^*(k\cdot\Delta t)$にかかる係数を次のようにおく．

$$a_{i0}=-\frac{1}{\Delta t}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t}+\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t} \tag{3-49}$$

$$a_{i1}=\frac{1}{\Delta t}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t}-\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) \tag{3-50}$$

また次のようにマトリクス$\mathbf{U}_0$, $\mathbf{U}_1$を定義する．

$$\mathbf{U}_0=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot a_{i0} \tag{3-51}$$

$$\mathbf{U}_1=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot a_{i1} \tag{3-52}$$

$\mathbf{U}_0$, $\mathbf{U}_1$はn次の正方マトリクスである．これらを時間積分の漸化式における駆動マトリクスと呼ぶことにする．さらにΔtの区間における推移行列は(3-38)式により次式で計算される．

$$\mathbf{\Phi}(\Delta t)=exp(\Delta t\cdot\mathbf{C}^*)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t} \tag{3-53}$$

以上により$(k-1)\cdot\Delta t$から$k\cdot\Delta t$への漸化式は次式で記述される．

$$\mathbf{x}(k\cdot\Delta t)=\mathbf{\Phi}(\Delta t)\cdot\mathbf{x}\left((k-1)\cdot\Delta t\right)+\mathbf{U}_0\cdot\mathbf{f}^*\left((k-1)\cdot\Delta t\right)+\mathbf{U}_1\cdot\mathbf{f}^*(k\cdot\Delta t) \tag{3-54}$$

マトリクス$\mathbf{\Phi}(\Delta t)$, $\mathbf{U}_0$, $\mathbf{U}_1$はΔtを定めれば，時間積分の計算に先立って，定数マトリクスとして計算しておくことが出来る．(3-54)式の漸化式によって，ある初期状態からはじめて逐次計算を進めていくことによりシミュレーションは行われる．

次に入力の階段関数的な近似をしたときの時間積分公式を導く．これもやはり$(k-1)\cdot\Delta t$から$k\cdot\Delta t$への漸化式とする．このような近似の場合，2つの選択がある．$(k-1)\cdot\Delta t$から$k\cdot\Delta t$の区間では入力が一定値をとるという仮定をするから，この一定値が$(k-1)\cdot\Delta t$時刻でのものにするか，あるいは$k\cdot\Delta t$時刻でのものにするかという選択である．もし後者の選択をすれば，再び(3-45)式の右辺第2項の積分を行い，次式が得られる．

$$\int_{(k-1)\cdot\Delta t}^{k\cdot\Delta t}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(k\cdot\Delta t-\tau)}\cdot\mathbf{f}^*(k\cdot\Delta t)d\tau$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\cdot(e^{\alpha_i\cdot\Delta t}-1)\cdot\mathbf{f}^*(k\cdot\Delta t) \tag{3-55}$$

そこで，次のようなマトリクス$\mathbf{U_s}$を定めておく．

$$\mathbf{U}_s=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\cdot(e^{\alpha_i\cdot\Delta t}-1) \tag{3-56}$$

すると，階段関数的入力に対する次式の漸化式が記述できる．

$$\mathbf{x}(k\cdot\Delta t)=\mathbf{\Phi}(\Delta t)\cdot\mathbf{x}\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big)+\mathbf{U}_s\cdot\mathbf{f}^*(k\cdot\Delta t) \tag{3-57}$$

前述したように，$(k-1)\cdot\Delta t$から$k\cdot\Delta t$区間での一定の入力値を$(k-1)\cdot\Delta t$時刻でのものをとれば同様にして

$$\mathbf{x}(k\cdot\Delta t)=\mathbf{\Phi}(\Delta t)\cdot\mathbf{x}\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big)+\mathbf{U}_s\cdot\mathbf{f}^*\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big) \tag{3-58}$$

の漸化式が定められる．

以上，2種類の時間積分の漸化式を導いた．それぞれの式は入力の性質に応じて使い分けられるべきである．例えば，電熱ヒーターによる熱流入力は階段関数状に変化する場合がある．このときは(3-57)式の漸化式が適当である．すなわち矩形パルスまたはこの連続によって表現される入力に対しては(3-57)あるいは(3-58)式の適用がふさわしい．また三角形パルスまたはこの連続によって大部分の入力曲線は近似されるが，このときは(3-54)式が適している．

これらの漸化式による計算の安定性は$\mathbf{C}^*$の固有値が負の実数あるいは負の実部を持つことが証明されたことにより，保証されるが，具体的には次のようにして説明される．まず任意の初期状態からt時間経過後の温度状態は(3-2)式で表されると仮定していた．その後の固有値の議論と推移行列およびこの射影分解についての議論から(3-2)式の線型独立なベクトルを正確に記述することができる．(3-2)式と(3-45)式から次式が得られる．

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}\cdot\mathbf{p}_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}\cdot\mathbf{x}(t_o) \tag{3-59}$$

従って$\mathbf{p}_i$は次式で記述される．

$$\mathbf{p}_i=\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{x}(t_o) \tag{3-60}$$

さて初期状態からΔtずつ計算を進めていく．

$$\mathbf{x}(t_o)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^0\cdot\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{\Phi}(0)\cdot\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x}(t_o)$$

$$\mathbf{x}(t_o+\Delta t)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t}\cdot\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{\Phi}(\Delta t)\cdot\mathbf{x}(t_o)$$

$$\mathbf{x}(t_o+2\cdot\Delta t)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{2\cdot\alpha_i\cdot\Delta t}\cdot\mathbf{x}(t_o)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot\Delta t}\right)\cdot\mathbf{x}(t_o)$$

$$=\mathbf{\Phi}^2(\Delta t)\cdot\mathbf{x}(t_o)$$

$$\mathbf{x}(t_o+3\cdot\Delta t)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i e^{3\cdot\alpha_i\cdot\Delta t}\cdot\mathbf{x}(t_o)$$

$$=\mathbf{\Phi}^3(\Delta t)\cdot\mathbf{x}(t_o)$$

:

:

$$\mathbf{x}(t_o+k\cdot\Delta t)=\mathbf{\Phi}^k(\Delta t)\cdot\mathbf{x}(t_o) \tag{3-61}$$

ここで射影子P_iの性質$\mathrm{P}_i\cdot\mathrm{P}_j=[0](i\neq j)$を用いている．(3-61)式と(3-53)式およびαの実部が負であることにより，$k\to+\infty$のとき$\mathbf{x}\to0$となることがわかる．すなわち，(3-54)式，(3-57)式と(3-58)式の漸化式で進められる計算は安定である．以上の時間積分の公式は元のシステムの時間推移特性を保存している解析解であるからこのことは当然でもある．

3.3 周期関数入力の解析解

規定節点の温度変化や自由入力量の変化が積分可能な関数形をしていれば，(3-45)式の射影分解による解析解を用いて，あらかじめ畳み込み積分を行っておくことができる．これらの入力はどのような関数であっても，フーリエ級数で表されるが，ここではこれらの入力が離散的な測定値として定められることを前提として，調和分析をして得られる周期関数に対して，畳み込み積分を行う．

$x_j(\tau)$, $g_j(\tau)$の入力が周期Tの周期関数であれば，角速度ωを$2\pi/\mathrm{T}$におき，

$$x_j(\tau)=\sum_{l=0}^{m}ax_{j,l}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot\tau)+\sum_{l=0}^{m}bx_{j,l}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot\tau) \tag{3-62}$$

$$g_j(\tau)=\sum_{l=0}^{m}ag_{j,l}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot\tau)+\sum_{l=0}^{m}bg_{j,l}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot\tau) \tag{3-63}$$

で近似される．ただし，簡潔のため，$l=0$からはじめ，定数項は総和記号の中に含めた定義式を定めた．

入力ベクトル$\mathbf{f}(\tau)$は

$$\mathbf{f}(\tau)=\mathbf{C}_o\cdot\mathbf{x}_o(\tau)+\mathbf{R}\cdot\mathbf{g}(\tau)$$

で表された．そこで$\mathbf{f}(\tau)$のi番要素$f_i(\tau)$を計算しておく．$f_i(\tau)$もやはり(3-62), (3-63)式のような形になるが，これを

$$f_i(\tau)\simeq\sum_{l=0}^{m}a_{i,l}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot\tau)+\sum_{l=0}^{m}b_{i,l}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot\tau) \qquad (3\text{-}64)$$

とおき，$a_{i,l}$, $b_{i,l}$を$ax_{j,l}$, $bx_{j,l}$, $ag_{j,l}$, $bg_{j,l}$で表す．

$$a_{i,l}=\sum_{j=n+1}^{n+n_o}c_{i,j}\cdot ax_{j,l}+\sum_{j=1}^{ng}r_{i,j}\cdot ag_{j,l} \qquad (3\text{-}65)$$

$$b_{i,l}=\sum_{j=n+1}^{n+n_o}c_{i,j}\cdot bx_{j,l}+\sum_{j=1}^{ng}r_{i,j}\cdot bg_{j,l} \qquad (3\text{-}66)$$

以上により，(3-45)式の畳み込み積分を具体的に行うことができる．まず次のような記号を定義する．

$$\mathbf{u}_i(t,t_o)=\int_{t_o}^{t}e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau \qquad (3\text{-}67)$$

すると(3-45)式の右辺第2項は次のように表される．

$$\int_{t_o}^{t}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{u}_i(t,t_o) \qquad (3\text{-}68)$$

$\mathbf{u}_i$の添字は固有値の添字に対応している．$\mathbf{u}_i$のj行要素を数式表示しておけば，(3-68)式右辺の計算をするアルゴリズムをつくることが可能になる．$\mathbf{u}_i$のj行要素$u_{j,i}(t,t_o)$は次式で示される．

$$u_{j,i}(t,t_o)=\int_{t_o}^{t}\left(\sum_{l=0}^{m}a_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot\tau)+\sum_{l=0}^{m}b_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot\tau)\right)d\tau \qquad (3\text{-}69)$$

この積分の内の第1番めの総和について，第l項は次のように積分される．

$$\int_{t_o}^{t}a_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot sin((l\cdot\omega\cdot\tau)d\tau$$

$$=\frac{a_{j,l}}{\alpha_i^{\,2}+l^2\cdot\omega^2}\cdot\left\{-\alpha_i\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t)-l\cdot\omega\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t)\right\}$$

$$-\frac{a_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}}{\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2}\cdot\left\{-\alpha_i\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t_o)-l\cdot\omega\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t_o)\right\} \tag{3-70}$$

同様に第2番目の総和について，その第l項は次のように積分される．

$$\int_{t_o}^{t} b_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot cos((l\cdot\omega\cdot\tau)d\tau$$

$$=\frac{b_{j,l}}{\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2}\cdot\left\{-\alpha_i\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t)+l\cdot\omega\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t\right.$$

$$-\frac{b_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}}{\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2}\cdot\left\{-\alpha_i\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t_o)+l\cdot\omega\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t_o)\right\} \tag{3-71}$$

そこで，改めて$u_{j,i}(t, t_o)$の次の具体的な計算式が記述できる．

$$u_{j,i}(t,t_o)=\sum_{l=0}^{m}\frac{(-a_{j,l}\cdot\alpha_i+b_{j,l}\cdot l\cdot\omega)}{(\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2)}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t)-\sum_{l=0}^{m}\frac{(a_{j,l}\cdot l\cdot\omega+b_{j,l}\cdot\alpha_i)}{(\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2)}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t)$$

$$+\sum_{l=0}^{m}\frac{(a_{j,l}\cdot\alpha_i-b_{j,l}\cdot l\cdot\omega)}{(\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2)}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t_o)$$

$$+\sum_{l=0}^{m}\frac{(a_{j,l}\cdot l\cdot\omega+b_{j,l}\cdot\alpha_i)}{(\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2)}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t_o) \tag{3-72}$$

この関数で構成される$\mathbf{u}_i$を用いて，(3-45)式は次のように記述される．

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_o)}\cdot\mathbf{x}(t_o)+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{u}_i(t,t_o) \tag{3-73}$$

もし，$t-t_0\rightarrow+\infty$となって初期状態から十分な時間が経過すれば，この式は，より簡単なものになる．まず(3-73)式の右辺第1項は0に近ずく．また(3-72)式の右辺第3，4項も0に近ずく．

以上の時間積分法は，かなり長い期間の途中経過よりも，最後の状態を知りたい場合や，入力関数が周期関数として比較的単純で項数のmが少なくてすむ場合に有効である．

3.4　各種の近似時間積分法

前節で述べた解析解のほかに，時間差分による近似解も考えられる．そしてこの近似解が用いられているのが，一般的な現状である．近似解であっても実用上の長所を持つ．最大の長所はアルゴリズムを単純にできることである．差分解であるから固有値解析の複雑な処理を必要としない．次に述べる前進差分ならば，マトリクスで扱う必要もないからアルゴリズムは最も単純であり，加えて電算機の記憶領域も少なくてすむ．しかしいずれの近似解も元のシステムの推移特性が保存されている保証はない．その近似によって実は全く異なる別のシステムになってしまっているからである．電算機による数値解析が盛んになりはじめたころは，この問題が正く認識されてはいなかった．差分化による単なる近似であるから厳密解の近傍の解を算出していくはずであり，発散や振動を起こすことはないであろうと考えられていた．そして，この問題の系統的な説明と安定条件の議論にはシステムという概念の導入と，そのシステムの数学的内部構造を明快に定式化できるモデリングの構造が必要である．従って，例えマトリクスによる方程式の扱いを必要としない前進時間差分であってもその計算安定条件を考察するためにはそれが必要となってくる．このマトリクスによる全体方程式とは当論文で述べている状態方程式であり，この内部構造を明快に表示する方法とは回路網の概念による定式化法である．

実用上，多用されているのは単段型の時間差分である．単段型とは，次の時刻の温度を計算するために現時刻の温度だけを使うことを意味する．多段型とは現時刻の温度だけではなく，過去のいくつかの時刻での温度も使う方法である．オーソドックスなルンゲ-クッタ法のいくつかは多段型である．当論文では単段型の前進差分と後退差分について論じる．これらはそれぞれ別名，陽解法と陰解法とも呼ばれる．陽解法と陰解法は広い意味を持ち，陰解法は何らかの連立方程式を解いてはじめて解が得られる方法を総称し，陽解法はそのような必要のない方法を総称しているようである．

まず前進差分について考える．(3-21)式を前進差分化すると次式となる．

$$\frac{\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k-1}}{\Delta t}=\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{f}^*{}_{k-1} \tag{3-74}$$

ここに添字のkは時刻番号を表すものとする．$\mathbf{C}^*$のマトリクスの要素を$c^*{}_{ij}$と表すことにする．$c^*{}_{ij}$についても質量保存則(2-1)式と同様な式が成り立つ．

$$\sum_{j=1}^{n+n_o} c^*_{i,j}=\sum_{j=1}^{n+n_o} c^*_{j,i} \tag{3-75}$$

このことは(2-9)式から明らかである．すなわち，

$$\mathbf{M}^{-1}\cdot[\mathbf{C},\mathbf{C}_o]\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\:\\:\\1\end{bmatrix}=[\mathbf{C}^*,\mathbf{C}_o^*]\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\:\\:\\1\end{bmatrix}=\mathbf{o} \tag{3-76}$$

だからである．(3-74)式を$\mathbf{x}_k$について解けば次式となる．

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{E} + \Delta t \cdot \mathbf{C}^*) \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \Delta t \cdot \mathbf{f}^*_{k-1} \tag{3-77}$$

差分の推移マトリクス$\mathbf{A}_e$を次のように定める．

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{E} + \Delta t \cdot \mathbf{C}^* \tag{3-78}$$

$\mathbf{A}_e$について任意の固有値をβ,これに対応する固有ベクトルを$\mathbf{p}$とし，$\mathbf{p}$の最大要素をp_mとする．

$$max(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_m, \cdots\cdots, p_n) = p_m \tag{3-79}$$

$\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{p} = \beta \cdot \mathbf{p}$の$m$行をとり出せば次式である．

$$\Delta t \cdot c^*_{m,1} \cdot p_1 + \Delta t \cdot c^*_{m,2} \cdot p_2 + \cdots\cdots + \left(1 - \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n+n_o} c^*_{j,m}\right) \cdot p_m$$

$$+ \Delta t \cdot c^*_{m,n} \cdot p_n = \beta \cdot p_m \tag{3-80}$$

p_mは正と仮定できる．なぜなら$\mathbf{p}$の全要素が負ならば$\mathbf{p}$の符号を変えてもやはりβに対する固有ベクトルであるし，正と負が混じっていれば最大要素は正になるからである．(3-80)式でp_jが全てp_mならば次の不等式が得られる．

$$\Delta t \cdot c^*_{m,1} \cdot p_m + \Delta t \cdot c^*_{m,2} \cdot p_m + \cdots\cdots + \left(1 - \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n+n_o} c^*_{j,m}\right) \cdot p_m$$

$$+ \Delta t \cdot c^*_{m,n} \cdot p_m > \beta \cdot p_m \tag{3-81}$$

従って，両辺を$p_m > 0$で割り，また(3-75)式を用いれば次の不等式が成立する．

$$1 - \Delta t \cdot \sum_{j=n+1}^{n+n_o} c^*_{j,m} > \beta \tag{3-82}$$

これは$\mathbf{A}_e$の最大の固有値は1より小さいことを示している．計算の安定性のためには，さらにβが-1より大きいことが必要である．つまりβは絶対値が1より小さいことが必要である．なぜならば初期値が次式のようにn本の線型独立な$\mathbf{A}_e$の固有ベクトルの線型結合で表されるから，次のΔt時には

$$\mathbf{x}(\Delta t) = a_1 \cdot \mathbf{A}_e \cdot \mathbf{p}_1 + a_2 \cdot \mathbf{A}_e \cdot \mathbf{p}_2 + \cdots\cdots + a_n \cdot \mathbf{A}_e \cdot \mathbf{p}_n$$

$$= a_1 \cdot \beta_1 \cdot \mathbf{p}_1 + a_2 \cdot \beta_2 \cdot \mathbf{p}_2 + \cdots\cdots + a_n \cdot \beta_n \cdot \mathbf{p}_n \tag{3-83}$$

になり，$k \cdot \Delta t$時には

$$\mathbf{x}(k \cdot \Delta t) = a_1 \cdot \beta_1^k \cdot \mathbf{p}_1 + a_2 \cdot \beta_2^k \cdot \mathbf{p}_2 + \cdots\cdots + a_n \cdot \beta_n^k \cdot \mathbf{p}_n \tag{3-84}$$

となるから，$k \to +\infty$のとき$\mathbf{x} \to 0$になるためには$-1<\beta<1$でなければならないからである．そこで必要な$-1<\beta<1$なる性質を$\mathbf{A}_e$に持たせるため，非負行列の性質を利用する．すなわち，$\mathbf{A}_e$を非負行列とすれば，これは非負の実固有値を持ち，そのうちの最大のものをフロベニウスの根と呼び，他の任意の固有値の絶対値はフロベニウスの根を越えないことがわかっている．[78] そこで(3-82)式により$\mathbf{A}_e$の最大固有値は1より小さいから，他の固有値の絶対値は1より小さくなる．以上により前進差分の計算安定条件とは$\mathbf{A}_e$が非負であることである．$\mathbf{A}_e$の対角要素が負になる可能性があるから，これが非負であることが安定条件である．

$$1-\Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n+n_o} c^*_{j,i} \geqq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3-85}$$

この条件式はc^*_{ij}とΔtについてのものであるがc^*_{ij}は$\mathbf{M}^{-1}$が作用して生成されたものであるからm_{ij}も間接的に関与する．有限要素法では$\mathbf{M}$のマトリクスには非対角要素もあり，$\mathbf{M}^{-1}$がm_{ij}によって単純な式では表せない．しかし差分法や検査体積法においては$\mathbf{M}$は対角マトリクスであり，$\mathbf{M}^{-1}$は単に対角要素の逆数が入っているものであるから，この場合について(3-85)式の安定条件は次のようになる．

$$1-\frac{\Delta t}{m_{i,i}} \sum_{j=1}^{n+n_o} c_{j,i} \geqq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3-86}$$

(3-86)式は，計算時間間隔が短いほど，かつ熱容量が大きいほど計算安定性が良くなることを示している．

次に後退差分について考察する．

$$\frac{\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k-1}}{\Delta t}=\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}_k+\mathbf{f}^*_k \tag{3-87}$$

$\mathbf{x}_k$について解けば次式となる．

$$\mathbf{x}_k=(\mathbf{E}-\Delta t \cdot \mathbf{C}^*)^{-1} \cdot \mathbf{x}_{k-1}+(\mathbf{E}-\Delta t \cdot \mathbf{C}^*)^{-1} \cdot \Delta t \cdot \mathbf{f}^*_k \tag{3-88}$$

従って，後退差分の推移マトリクス$\mathbf{A}_i$は次のようにおける．

$$\mathbf{A}_i=(\mathbf{E}-\Delta t \cdot \mathbf{C}^*)^{-1} \tag{3-89}$$

前と同様に，$\mathbf{A}_i$の固有値の性質を調べる．$\mathbf{A}_i$の任意の固有値をβとし，対応する固有ベクトルを$\mathbf{p}$とする．

$$\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{p}=\beta \cdot \mathbf{p} \tag{3-90}$$

$\mathbf{A}_i$は逆行列の計算結果であるから，もとのマトリクスとの対応がわかりにくい．しかし(3-90)式の左方から$\mathbf{A}_i^{-1}$を乗じ，両辺をβで割れば次式が得られる．

$$\mathbf{A}_i^{-1}\cdot\mathbf{p}=\frac{1}{\beta}\cdot\mathbf{p} \tag{3-91}$$

この式は，ある行列の逆行列の固有値は，もとの行列の固有値の逆数に等しいことを示している．そこで$\mathbf{A}_i^{-1}$の固有値について調べ，もとの$\mathbf{A}_i$についての性質を導く．$\mathbf{p}$の最大要素をp_mとし，(3-91)式の第m行をかけば次のようになる．

$$-\Delta t\cdot c_{m,1}^*\cdot p_1-\Delta t\cdot c_{m,2}^*\cdot p_2-\cdots\cdots+\left(1+\Delta t\cdot\sum_{j=1}^{n+n_o}c_{j,m}^*\right)\cdot p_m-$$

$$\cdots\cdots-\Delta t\cdot c_{m,n}^*\cdot p_n=\left(\frac{1}{\beta}\right)\cdot p_m \tag{3-92}$$

p_mは最大要素であるから，次の不等式が成立する．

$$-\Delta t\cdot c_{m,1}^*\cdot p_m-\Delta t\cdot c_{m,2}^*\cdot p_m-\cdots\cdots+\left(1+\Delta t\cdot\sum_{j=1}^{n+n_o}c_{j,m}^*\right)\cdot p_m-$$

$$-\Delta t\cdot c_{m,n}^*\cdot p_m<\left(\frac{1}{\beta}\right)\cdot p_m \tag{3-93}$$

p_mは正と見なしてかまわないから，(3-93)式の両辺をp_mで割って，(3-75)式を用いて整理すれば次の不等式が得られる．

$$1+\Delta t\cdot\sum_{j=n+1}^{n+n_o}c_{j,m}^*<\frac{1}{\beta} \tag{3-94}$$

この左辺第2項は正であるから，結局βは0から1の間にある．

$$0<\beta<1 \tag{3-95}$$

この$\mathbf{A}_i$の固有値の性質は無条件に成立するから，後退差分は無条件に計算安定であることが証明された．こうした無条件安定性は実用的観点から精度以上に重要であることが多い．安定条件が課せられることによって，モデル化への制約や，計算時間の間隔への制約が生じるからである．

前進差分や後退差分の推移マトリクスは，解析解の推移マトリクスの近似であると見ることもできる．マトリクスの指数関数から推移マトリクスのテーラー展開は次のようになる．

$$exp(\Delta t\cdot\mathbf{C}^*)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta t^k}{k!}\cdot\mathbf{C}^{*k}$$

$$=\mathbf{E}+\Delta t\cdot\mathbf{C}^*+\frac{\Delta t^2}{2!}\cdot\mathbf{C}^{*2}+\frac{\Delta t^3}{3!}\cdot\mathbf{C}^{*3}+\cdots\cdots \tag{3-96}$$

$\mathbf{A}_e$の(3-78)式と見比べれば，$\mathbf{A}_e$はこの展開式の第2項までである．$\mathbf{A}_i$についても

$$exp(\Delta t \cdot \mathbf{C}^*)^{-1} = exp(-\Delta t \cdot \mathbf{C}^*)$$

$$= \mathbf{E} - \Delta t \cdot \mathbf{C}^* + \frac{\Delta t^2}{2!} \cdot \mathbf{C}^{*2} - \frac{\Delta t^3}{3!} \cdot \mathbf{C}^{*3} + \cdots\cdots \qquad (3\text{-}97)$$

と見くらべれば，やはり第2項までの近似である．

前進差分は(3-77)式によって，後退差分は(3-88)式によって計算する．後者は逆行列の計算を必要とする．ただし回路網のモード変化のように熱的な構造が変化しないときは，この計算はあらかじめ1回だけ行なっておけばすむ．前者はマトリクス計算を必ずしも必要としない．従って計算機の容量上も有利であるが，そのかわり安定条件が課せられる．

3.5　状態方程式の濃縮法

扱おうとする状態方程式の次数が非常に大きくなってくれば，電算機の使用上の制限や経済性の問題が出てくる．もし，高次のものより低次のものに，良好な近似精度で近似できれば，これらの問題の解決に役立つ．この近似を濃縮と呼ぶことにする．今もしn個の節点のうち，規定節点に結びついていなかったり，比較的に熱容量の小さい節点については節点番号を後ろづめに付けることにし，これらの総個数をn_sとする．残りをn_m個とする．従って，$n = n_m + n_s$となる．温度の状態ベクトルをこれに応じて分け，それぞれ$\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_m$とすると次の近似式が成り立つ．

$$\begin{bmatrix} {}_{1,1}\mathbf{C} & {}_{1,2}\mathbf{C} \\ {}_{2,1}\mathbf{C} & {}_{2,2}\mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{v} \neq \mathbf{o}) \qquad (3\text{-}98)$$

ここに${}_{1,1}\mathrm{C} \sim {}_{2,2}\mathrm{C}$はコンダクタンスマトリクス$\mathbf{C}$を$\mathbf{x}_m$と$\mathbf{x}_s$に応じて分割したときの部分マトリクスを表す．従って，${}_{1,1}\mathrm{C}$は$(n_m \times n_m)$，${}_{2,1}\mathrm{C}$は$(n_s \times n_m)$，${}_{1,2}\mathrm{C}$は$(n_m \times n_s)$，${}_{2,2}\mathrm{C}$は$(n_s \times n_s)$のサイズを持つ．$\mathbf{x}_m$を主ベクトル，$\mathbf{x}_s$を従ベクトルと呼ぶことにする．なぜならば(3-98)式の$n_m+1 \sim n_m+n_s$行から

$$ {}_{2,1}\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_m + {}_{2,2}\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_s = \mathbf{o} \qquad (3\text{-}99)$$

の関係が得られ，$\mathbf{x}_s$は$\mathbf{x}_m$によって次式で表されるからである．

$$\mathbf{x}_s = -{}_{2,2}\mathbf{C}^{-1} \cdot {}_{2,1}\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_m \qquad (3\text{-}100)$$

ここで，

$$\mathbf{L} = -{}_{2,2}\mathbf{C}^{-1} \cdot {}_{2,1}\mathbf{C} \qquad (3\text{-}101)$$

とおく．$\mathbf{L}$は$(n_s \times n_m)$である．従って，全体のベクトル$\mathbf{x}$の近似ベクトルは$\mathbf{x}_m$で次のように表される．

$$\tilde{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m\\ \mathbf{L}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}_m \tag{3-102}$$

$\mathbf{E}_m$は$(n_m\times n_m)$の単位マトリクスである．ここでさらに次のように置く．

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m\\ \mathbf{L}\end{bmatrix} \tag{3-103}$$

従って(3-102)式は次のように書きかえられる．

$$\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}_m \tag{3-104}$$

次の問題は，どのようにして濃縮した状態方程式を導くかである．構造力学の振動の解析などにおいても同様な縮約を行っているが，この導き方はHamiltonの原理を用いた複雑な方法である.[79] 本論文ではより単純にこれを導くことが出来る．用いる原理は時間領域での重み付き残差積分である．すなわち有限要素法において空間領域での重み付き残差積分から近似式を導くのと同様な考え方による．この場合，重み関数は${}^t\tilde{\mathbf{x}}$にとる．ある時間区間[0,T]で次式の重み付き残差積分を定める．

$$\int_0^T {}^t\tilde{\mathbf{x}}\cdot(\mathbf{M}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{x}}}-\mathbf{C}\cdot\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{f})dt$$

$$=\int_0^T {}^t\mathbf{x}_m\cdot({}^t\mathbf{S}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{x}}_m-{}^t\mathbf{S}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}_m-{}^t\mathbf{S}\cdot\mathbf{f})dt=0 \tag{3-105}$$

この式は，次式が成り立つ場合に恒等的に成立する．

$${}^t\mathbf{S}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{x}}_m={}^t\mathbf{S}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}_m+{}^t\mathbf{S}\cdot\mathbf{f} \tag{3-106}$$

これが濃縮された状態方程式である．

こうして縮小されたシステムは，単に最初から節点数を減らしたモデルをつくってしまうのと比べて，より高周波の入力に精度よく応答するものとできる．もう1つの利点はモデルの縮小を機械的に一定のアルゴリズムで行えることである．

3.6 サブシステムの状態方程式の連成理論

扱おうとする系全体で一括して状態方程式を立ててしまうのではなく，いくつかのサブシステムに分割しておいて，シミュレーションをすることも考えられる．これは主に2つの意義を持つ．1つは濃縮と同様に，計算機の容量の制限の問題に対応するためである．計算機の容量は，状態方程式の次数の2乗に比例する分だけ必要になる．従って全体をいくつかの部分に分割しておけば，個々の状態方程式に必要とされる領域の和は，全体で一括して立てる状態方程式によって必要とされる領域よりも小さくてすむ．もう1つはシステマテックなモデル化のためである．設計のバリエーションによって全体のバリエーションも無数に存在し得る．しかしこの無数のバ

リエーションも，全体を，それぞれ自身が類型的な部分に分割できるとすれば，これらの部分の組み合わせのバリエーションであると考えることができる．従って，このような類型性によって分類される部分の典型的な状態方程式モデルを何らかのデータベースとして持っていれば，この連成理論によって，全体モデルの構成をかなり自動的に行うことも可能となる．

次の図3-1のように全体がいくつかのサブシステムに分けられるとする．サブシステムの個数をn_dとする．j番目のサブシステムの内部にはn_j個の状態変数があるとする．これを・印で表している．このうちいくつかは他のサブシステムへの出力変数にもなっており，◎印で表す．全体系への規定入力変数は＊印，自由入力変数は□印で表す．これらのサブシステムの具体例をあげることができる．例えば全体がパッシブソーラーハウスであれば，あるサブシステムは小石の蓄熱槽であったり，あるものは蓄熱壁であったり，またあるものは建築の室内側であったりする．もし，全体系が建築的なものだけであっても，多数室から成っていれば，各々の室まわりを1つずつのサブシステムとすることもできるし，例え単室であってもこれを構成する壁それぞれをサブシステムと考えることもできる．ただし，サブシステムとするのは普遍的なものにした方が，全体モデルのシスティマテックな組みあげのためには都合がよい．

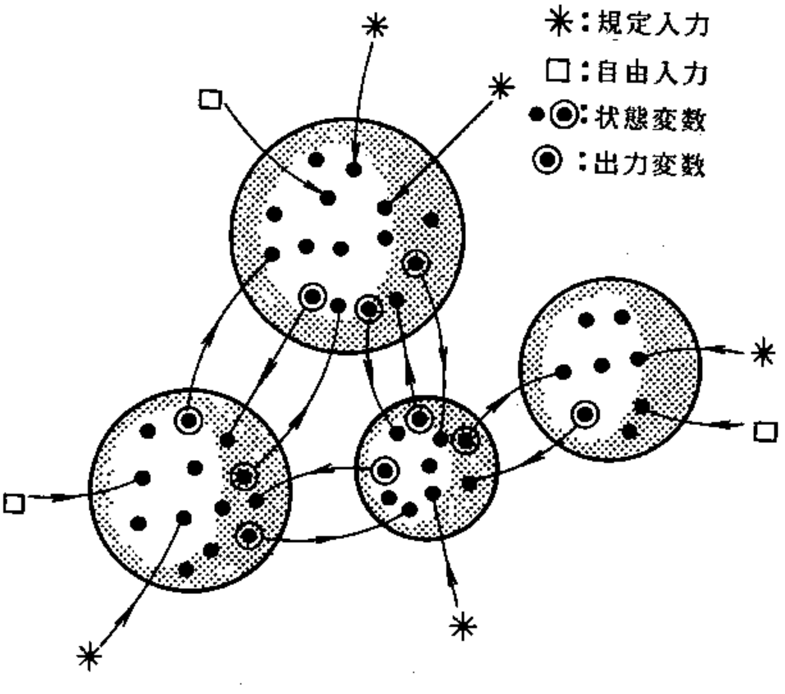


図3-1　サブシステムの連成の概念図

今，j番目のサブシステムにおいても，全体と同様に次の状態方程式で表示する．

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t)=\mathbf{C}_j^*\cdot\mathbf{x}_j(t)+\mathbf{f}_j^*(t) \tag{3-107}$$

これを時間的な離散系の漸化式にする．このための方法として，固有値解析をし，射影分解をして得られる，(3-54)か(3-57)式がある．しかし，式の演えきの簡単のために(3-57)式の方にする．す

なわち，入力が階段関数状の場合の漸化式である．

$$\mathbf{x}_j(k\cdot\Delta t)=\mathbf{\Phi}_j(\Delta t)\cdot\mathbf{x}_j\left((k-1)\cdot\Delta t\right)+\mathbf{U}_{sj}\cdot\mathbf{f}_j^*(k\cdot\Delta t) \tag{3-108}$$

全体系の状態ベクトル$\mathbf{X}$は，各々のサブシステムの状態ベクトルの直和である．

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\\ \vdots\\ \mathbf{x}_j\\ \vdots\\ \mathbf{x}_{nd}\end{bmatrix} \tag{3-109}$$

従って，あるマトリクス$\mathbf{D}$によって$\mathbf{X}$を$\mathbf{x}$に関係づけることができる．例えばj番サブシステムについては$\mathbf{D}_{xj}$として

$$\mathbf{x}_j(t)=\mathbf{D}_{xj}\cdot\mathbf{X}(t) \tag{3-110}$$

となる．$\mathbf{D}$はもちろん定数マトリクスであり，0あるいは1の要素だけで構成される．$\mathbf{D}_{xj}$について具体的に中味は次のようになる．

$$\mathbf{D}_{xj}=\begin{array}{c} \overleftrightarrow{\quad n_j \quad} \\ \left[\begin{array}{c|cccc|c} O & 1 & & & O & O \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots 1 & & \\ & & O & & 1 & \end{array}\right] \end{array} \updownarrow n_j \tag{3-111}$$

このマトリクスを全体からサブシステムへの関係マトリクスと呼ぶことにする．$\mathbf{D}_x$は全体の状態ベクトルからサブシステムの状態ベクトルへの関係マトリクスである．従って同様に全体系での規定入力ベクトル$\mathbf{x}_0$からサブシステムの規定入力ベクトルへの関係マトリクスを$\mathbf{D}_0$，全体系での自由入力ベクトル$\mathbf{g}$からサブシステムの自由入力ベクトルの関係マトリクスを$\mathbf{D}_g$とする．例えばj番サブシステムのk番節点へ，$\mathbf{x}_0$のl番要素の規定節点から入力があるとすれば$\mathbf{D}_{oj}$は次のようになる．

$$\mathbf{D}_{oj} = n_j \updownarrow \begin{array}{c} l\text{列} \\ \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & c_{k,l} & \cdots \\ & & \end{array}\right] k\text{行} \\ \longleftarrow n_o \longrightarrow \end{array} \tag{3-112}$$

同様にk番節点へ$\mathbf{g}$のl番要素の自由入力源から入力があるとすれば，$\mathbf{D}_{gj}$は次のようになる．

$$\mathbf{D}_{gj} = n_j \updownarrow \begin{array}{c} l\text{列} \\ \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & r_{k,l} & \cdots \\ & & \end{array}\right] k\text{行} \\ \longleftarrow n_g \longrightarrow \end{array} \tag{3-113}$$

さらに，あるサブシステムに対し入力となるものに他のサブシステムからの出力がある．図3-1において◎印で示したものがそうである．これらの出力変数を，j番サブシステムのものは$\mathbf{y}_j$のように表示する．$\mathbf{y}_j$の要素は$\mathbf{x}_j$の中のいくつかの要素である．つまり$\mathbf{y}_j$は$\mathbf{x}_j$の部分空間を張る．$\mathbf{y}_j$のベクトルの次数は$\mathbf{x}_j$のそれより以下である．もし$\mathbf{x}_j$の状態値が全て出力になっていれば，これらの次数は等く，$\mathbf{y}_j$の要素は単に$\mathbf{x}_j$の要素を並べかえたものか，あるいは全く同じベクトルとなる．ここで系全体の出力変数のベクトルを$\mathbf{Y}$で定義すれば，$\mathbf{Y}$は$\mathbf{y}_j$の直和となる．

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{nd} \end{bmatrix} \tag{3-114}$$

関係マトリクスの考えが$\mathbf{Y}$についても定められる．すなわち全体の出力ベクトルからサブシステムの出力ベクトルへの関係マトリクス$\mathbf{D}_{yj}$は次のようになる．

$$\mathbf{D}_{yj} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ O & & & 1 & O & O \\ & & O & & \ddots & \\ & & & & 1 & \end{array}\right] \updownarrow \mathbf{y}_j\text{のサイズ} \\ \leftarrow \mathbf{y}_j\text{のサイズ} \rightarrow \end{array} \tag{3-115}$$

以上の関係マトリクスを用いて，入力ベクトル$\mathbf{f}^*_j(t)$を記述する．$\mathbf{f}^*$は$\mathbf{f}$に左方から$\mathbf{M}^{-1}$を乗じたものであるから

$$\mathbf{f}^*_j(t)=\mathbf{M}_j^{-1}\cdot\mathbf{f}_j(t)$$

$$=\mathbf{M}_j^{-1}\cdot\mathbf{D}_{yj}\cdot\mathbf{Y}(t)+\mathbf{M}_j^{-1}\cdot\mathbf{D}_{oj}\cdot\mathbf{x}_o(t)+\mathbf{M}_j^{-1}\cdot\mathbf{D}_{gj}\cdot\mathbf{g}(t) \tag{3-116}$$

となる．ここで簡単のために

$$\mathbf{D}^*_{yj}=\mathbf{M}_j^{-1}\cdot\mathbf{D}_{yj} \tag{3-117}$$

$$\mathbf{D}^*_{oj}=\mathbf{M}_j^{-1}\cdot\mathbf{D}_{oj} \tag{3-118}$$

$$\mathbf{D}^*_{gj}=\mathbf{M}_j^{-1}\cdot\mathbf{D}_{gj} \tag{3-119}$$

とおく．右肩に*がついても関係マトリクスと呼ぶことにする．これらのマトリクスによって，j番サブシステムの時間漸化式(3-108)の右辺ベクトルは全て，全体系におけるベクトル$\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{g}$を用いて書き改められる．

$$\mathbf{x}_j(k\cdot\Delta t)=\Phi_j(\Delta t)\cdot\mathbf{D}^*_{xj}\cdot\mathbf{X}\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big)+\mathbf{U}_{sj}\cdot\mathbf{D}^*_{yj}\cdot\mathbf{Y}(k\cdot\Delta t)$$

$$+\mathbf{U}_{sj}\cdot\mathbf{D}^*_{oj}\cdot\mathbf{x}_o(k\cdot\Delta t)+\mathbf{U}_{sj}\cdot\mathbf{D}^*_{gj}\cdot\mathbf{g}(k\cdot\Delta t) \tag{3-120}$$

この式から出力$\mathbf{y}_j$を記述する方程式が抜きだせる．$\mathbf{y}_j$の要素は必ず$\mathbf{x}_j$のどれかの要素である．従って$\mathbf{x}_j$内において$\mathbf{y}_j$の要素が位置する行について，(3-120)式の右辺のマトリクスのそれらの行を抜き出す．マトリクス$\Phi_j(\Delta t)\cdot\mathbf{D}^*_{xj}$から$\mathbf{S}_{xj}$, $\mathbf{U}_{sj}\cdot\mathbf{D}^*_{yj}$から$\mathbf{S}_{yj}$, $\mathbf{U}_{sj}\cdot\mathbf{D}^*_{oj}$から$\mathbf{S}_{oj}$, $\mathbf{U}_{sj}\cdot\mathbf{D}^*_{gj}$から$\mathbf{S}_{gj}$を取り出したとすれば$\mathbf{y}_j$は次のようになる．

$$\mathbf{y}_j(k\cdot\Delta t)=\mathbf{S}_{xj}\cdot\mathbf{X}\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big)+\mathbf{S}_{yj}\cdot\mathbf{Y}(k\cdot\Delta t)$$

$$+\mathbf{S}_{oj}\cdot\mathbf{x}_o(k\cdot\Delta t)+\mathbf{S}_{gj}\cdot\mathbf{g}(k\cdot\Delta t) \tag{3-121}$$

これらのマトリクス$\mathbf{S}$をサブマトリクスと呼ぶことにする．各サブシステムの出力ベクトル$\mathbf{y}_j$の直和が$\mathbf{Y}$となるから次式が成り立つ．

$$\mathbf{Y}(k\cdot\Delta t)=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1(k\cdot\Delta t)\\ \mathbf{y}_2(k\cdot\Delta t)\\ \vdots\\ \mathbf{y}_{nd}(k\cdot\Delta t)\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x1} \\ \mathbf{S}_{x2} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{xnd} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big) + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{y1} \\ \mathbf{S}_{y2} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{ynd} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Y}(k\cdot\Delta t)
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{o1} \\ \mathbf{S}_{o2} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{ond} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_o(k\cdot\Delta t) + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{g1} \\ \mathbf{S}_{g2} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{gnd} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{g}(k\cdot\Delta t)
$$

$$
= \overline{\mathbf{S}}_x \cdot \mathbf{X}\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big) + \overline{\mathbf{S}}_y \cdot \mathbf{Y}(k\cdot\Delta t) + \overline{\mathbf{S}}_o \cdot \mathbf{x}_o(k\cdot\Delta t) + \overline{\mathbf{S}}_g \cdot \mathbf{g}(k\cdot\Delta t) \qquad (3\text{-}122)
$$

ここに**S**はサブシステムの直和をとったマトリクスを表す．(3-122)式でわかるように**S**はサブマトリクスを単に行方向に並べていって出来上がるマトリクスである．(3-122)式は$\mathbf{Y}(k\cdot\Delta t)$について解くことができる．$n_y$を**Y**の次数とすれば次のようになる．

$$
\mathbf{Y}(k\cdot\Delta t) = (\mathbf{E}_{ny} - \overline{\mathbf{S}}_y)^{-1} \cdot \overline{\mathbf{S}}_x \cdot \mathbf{X}\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big)
$$

$$
+ (\mathbf{E}_{ny} - \overline{\mathbf{S}}_y)^{-1} \cdot \overline{\mathbf{S}}_o \cdot \mathbf{x}_o(k\cdot\Delta t) + (\mathbf{E}_{ny} - \overline{\mathbf{S}}_y)^{-1} \cdot \overline{\mathbf{S}}_g \cdot \mathbf{g}(k\cdot\Delta t) \qquad (3\text{-}123)
$$

ここに$\mathbf{E}_{ny}$は**Y**の次数を持つ単位マトリクスである．次のように記号定義をする．

$$
\mathbf{\Psi} = (\mathbf{E}_{ny} - \overline{\mathbf{S}}_y)^{-1} \qquad (3\text{-}124)
$$

$$
\mathbf{W}_x = \mathbf{\Psi} \cdot \overline{\mathbf{S}}_x \qquad (3\text{-}125)
$$

$$
\mathbf{W}_o = \mathbf{\Psi} \cdot \overline{\mathbf{S}}_o \qquad (3\text{-}126)
$$

$$
\mathbf{W}_g = \mathbf{\Psi} \cdot \overline{\mathbf{S}}_g \qquad (3\text{-}127)
$$

すると(3-122)式は次式のように書き改められる．

$$
\mathbf{Y}(k\cdot\Delta t) = \mathbf{W}_x \cdot \mathbf{X}\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big) + \mathbf{W}_o \cdot \mathbf{x}_o(k\cdot\Delta t) + \mathbf{W}_g \cdot \mathbf{g}(k\cdot\Delta t) \qquad (3\text{-}128)
$$

この右辺の**X**の部分要素によって構成されるのが**Y**であるから，この式は出力ベクトル**Y**についての時間的な漸化式となっている．マトリクス**W**は定数マトリクスとしてあらかじめ計算しておくことが出来るから，系全体のシミュレーションは次のアルゴリズムを繰り返すことによって行える．

(1) kタイムステップの系全体の出力ベクトル$\mathbf{Y}(k\cdot\Delta t)$を計算する．すなわち，$(k-1)$タイムステップでの全状態ベクトル$\mathbf{X}((k-1)\cdot\Delta t)$と，$k$タイムステップでの全体系に対する入力ベクトル$\mathbf{x}_0(k\cdot\Delta t)$および$\mathbf{g}(k\cdot\Delta t)$を用いて，(3-128)式を計算する．
(2) (3-120)式を用いて，kタイムステップでの，各サブシステムの状態ベクトルを計算する．

これらの計算において扱うマトリクスのサイズは，全体系を一括して状態方程式記述した場合よりも小さくてすむ．さらに各サブシステムの時間的な漸化式(3-108)式における$\Phi_j(k\cdot\Delta t)$，$\mathbf{U}_{sj}$などはあらかじめデータベース化することも可能であるから，全体モデルの組みあげは，サブシステム間の接続だけによって行うことも可能となる．

3.7　回路網のモード変化

熱的な構造が時間的に変化していく場合を扱う方法について考える．このような具体例はミクロなものからマクロなものまでいろいろある．熱伝導などの物性値が，温度自身によって変化することなどはミクロな例である．しかし，建築の熱的な環境を評価する際に重要なのはもっとマクロな変化である．冷暖房に用いる風量の変化，雨戸の開閉などに伴って建物の熱的な構造は変化すると見なせる．これらの変化は拡張コンダクタンスの考え方により，モデル上はこのパラメータの変化と考えられる．つまり，節点間の拡張コンダクタンスによるつながり方，あるいはその強弱が変化するものと考えられる．こうした変化を回路網のモード変化として定義する．すなわち，回路網の節点数nとnoさらに熱容量m_{ij}は変化せず，拡張コンダクタンスc_{ij}が変化することを回路網のモード変化と定める．節点数と熱容量が変化しないことは質量保存則を言い換えたものである．以上の具体例を示す．図3-2は付設温室，小石蓄熱槽や蓄熱壁を持つパッシブソーラーハウスの断面図を表す．太陽熱などの自然なエネルギーを自然な方法で暖房等に利用するための工夫が施されている．冬期，日射のあるときは，付設温室で暖められた空気を直接に室内へ循環させて暖房するか，小石蓄熱槽へ循環して夜間に備える．付設温室で暖められた空気を二重壁の間を通すことにより室内の輻射環境を向上させる．蓄熱壁の外部側が太陽熱により暖まり，ある程度の時間遅れをもって室内側に熱が流れ込んでくることにより，夜間の暖房に寄与する．付設温室のガラス面から夜間に熱損失するのは断熱パネルを開閉することにより防ぐ．夏期はこのような日射制御パネルの利用と，積極的な換気により涼しさを得る．従ってこの場合は，さまざまな空気循環のさせ方と，断熱パネルの開閉により，回路網のモードが作られる．図3-3と図3-4はともに，このパッシブソーラーハウスの熱回路網モデルである．図3-3は蓄熱のモードのモデルを示す．温室の空気を表すのが節点3であり，これは空気の流れによる拡張コンダクタンスによって，壁内の中空層の節点5と8に結びついており，さらに蓄熱槽内の空気の節点13, 14, 15, 16に結びついている．節点1は断熱パネルを表すが，温室に日射を導入している状態では開いており，それゆえ温室のガラス面の節点2番とは熱的な接続を断っている．このパネルが外気に放置されているならば外気の節点26番とだけ結びついていることになる．これに対し，夜間等の暖房モードを表す図3-4では，パネルは閉っており，温室のガラス面と熱的に接続される．ガラスの節点から見れば，いったんパネルの節点を経由してから外気につながるため，外気への熱損失は小さくなる．またこのモードでは室内と蓄熱槽の空気を循環させて，小石に貯えられた熱を

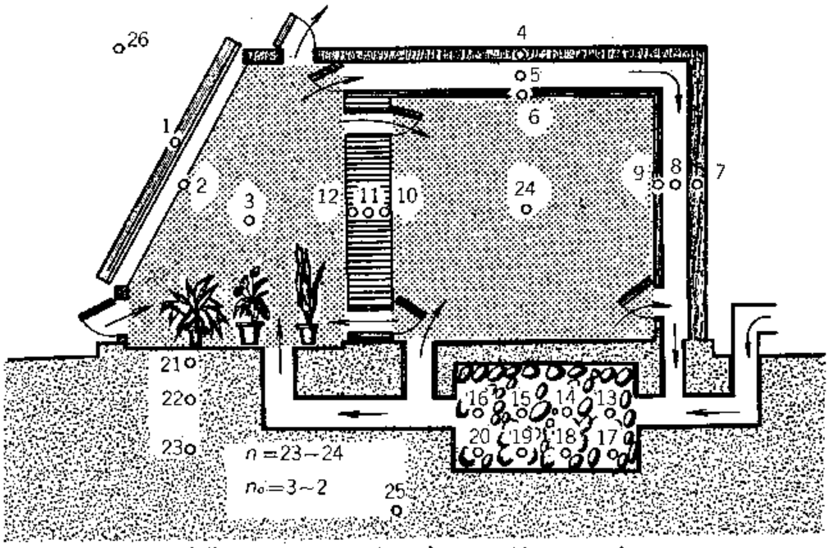


図3-2　パッシブソーラーハウス

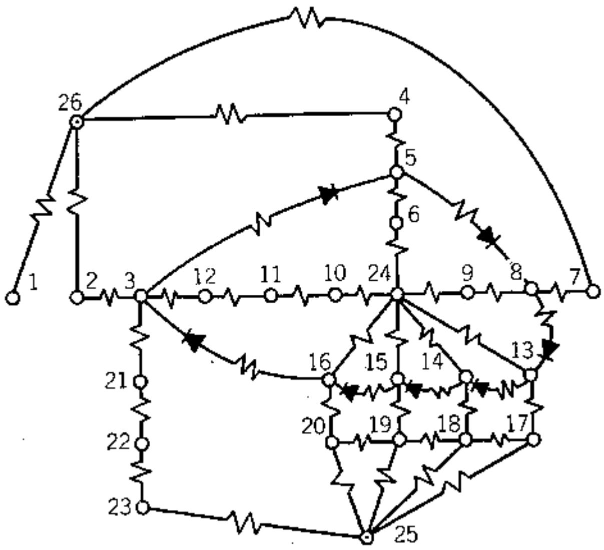


図3-3　蓄熱モード

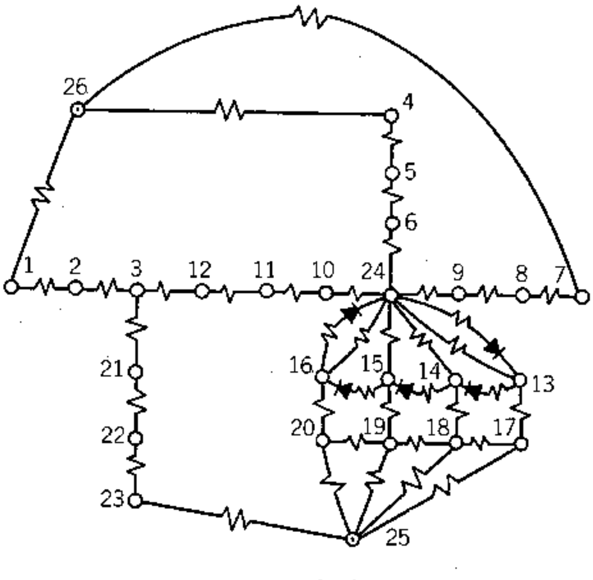


図3-4　暖房モード

室内へ放熱する．このようにモードの変化は全て拡張コンダクタンスの変化としてとらえられる．

実際の計算上は，回路網のモード変化に効率的に対応する必要がある．そこでもし，回路網の総モード数が何通りかの有限であれば，あらかじめ，モード毎の推移マトリクスや駆動マトリクスを用意しておき，時間的な漸化式の計算にあたって，これらのマトリクスを切り換えていけばよい．すなわち，全部でm_d個のモードがあるとして，時間的な漸化式は(3-54)式のタイプのものを用いるとすれば，次式のように計算を進めて行く．

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{\Phi}_1(\Delta t) & \mathbf{U}_{o1} & \mathbf{U}_{12} \\
\mathbf{\Phi}_2(\Delta t) & \mathbf{U}_{o2} & \mathbf{U}_{12} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{\Phi}_{md}(\Delta t) & \mathbf{U}_{o,md} & \mathbf{U}_{1,md} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array}
$$

$$\mathbf{x}(k\cdot\Delta t)=\mathbf{\Phi}_m(\Delta t)\cdot\mathbf{x}\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big)+\mathbf{U}_{om}\cdot\mathbf{f}^*\Big((k-1)\cdot\Delta t\Big)+\mathbf{U}_{1m}\cdot\mathbf{f}^*(k\cdot\Delta t) \tag{3-129}$$

つまり，各タイムステップでの回路網モードに応じた$\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{U}_0$, $\mathbf{U}_1$を用いて(3-129)式の計算を行う．こうすることによって毎ステップにおいて，推移マトリクスを計算することの不経済性を回避できる．

3.8　熱水分同時移動

ここでは熱の移動だけではなく，湿気の移動も含めて扱う．ただし湿気については主にハイグロスコピックな状態を対象とする．すなわち，結露の起きていない壁体中の熱と湿気の移動などが扱おうとする対象である．湿気も温度と同様に一種の拡散量である．従って温度と同様な数学モデルが作れる．しかしモデル化上，最も問題となるのは熱と水分の相互影響の考慮である．固体中のある部分で温度の上昇があれば水分の蒸発が起こる．そしてその部分の湿度は高くなる．逆に湿気が吸着されれば，凝縮の潜熱が発生し，その部分の温度は高くなる．従って湿気の拡散方程式の中には温度に関連する項が含まれる．同様に温度の拡散方程式の中には湿度に関連する項が含まれる．それぞれの方程式を偏微分方程式で記述すると付録3のようになることが知られている．[80]

こうした系について集中定数系近似し，回路網の定式化をすれば次のようになる．

$$(c'\cdot\gamma'+\kappa)\cdot v_i\cdot\frac{dh_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n+n_o} ch_{i,j}\cdot(h_j-h_i)+\nu\cdot v_i\cdot\frac{d\theta_i}{dt}+gh_i \tag{3-130}$$

$$(c\cdot\gamma+r\cdot\nu)\cdot v_i\cdot\frac{d\theta_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n+n_o} ct_{i,j}\cdot(\theta_j-\theta_i)+r\cdot\kappa\cdot v_i\cdot\frac{dh_i}{dt}+gt_i \tag{3-131}$$

ここで，記号は次の通りである．

h	:	固体中の空隙の絶対湿度(kg/kg')
θ	:	温度$(°C)$
c	:	比熱$(kcal/kg°C)$
γ	:	密度(kg/m^3)
γ'	:	空気密度(kg/m^3)
v	:	水蒸気放出率$(kg/m^3 \cdot °C \cdot kg/kcal)$
c'	:	空隙率(m^3/m^3)
r	:	吸着熱$(kcal/kg)$
κ	:	水蒸気吸着率$(kg/m^3(kg/kg'))$
n	:	未知数となる総節点数
n_o	:	既知数として入力条件となる総節点数
v_i	:	i番節点の検査体積(m^3)
ch_{ij}	:	j番節点からi番節点への湿気コンダクタンス$(kg/hr\cdot(kg/kg'))$
gh_i	:	i番節点の水蒸気入力(kg/hr)
ct_{ij}	:	j番節点からi番節点への熱コンダクタンス$(kcal/hr°C)$
g_{t_i}	:	i番節点の熱入力$(kcal/hr)$

もしch_{ij}やct_{ij}を拡張コンダクタンスと見なせば，伝導だけでなく移流による湿気の拡散もモデル化できることになる．とにかくこれらの節点方程式から自動的に次のベクトル・マトリクス形式の全体方程式が構成される．

$$\mathbf{M}_h \cdot \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{C}_h \cdot \mathbf{h} + \mathbf{V}_h \cdot \dot{\mathbf{t}} + \mathbf{C}_{oh} \cdot \mathbf{h}_o + \mathbf{g}_h \tag{3-132}$$

$$\mathbf{M}_t \cdot \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{C}_t \cdot \mathbf{t} + \mathbf{V}_t \cdot \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{C}_{ot} \cdot \mathbf{t}_o + \mathbf{g}_t \tag{3-133}$$

ここに${}^t\mathbf{h} = (h_1, h_2, \cdots\cdots, h_n)$, ${}^t\mathbf{h}_0 = (h_{n+1}, \cdots\cdots, h_{n+no})$, ${}^t\mathbf{g}_h = (gh_1, \cdots\cdots, gh_n)$, ${}^t\mathbf{t} = (t_1, \cdots\cdots, \mathrm{t}_n)$, ${}^t\mathbf{t}_0 = (t_{n+1}, \cdots\cdots, t_{n+no})$, ${}^t\mathbf{g}_t = (gt_1, \cdots\cdots, gt_n)$である．

また各マトリクスの$\mathbf{M}_h$, $\mathbf{C}_h$, $\mathbf{V}_h$, $\mathbf{M}_t$, $\mathbf{C}_t$, $\mathbf{V}_t$, $\mathbf{C}_{0h}$, $\mathbf{C}_{0t}$の内容は第2章で述べた熱だけの場合と同様にして得られる．

湿気に関する方程式(3-132)，温度に関する方程式(3-133)のそれぞれは状態方程式ではないが，次のような複合の状態ベクトルを定めれば，両方程式を一括した全体的な状態方程式が構成できる．

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \tag{3-134}$$

このベクトルで両式を整理すれば次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_h & -\mathbf{V}_h \\ -\mathbf{V}_t & \mathbf{M}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{h}} \\ \dot{\mathbf{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_h & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{oh} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C}_{ot} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_o \\ \mathbf{t}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_h \\ \mathbf{g}_t \end{bmatrix} \tag{3-135}$$

そこで新しく次のようなマトリクスとベクトルの定義をする．

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_h & -\mathbf{V}_h \\ -\mathbf{V}_t & \mathbf{M}_t \end{bmatrix}$$

$(2n \times 2n)$ (3-136)

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_h & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C}_t \end{bmatrix}$$

$(2n \times 2n)$ (3-137)

$$\mathbf{C}_{oc} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{oh} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C}_{ot} \end{bmatrix}$$

$(2n \times 2n_o)$ (3-138)

$$\mathbf{x}_{oc} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_o \\ \mathbf{t}_o \end{bmatrix}$$

$(2n_o)$ (3-139)

$$\mathbf{g}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_h \\ \mathbf{g}_t \end{bmatrix}$$

(n) (3-140)

このとき(3-135)式は次のように書き直せる.

$$\mathbf{M}_c \cdot \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{C}_c \cdot \mathbf{x}_c + \mathbf{C}_{oc} \cdot \mathbf{x}_{oc} + \mathbf{g}_c \tag{3-141}$$

こうして温度だけの状態方程式と同一形式の状態方程式が得られた. 注意することは節点数がnであっても(3-141)の状態方程式は$2n$次になることである. 入力となる項をまとめて次のように表せば

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{C}_{oc} \cdot \mathbf{x}_{oc} + \mathbf{g}_c \tag{3-142}$$

となり，(3-141)式は次のように表せる．

$$\mathbf{M}_c \cdot \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{C}_c \cdot \mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c \tag{3-143}$$

この時間微分方程式の解は3.2で述べた射影分解による時間積分法により全く同様にして(3-45)式で表わされる．(3-45)式での固有値α_iは一般に複素数の範囲であってもかまわないから状態方程式の形式になる限り解も同一形式になる．この解析的な時間積分を行うためには固有値解析の計算が必要である．この実際的な計算には数学上のサブルーチンライブラリにあるものを使用すればよいが，固有値の性質により，それに適した解法も何通りかあり，従って，この熱水分同時移動系における固有値の性質を調べておくことは重要である．この際に注意すべきことは，扱う現象が拡散系だから直接的に固有値の性質が言えるものではなく，あくまでも(3-143)式に近似化された数学モデルについての固有値の性質を調べる必要があるということである．この考え方として3.1と同様に行う．

ただしマトリクス$\mathbf{C}_c$の負の定符号は明らかであるから，マトリクス$\mathbf{M}_c$の正の定符号を証明する．この証明はまず，検査体積法や差分法の場合と，有限要素法による場合とを分けて行う．前者の場合は付録4のようにして数学的帰納法によって行える．後者の場合は(3-132)あるいは(3-133)式を，それぞれ$\mathbf{h}$だけ，あるいは$\mathbf{t}$だけの方程式に直すことによって，付録5のようにして行える．

従って，熱水分同時移動系の集中定数系モデルも，熱だけのそれと同じ性質を持つことが証明された．すなわち，いったん状態方程式にしてしまったあとは，前節までの熱だけの場合と同様なシミュレーションの理論が適用できる．

3.9　熱負荷

暖冷房の運転中の状況も，あるいはその停止中の自然状態をシミュレートすることも，一般的な熱移動現象のシミュレーションの1つの特殊な局面にすぎない．従って，これらの状況も第2章に述べた方法でモデル化することができ，前節まで述べた方法でシミュレートできる．それゆえ，本研究においては，特に熱負荷計算のために特殊な用語を定義する必要はない．

一般に負荷計算には2通りの目的があるとされている．1つは暖冷房装置の容量決定であり，もう1つは年間の所要エネルギー予測である．前者は，暖冷房上，気象状況と建物の使用状況が最も苛酷である条件を想定し，定常計算によって負荷計算を行う．後者は，これに比べ，より実際の運転状況に近い条件を用い，非定常計算によって，連続した長期間の負荷計算を行う．すなわち，後者は，いわゆるシミュレーションにより近づけようとするものである．しかし，本研究での方法によれば，これよりもさらに実態に近いシミュレーションが可能となるだけではなく，同じモデルで，定常計算も行うことができ，両方の目的を実現することができる．

図3-5は，事務所建築の暖房の単純な例を示している．室内空間は1個の熱流の検査体積とし，節点番号15で表している．そして天井裏の空間は節点12番である．家具の熱容量は，室内空気の熱容量に含ませるのではなく，別のものとした方が合理的である．この例では，16~18の節点にその熱容量を持たせている．照明発熱による熱流は，室内側へ向かうものと，天井裏空間へ向かうものに分れる．しかし，この分配率は，あらかじめ定められるものではなく，照明器具，天井裏

空気，室内空気温度の状態によって異なってくるものであることに留意する．このモデルではそれぞれの部分の温度を未知数として求めていることになり，そのような分配率を仮定する必要はない．

装置側は，空調コイル，成層型蓄熱槽，ボイラーと，物質移動によって熱の移送を行う，空気ダクト，水配管および送風機やポンプから成るとしている．物質移動による拡張コンダクタンスの考え方により，これらダクトを通しての熱の移動や，成層型蓄熱槽内の近似された押し出し流れも一般的にモデル化できる．空調コイルの熱交換器は向流であれ，並流であれ，検査体積法による集中定数系近似によりモデル化できる．図3-6において，節点番号27~30はコイル内の水の流れに沿って分割した検査体積を表す．同様に節点番号31~34はコイル内の空気の流れに沿って分割した検査体積を表す．この場合は向流となっている．両流体の節点間の拡張コンダクタンスを定めるには，主に強制対流伝達から形成される熱貫流率[81]が必要である．成層型蓄熱槽内の節点38~44は，水を上下方向で分割した検査体積を表す．もしこれらの節点数が限りなく多くなっていけば，完全な押出し流れに近づいていく．実現象では完全な押出し流れということはなく，渦や伝導によって，ある程度の混じり合いが起き，従って有限の個数の節点でモデル化できることになる．

このような暖冷房系に対する最も単純な制御は，レタン空気の温度を検出し，コイルへの温水流量を二方弁で制御することである．三方弁を用いるよりは，コイル出入口水温の差を一定に保ちやすいから，蓄熱槽の成層状態をこわすおそれは少ない．またボイラーはスケジュールとして夜間に運転するが，蓄熱槽上部の水温が下がってしまえば，昼でも運転するという制御をすることになる．従って代表的な運転モードに応じた熱回路網のモードは，図3-6の暖房モードと，図3-7の夜間の蓄熱モードになる．そして同じ暖房モードであっても，コイルへの温水流量の変化に応じて，さらにいくつかのモードが存在する．モードの変化を考慮した計算法は3.7に述べた．温水流量の制御は実際でもフィードバック制御であるが，シミュレーション上もフィードバック制御でモードを決めることになる．ボイラーなどの機器は回帰式モデルを用いる．

以上のようにして最終的な目的である長期間の消費エネルギーは求められるがいわゆる熱負荷はこれとは多少異なった意味を持っている．それは建物系と装置系をなるべく切り離して，建物系だけから全体の消費エネルギーへ寄与していく分を求めようとするものである．実状に近い消費エネルギーを求めようとするならば，こうした方向は好ましくはないと考えられるが，現状での考え方になるべく沿う形のモデル化とシミュレーションのやり方を以下に述べる．

まず，いわゆる設計負荷計算を，本熱回路網のモデルで行う場合について述べる．この場合は建物系だけをモデル化することになる．そして室温は規定温度の節点とする．従ってそのほかの規定温度の節点は外気温，隣室温などであり，自由入力としては日射量，照明発熱，人体発熱などとなる．このとき，定常状態を仮定しているから，次式が成り立つ．

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{C}_o\cdot\mathbf{x}_o+\mathbf{R}\cdot\mathbf{g}=\mathbf{o} \qquad (3\text{-}144)$$

$\mathbf{x}$について解けば次式となる．

$$\mathbf{x}=\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{C}_o\cdot\mathbf{x}_o+\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{g} \qquad (3\text{-}145)$$

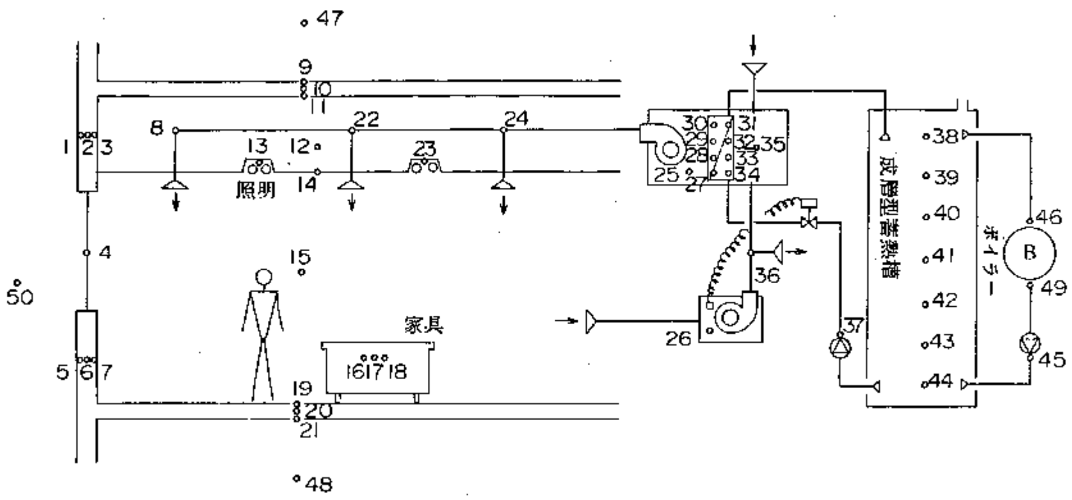


図3-5　暖冷房シミュレーション

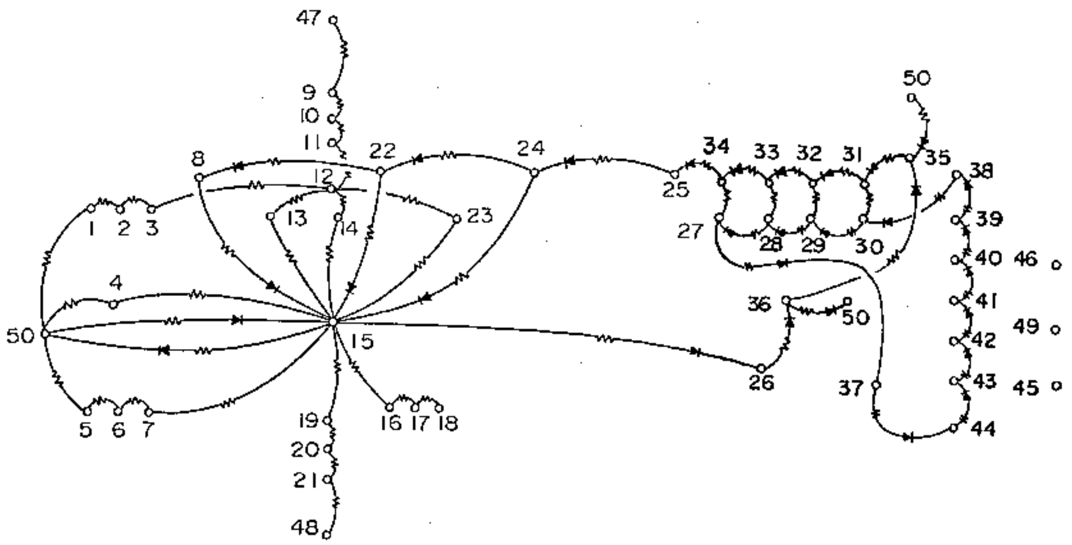


図3-6　暖房モード

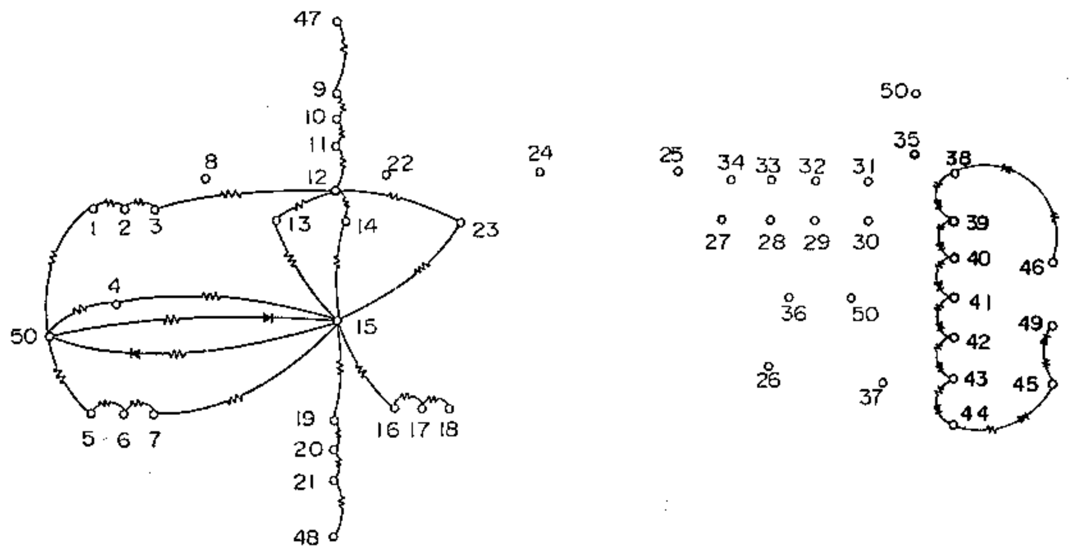


図3-7　蓄熱モード

熱負荷は，室温の節点に対して直接に接続している全ての節点からの流入熱流として定義できるから，この総和を行うベクトル**b**とスカラーdがつくられる．このとき熱負荷g_jは次式で計算される．

$$g_j={}^t\mathbf{b}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}_o\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}+d={}^t\mathbf{b}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{C}_o\cdot\mathbf{x}_o+\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{g}\\ \mathbf{x}_o\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}+d \tag{3-146}$$

次にいわゆる年間負荷に相当するものを計算するために，図3-5のモデルにおいて，どこをどのように省略するかが問題となる．コイルの部分をとってみれば，本来は入口水温に対して出口水温が計算されているわけであるが，これでは現状の負荷の定義と異なる．現状の定義ではコイルの部分で，冷房側なら正の，暖房側なら負の熱を除去するとし，これを除去熱量と呼んでいる．図3-5のようなモデルでシミュレーションを行うときには，除去熱量の上限や下限は，自ずと他の部分の影響で考慮されるのだが，除去熱量単独で他と切り離してしまう場合は，それらの限界について何らかの仮定が必要になってくる．そこで，まずこのような仮定を設けて，コイルから先の他の機器から切り離し，コイルの部分で，限界を持つ熱除去を行うというように簡略化する．これは自由入力の1つと見なされg_jはレタン空気の温度によってフィードバック制御されると見なされる．回路網のモードは3通りあると考えられる．それらは調整時，非調整時と予熱時と呼ばれるものに対応する．それぞれの期間を添字c(conditioning), n(not conditioning), p(pre conditioning)で表わす．推移マトリクスや駆動マトリクスもこれらに対応したものをあらかじめ作っておくことができる．簡単のため，時間積分の漸化式は(3-57)式を使うとする．g_jを計算するための，ベクトル**b**とスカラー**d**を定める．シミュレーションのアルゴリズムは次のようになる．

予熱時

$$\left[\begin{array}{l} g_{jk} \quad \leftarrow \quad -g_{j\,max} \quad or \quad -g_{j\,min} \\ \mathbf{x}_k=\mathbf{\Phi}_p\cdot\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{U}_{sp}\cdot\mathbf{f}_k^* \end{array}\right. \tag{3-147}$$

調整時

$$\left[\begin{array}{l} g_{jk} \quad \leftarrow \quad -{}^t\mathbf{b}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{k-1}\\ \mathbf{x}_{o\,k-1}\\ \mathbf{g}_{k-1}\end{bmatrix}-d \\ \cdot if \quad g_{jk}<-g_{j\,max} \quad then \quad g_{jk}\leftarrow -g_{j\,max} \\ \cdot if \quad g_{jk}>-g_{j\,min} \quad then \quad g_{jk}\leftarrow -g_{j\,min} \\ \mathbf{x}_k=\mathbf{\Phi}_c\cdot\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{U}_{sc}\cdot\mathbf{f}_k^* \end{array}\right. \tag{3-148}$$

非調整時

$$\left[\begin{array}{l} g_{jk} \leftarrow o \\ \\ \mathbf{x}_k = \Phi_n \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{U}_{sn} \cdot \mathbf{f}_k^* \end{array}\right. \tag{3-149}$$

ここに$g_{j\ max}$は冷房側の上限，$g_{j\ min}$は暖房側の下限の除去熱量を表す．除去熱量の符号は冷房が正，暖房が負である．もしg_jがレタン温度だけにプロポーショナルなものとして，bとdを定めると，Δtのとり方によってはハンチングを起こし易い．これを回避するための1つの方法は，(3-146)式で定めたbとdを用いることである．つまり，予測される近似負荷の符号を変えたものをg_jとして用いる．本論文の範囲では扱わないが興味深い問題の1つに，理論的な予測制御法があげられる．以上の熱負荷シミュレーションは単純なフィードバック制御で行ったわけであるが，それで求めたg_jは一種の操作量とも考えられる．このような操作量の決定を，何らかの評価規範最適化のもとに理論的に行うのが，最適制御法となるわけである．

3.10　まとめ

本章では，熱回路網の状態方程式モデルを用いてシミュレーションをするための基本的な理論を論じた．ベクトルマトリクス形式の状態方程式の扱いによって現代的数学の直接的応用が可能となるだけでなく，計算モデルを数式上も明確なシステムとして把握できるようになり，さらに系の動特性は指数関数の線型和として認識できるようになる．

まず，熱回路網の状態方程式の特性を調べた．一般化節点方程式の定式化法により，その数学的構造は明確に表示される．伝導，伝達，輻射等についての拡張コンダクタンスは対称性$c_{ij}=c_{ji}$を持ち，この場合は固有値が実負となる．物質移動による非対称のc_{ij}を持つ場合は固有値が一般に複素数の範囲であるが実部の負は証明される．状態方程式の固有値解析を行い，解析的な時間積分をする方法を示した．これが射影分解による方法である．すなわち，時間的な関数について，本来インプリッシットな推移マトリクスを，各固有空間に射影分解して，エクスプリッシットにすることができ，実際に解析的な時間積分が可能となる．そして気象条件のような不規則な入力関数に対してΔtの時間間隔で積分を行うための2種類の漸化式を導いた．1つは直線補間された入力関数に対するものであり，もう1つは階段関数補間されたものについてである．

また入力が調和分析等によって周期関数に近似された場合に対して，状態方程式の解を明らかな時間関数として表示した．

差分法による近似時間積分には多くの種類があるが，中でも後退差分と前進差分はよく用いられている．これらの利点はアルゴリズムが単純なことである．本章ではこれらの方法の数値的安定性についても論じた．このための簡潔で正しい議論のためには，やはりシステムという概念と，これを数式的に明確に表示する状態方程式の扱い，さらにはこの内部構造を明らかにする回路網の概念が必要である．

さらに計算経済性を良くするために，状態方程式のサイズを縮小する方法を，単純な時間領域の重み付き残差積分から導いた．

システィマテックなモデリングを可能とするために，部分システムの状態方程式を連成する方法を論じた．これは，各々の部分から出力方程式を取り出し，これらを直和することにより，

媒介変数だけについての時間的漸化式を得ることによる方法である．多様な全体システムも，いくつかの典型的部分の組み合わせであることも多い．このようなとき，これらの部分モデルをデータベース化しておけば，全体のモデリングはこの接続だけですむことになる．

伝熱系のマクロな意味での時変性や非線型性に合理的に対応できるようにするために，回路網のモード変化の概念を定めた．

熱と湿気の相互影響を考慮したそれらの同時移動現象にも同様な状態方程式モデルがつくれる．従って時間積分も同様に行える．特に，このシステムの固有値の性質が，熱系だけの場合と同様であることの証明も行った．

暖冷房の熱負荷シミュレーションについても論じた．本研究での方法によれば，装置系にまで範囲を広げた系で，より総合的なモデル化とシミュレーションが可能である．しかし，除去熱量と若干の装置負荷を合せた，現状の熱負荷の意味で，このシミュレーション法を示した．これは除去熱量を1つの操作量としたときのフィードバック制御系シミュレーションとなる．

第4章　熱回路網の数値実験と検証

4.1　壁体伝熱における精度の検討

ここでは，これまで述べてきた熱回路網の計算法によって実際に計算を行い，その精度について考察する．一般に集中定数系の近似モデルを用いた場合，精度は空間的な離散化誤差と近似時間積分誤差に依存する．時間積分誤差は本論文の射影分解による解析的時間積分法によれば解消することはできるが，広く用いられている時間差分の誤差も把握しておく必要がある．空間的な離散化誤差は集中定数系モデルを用いる限り避けられないが，その離散化の粗さの程度や，検査体積法を用いるか有限要素法を用いるかの違いがどのように影響するかも重要である．

これらの意味での精度の検討をするためには基準となる精解が得られるような計算対象物でなければならないが，1次元伝熱多層壁体であれば，分布定数系としての解析解に近い精解を得ることができる．

表4-1　数値実験による精度の検討項目

	時間積分誤差	空間的離散化誤差	
方法	後退差分法	有限要素法	検査体積法
変量	Δtの大きさ	分割粗さ	

以上，精度についての数値実験による検討項目をまとめると表4-1のようになる．射影分解による解析的時間積分を行うことによって，集中定数系の精解を得ることができる．従って，これによって空間的離散化誤差の評価をする．集中定数化の方法はこのほかにも空間的な差分法があるが，本質的に検査体積法と同じである．近似的な時間積分法は非常に種類が多いが，第3章で述べたように，後退差分は無条件安定性により有用であり，多用されるので，代表として取り上げる．一般に時間差分の誤差は計算時間間隔Δtによって変化するから，この影響も見ることにする．

数値実験の験体とする壁の断面を図4-1に示す．壁体はタイル，モルタル，コンクリート，モルタルの4層から成るとする．各層の熱伝導率λ，容積比熱c_pは図中に示す．左側の表面での総合熱伝達率は20($kcal/hr\cdot m^2\cdot$°C)右側のそれは8($kcal/hr\cdot m^2\cdot$°C)とする．また各層の厚み(m)は図中に示す．この程度のコンクリートの厚みは壁体としては平均的なものである．

最初は，この伝熱系全てが0°Cとする．左側の空気温度に，0時刻を境にして，1°C上昇するステップ関数の温度変化を与える．右側の空気温度は常に0°Cとする．壁体伝熱系の温度状況を，両表面の通過熱流2つと，両表面温度2つに注目して計算する．特に，温度励振の作用する左側の表面通過熱流は吸熱応答，右側の表面の通過熱流は貫流応答と呼ばれる．

4.1.1 精解

これら2つの熱流の精解は4端子行列のL.A.Pipesのモデル[6]から得られる．1つの層についてその両側の表面温度と熱流の関係はラプラス変換によって像空間では単純な2×2のマトリクスで表される．層が接ぎ合わさって出来る全体の両側のそれらは，各々のマトリクスの積を用いて表される．この像空間の関数は実時間においては指数関数の無限級数になる．指数部分の係数となる根を求めるためにはコンピューターを用いたニュートン法などの数値計算を必要とする[17]．この根は絶対値の小さなものから順次求めていって，適当な大きさのものが得られたところで打ち切らなければならない．無限級数を実際的計算で扱うことはできないからである．解析解に近い精解と前述した理由はここにある．吸熱応答$q_{ua}(t)$と貫流応答$q_{ut}(t)$は次式で計算される．添字のuは単位関数の励振に対するものであることを意味する．

$$q_{ua}(t)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot e^{\alpha_i \cdot t} \tag{4-1}$$

$$q_{ut}(t)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot e^{\alpha_i \cdot t} \tag{4-2}$$

図4-1の試験体においては18項の有限項近似をした．各根と係数は次の表4-2に示す．

4.1.2 検査体積法と有限要素のモデル

まず検査体積法のモデルは分割の粗さによって次の図4-2のように6通り作成した．

ここにMCVMとはModel by Control Volume Methodを意味する．検査体積の区切りは△印で示す．n, n_0はそれぞれ未知数温度，既知数温度の節点数である．

有限要素法のモデルも分割の粗さによって図4-3のように4通り作成した．

有限要素法モデルは最も粗くても，最低は層の数の分だけの有限要素数が必要である．第2章で論じたように検査体積法と有限要素法の大きな違いは節点への熱容量の集中化の仕方である．このような1次元伝熱モデルでは，節点間の熱コンダクタンスについて，両方法による違いはない．また検査体積法のモデルにおいては両側の表面に節点を設けないが，節点間の伝熱は定常扱いであるから，それらの表面温度は逆算できる．

以上，いずれのモデル化の手法によっても結局は第2章で述べたように状態方程式の数学モデルとなる．この時間積分を行うために用いるのは第3章の(3-57)の漸化式で計算される射影分解による解析的時間積分法と，(3-88)の漸化式で計算される後退差分法である．前者の計算においては，まず固有値解析をするが，各々のモデルについての固有値を表4-3と表4-4に示す．

絶対値の小さな方の固有値はいずれのモデルにおいても同程度の大きさを持つ．計算結果に最も大きな影響を及ぼすのはこれらの固有値である．逆に大きな方の固有値は比較的高周波の入力成分によってはじめて結果に影響を及ぼすものと考えられる．検査体積法と有限要素法のモデルの固有値を同じ個数のものどおしで比較する．例えばMCVM06(n=6)とMFEM06(n=6)を比べると絶対値の大きな固有値を持つのはMFEM06(n=6)の方である．またその絶対値の大きさが小さなものから大きなものまで範囲が広いのもMFEM06(n=6)の方である．この傾向は他のモ

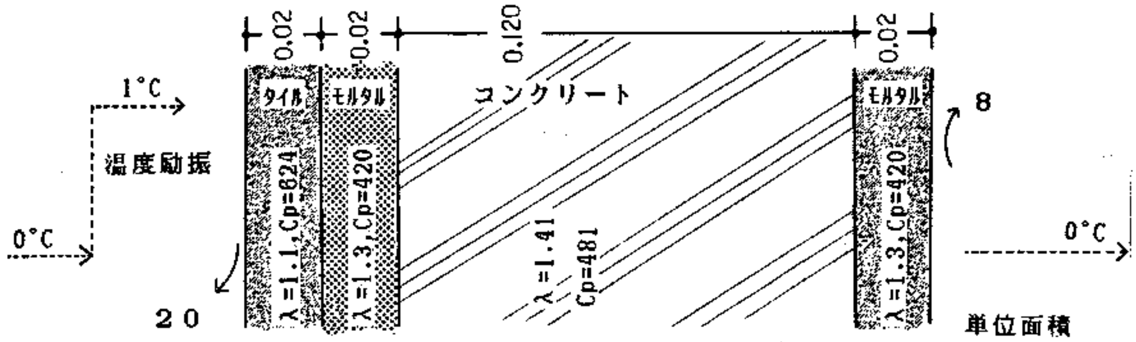


図4-1　壁の試験体

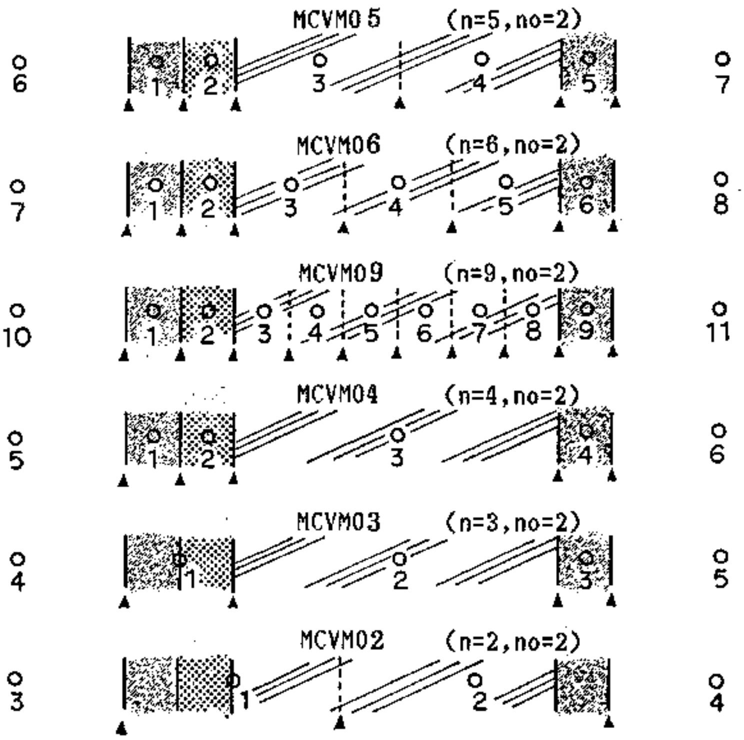


図4-2　検査体積法モデル

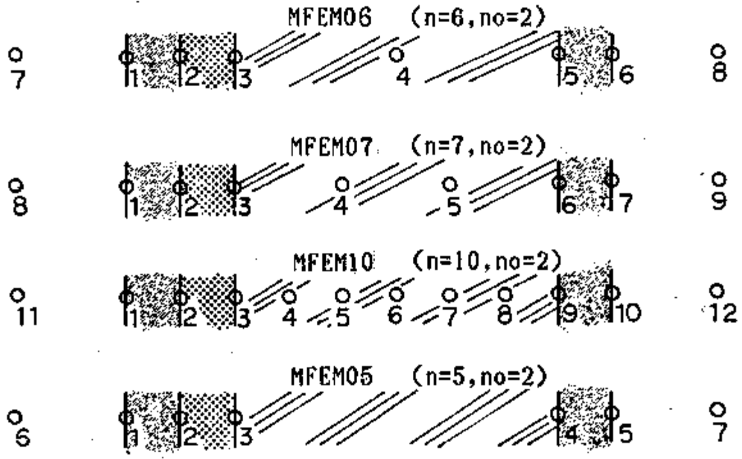


図4-3　有限要素法モデル

表4-2　精解の級数

i	α_i	a_i	b_i
1	0	3.235720	3.235720
2	−0.222327	7.012840	−4.498580
3	−1.408150	4.016680	1.809410
4	−4.011040	2.020710	−0.821219
5	−8.187000	0.946502	0.424417
6	−14.236800	0.490760	−0.245627
7	−22.082500	0.350464	0.167520
8	−31.301400	0.304266	−0.126403
9	−41.882100	0.235958	0.093832
10	−54.501300	0.163360	−0.067737
11	−69.206300	0.126070	0.051728
12	−85.416100	0.105152	−0.042022
13	−103.243000	0.0810106	0.034466
14	−123.242000	0.0633472	−0.029135
15	−144.946000	0.0599034	0.026660
16	−167.304000	0.0615931	−0.024955
17	−190.630000	0.0523071	0.021579
18	−216.590000	0.0387123	−0.017426

表4-3 検査体積法モデルの固有値

MCVM02		MCVM04		MCVM06	
1	−0.19944	1	−0.19440	1	−0.21893
2	−0.95546	2	−1.9028	2	−1.3561
		3	−3.5624	3	−3.5744
		4	−13.889	4	−5.8904
				5	−9.2753
				6	−16.769

MCVM03		MCVM05		MCVM09	
1	−0.19301	1	−0.21492	1	−0.22135
2	−1.6874	2	−1.3184	2	−1.3735
3	−3.5589	3	−3.3304	3	−3.7485
		4	−6.2197	4	−7.2641
		5	−15.277	5	−11.877
				6	−17.012
				7	−21.868
				8	−25.807
				9	−28.400

表4-4 有限要素法モデルの固有値

MFEM05		MFEM07			
1	−0.23911	1	−0.22425		
2	−1.5120	2	−1.4635		
3	−8.6893	3	−4.4806		
4	−34.622	4	−10.437		
5	−48.556	5	−19.164		
		6	−48.999		
		7	−53.460		

MFEM06		MFEM10			
1	−0.22647	1	−0.22286		
2	−1.5038	2	−1.4340		
3	−4.7015	3	−4.2313		
4	−12.634	4	−9.0878		
5	−41.340	5	−16.856		
6	−50.599	6	−28.093		
		7	−42.280		
		8	−58.703		
		9	−76.126		
		10	−87.982		

デルでも一般的に見られる．このことから，有限要素モデルの方が，高い周波数の入力に対して応答が良いことがうかがえる．これらの性質は後で数値実験によって確認する．ただし表面温度を算出するために，検査体積法においては節点が表面にないから，節点間は定常扱いによりこれを逆算する．

4.1.3 空間的離散化誤差

空間的な分割の粗さによる誤差の検討をする．用いるモデルは本論文での主体である検査体積法のモデルとし，分割粗さによって，図4-2に示すMCVM05($n=5$)~MCVM02($n=2$)の6つとする．これらは節点数$n=2$~9である．時間積分についての誤差があってはならないから，第3章で述べた射影分解による解析的積分のうち，ステップ入力に対する漸化式(3-57)式を用いる．このΔtはいくらで計算しても，その計算する時点では正確な値を出すが，Δtの途中の変化もなるべく詳しく見るために$\Delta t=0.1hr$とする．

計算結果のグラフは全てのモデルを同時に描くと見にくいため，2つのグループに分けて示す．1つは，精解，MCVM05($n=5$), MCVM06($n=6$)とMCVM09($n=9$)のグループであり，もう1つは，精解，MCVM09($n=9$), MCVM04($n=4$), MCVM03($n=3$)，とMCVM02($n=2$)である．前者のグループは図4-4から図4-7までである．それぞれ吸熱応答，貫流応答，吸熱側表面温度，貫流側表面温度を示す．横軸は時間をとり24時間まで計算した．吸熱応答については，0時近くでは$20kcal/m^2\cdot hr$ほどあり，これをたて軸の最大にすると後の時間帯での相対的な差異が小さくなってわかりにくくなるために，その最大値を$6.5kcal/m^2hr$程度におさえた．従って，初期の時間帯でこれを越える結果については省略した．ただし，この時間帯での本質的な挙動は，同じく吸熱側の表面温度のグラフを参照することによって判断することができる．次に後者のグループについては同様に図4-8から図4-11に示す．

空間的な分割粗さによる結果の違いを以上の全てのグラフ，図4-4から図4-11について見てみると，明らかな1つの特徴を読み取ることができる．それは未知数の節点数$n=5$~9のものと$n=2$~4のものの大きな差異である．前者の分割粗さであれば，ほとんど精解に一致している．ところが後者の分割数になると急に精解との違いが目立ちはじめる．しかし，この精解との違いも最も大きなところで約5%である．そして$n=5$~9と$n=2$~4の2つの分割の種類それぞれの中での違いは顕著ではない．これらのことから次のようなことが言える．コンクリートのような比較的に熱容量のある材質の場合，$5cm$程度の厚みを検査体積とすれば十分である．これ以上細かく分割しても単位応答に関しては，あまり精度の向上は望めない．もし$10cm$程度の厚みの検査体積にすれば誤差は最大で約5%になる．その他の材質のものについては熱拡散率に比例して厚く分割できると考えられる．

4.1.4 近似時間積分誤差

ここでは前に検討した空間的離散化誤差が十分に無視できるMCVM09($n=9$)のモデルを用いて後退時間差分の誤差を検討する．

まず$\Delta t=1.0hr$で，射影分解による解析的時間差分法と後退差分の近似時間積分の計算を行い，精解と比較する．結果は図4-12から図4-15に示す．それぞれ吸熱応答，貫流応答，吸熱側表面温

度と貫流側表面温度の変化を表す．精解以外は，計算された1時間毎の点を直線で結んでいる．吸熱応答の初期において線が不規則なのはこのためである．

これらの結果により次のことがわかる．射影分解による解析的時間積分法は，例え$\Delta t=1.0hr$で計算しても，精解に一致している．これに対し後退差分の時間積分は最大で約5%の誤差を持つ．また後退差分法は，吸熱側で表面温度の立上りが遅く，貫流側のそれも初期の2時間ほどを除いては立上りが遅い．

次に後退差分についてΔtを0.1, 0.5, 1.0と変えた場合の誤差の変化を見る．これらは精解とともに図4-16から図4-19に表す．これらからΔtを短くするにつれて誤差は減少し，$\Delta t=0.1$で最大で約0.5%となることがわかる．

4.1.5　検査体積法と有限要素法の比較

2つの集中定数化法が計算結果にどのような違いをもたらすかを調べる．両者を比較するためには分割粗さは同程度でなければならない．これは文字どおり，検査体積の個数と有限要素の個数を一致させる方法と，固有値の個数を同じにするために，未知数温度の節点数を一致させる方法の2通りが考えられる．

まず後者の考え方の場合として，節点数$n=5$のモデルをとりあげる．これらは検査体積法ではMCVM05($n=5$)であり，有限要素法ではMFEM05($n=5$)である．前と同様にステップ関数の温度励振に対する応答を，両表面の熱流は省略し，両表面温度だけのグラフで示す．これらは図4-20と図4-21である．時間積分法は射影分解による解析的方法であり，$\Delta t=0.1$にとった．図4-20の励振側表面温度については，$1.5hr$経過付近の約1%の違いを除けば，ほぼ両者の結果は一致している．図4-21の貫流側表面温度の違いはこれよりもやや大きくなる．どちらもほんのわずか検査体積法によるものの方が精解に近い．

次に分割の個数を一致させた場合について図4-22と図4-23に示す．これらのグラフでは参考のため，後退差分をとった場合についても合せて描いた．全て$\Delta t=1.0hr$である．まず解析的時間積分によるものだけを比較する．プロットはほとんど重なってしまって判別しにくいほど一致しているが，図4-23の貫流側表面温度について10時間経過後付近について見れば，ほんのわずか有限要素によるものの方が精解に近い．後退差分を適用したものは，いずれのモデルも同程度に精解からはずれている．すなわち，時間差分化誤差は，どのようなモデル化法をとったかによる差などよりも，はるかに大きい．

2つのモデルの固有値の違いについては，表4-3と表4-4に示した．このことは計算結果に高周波数領域で比較的に大きな影響を及ぼすと考えられる．建物の伝熱計算では24時間周期程度の入力を扱うが，その場合はその違いが顕著ではない．そこで1時間，あるいは2時間周期の比較的に高周波の励振を与えて調べる．この周期関数は最も単純な正弦波とし，振幅は1°Cとする．なお，このような励振に対しての精解も単位応答の指数関数級数(4-1), (4-2)式をもとにして得られる．すなわち，これらの応答を時間微分して重み関数を計算し，正弦波の励振と重畳積分する．ただし，実際には，この重畳積分と等価な，単位応答と励振の時間微分の重畳積分を計算して精解とした．検査体積法モデルについてはMCVM06($n=6$)，有限要素モデルはMFEM06($n=6$)を用

いた．いずれについても$\Delta t=0.01$で，第3章で述べた入力の直線補間に対する射影分解による漸化式(3-54)で時間積分した．

結果は図4-24から図4-27に示す．これらは24時間経過後の十分に周期定常に達した部分である．相対的な違いは励振側の表面温度よりも貫流側において表われている．図4-25を見ると，精解は両者の間にあり，振幅は検査体積法モデルの方が精解に近いが，位相については有限要素法モデルの方が精解に近い．固有値の大きさから検査体積モデルは位相遅れが大きいであろうことはあらかじめ予想できるものである．次に2時間周期の結果の図4-27を見ると，やはりこれらの傾向は同様であることがわかる．やはり有限要素モデルは貫流側について過剰に応答し，精解からのズレが比較的に大きい．しかし逆に励振側について見ると，有限要素モデルの方が精解に近い．検査体積モデルの励振側の応答はこれに比べて遅い傾向を示す．

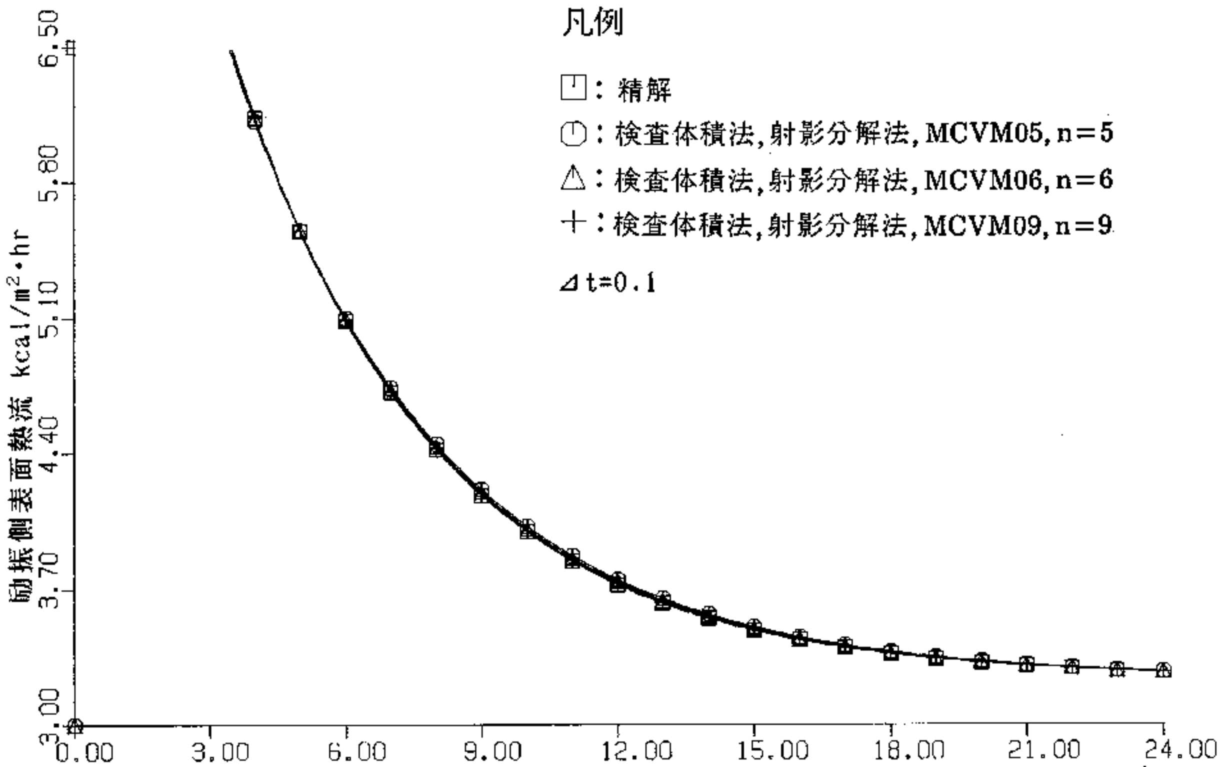


図4-4　吸熱応答・離散化誤差

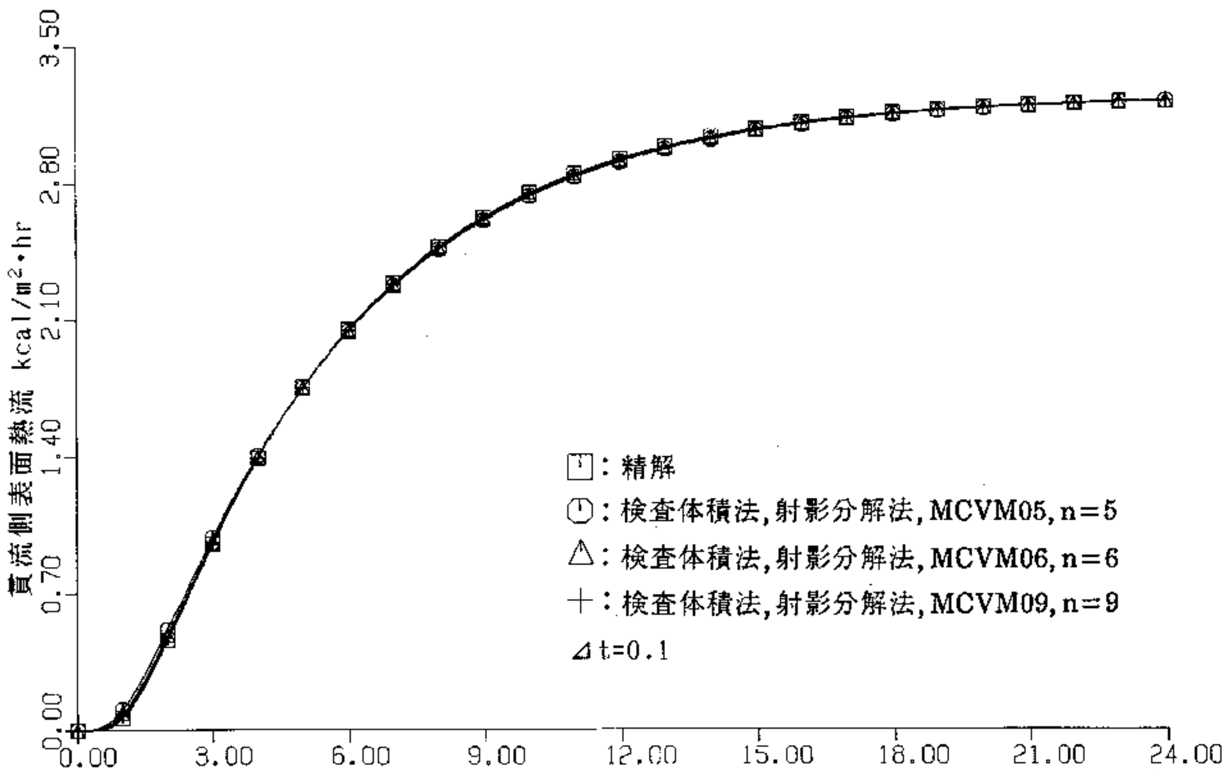


図4-5　貫流応答・離散化誤差

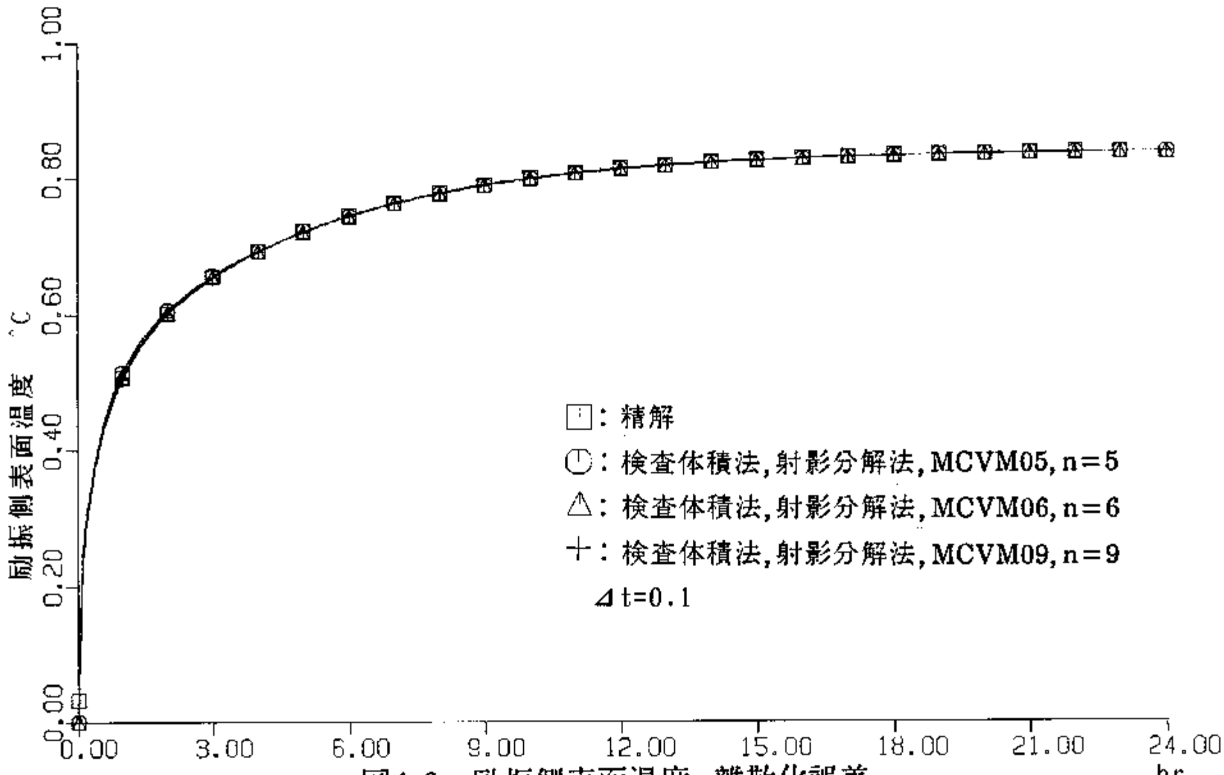


図4-6　励振側表面温度・離散化誤差

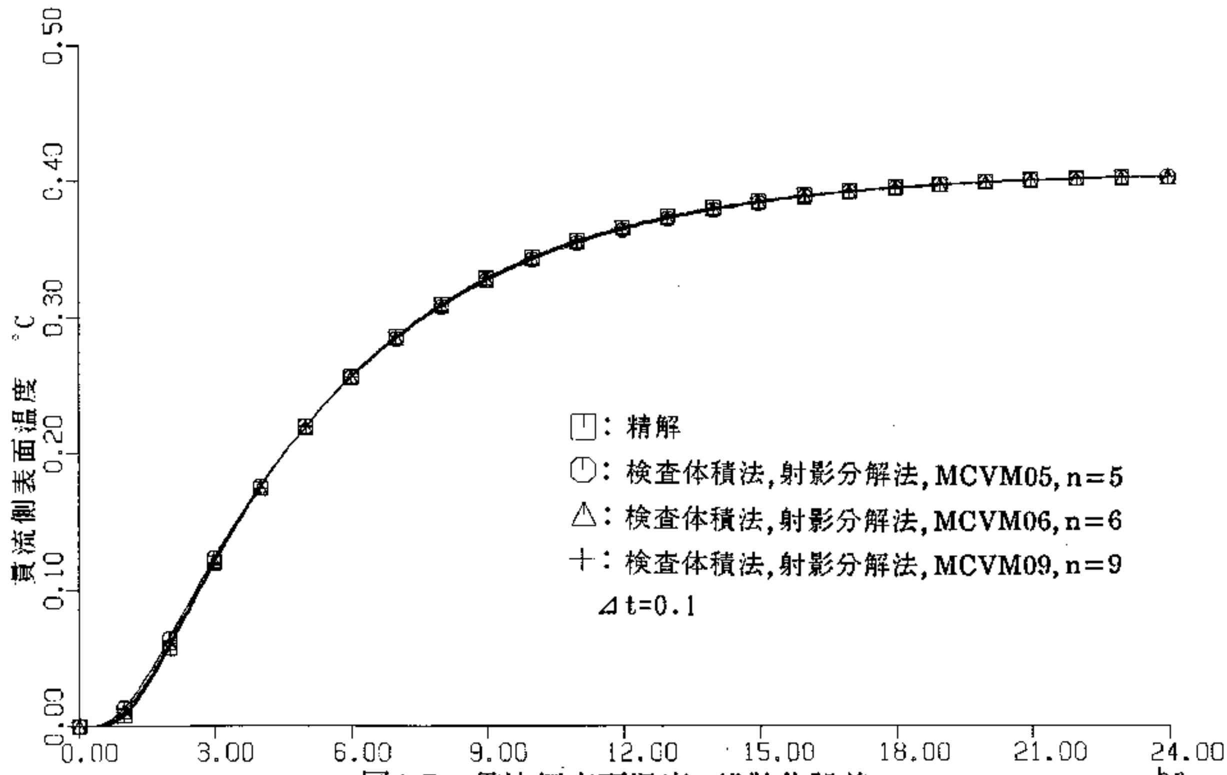


図4-7　貫流側表面温度・離散化誤差

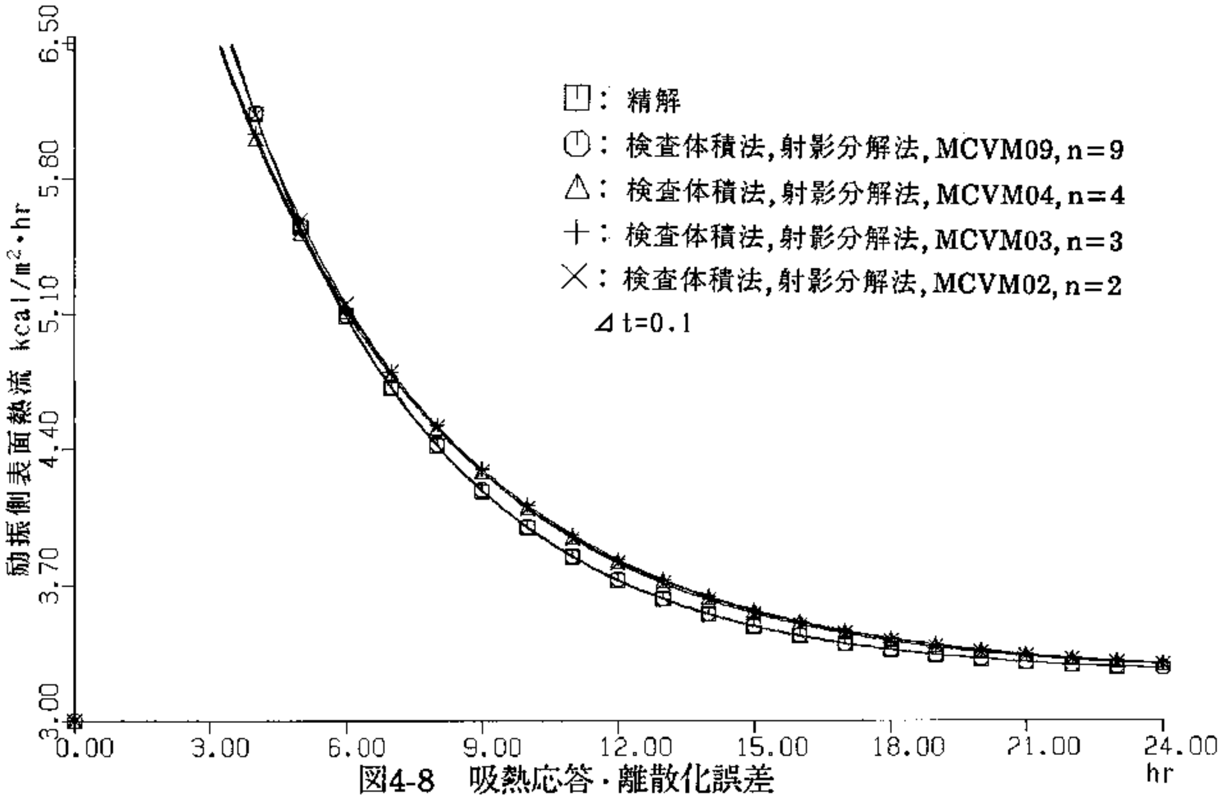


図4-8　吸熱応答・離散化誤差

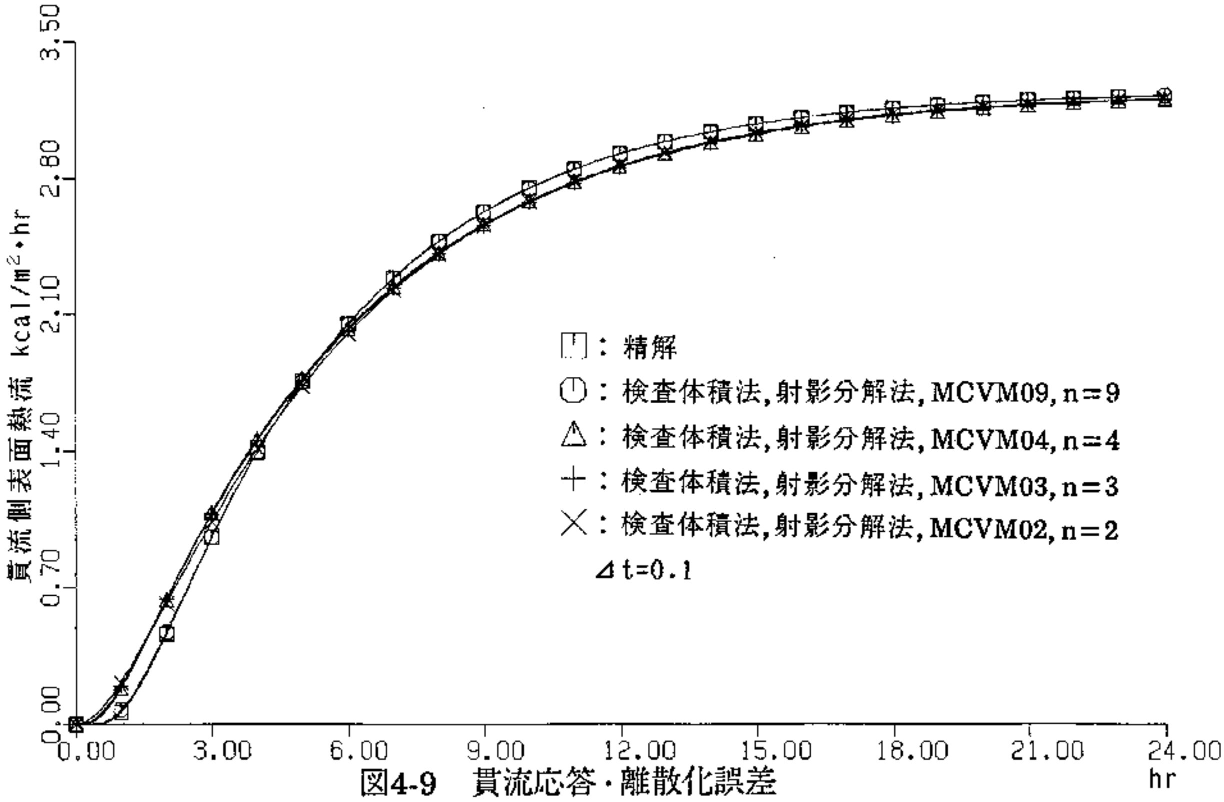


図4-9　貫流応答・離散化誤差

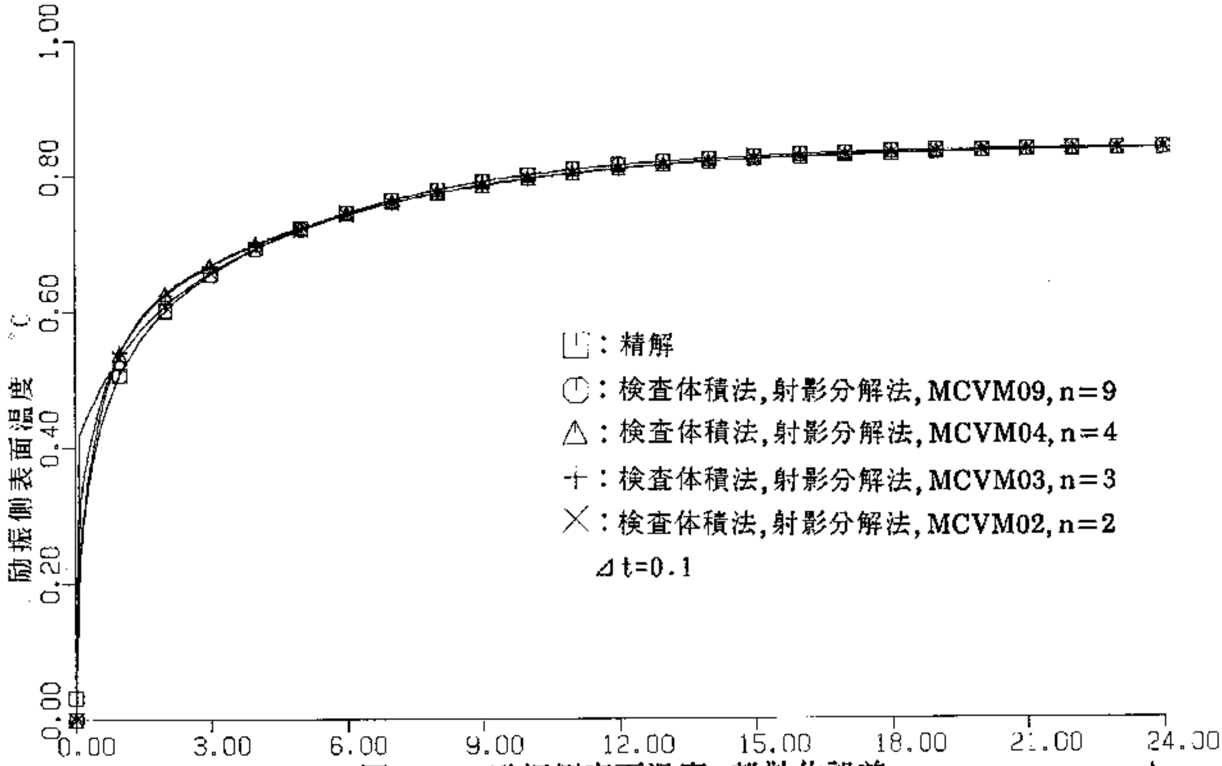


図4-10　励振側表面温度・離散化誤差

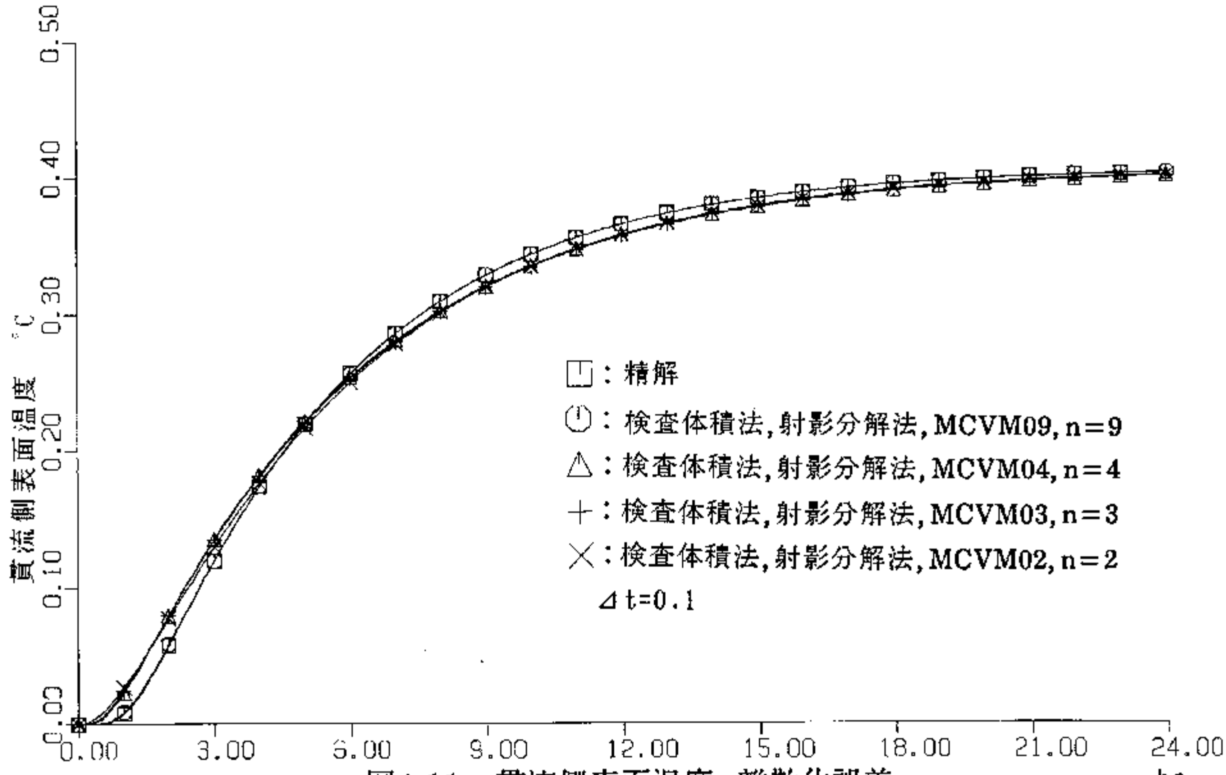


図4-11　貫流側表面温度・離散化誤差

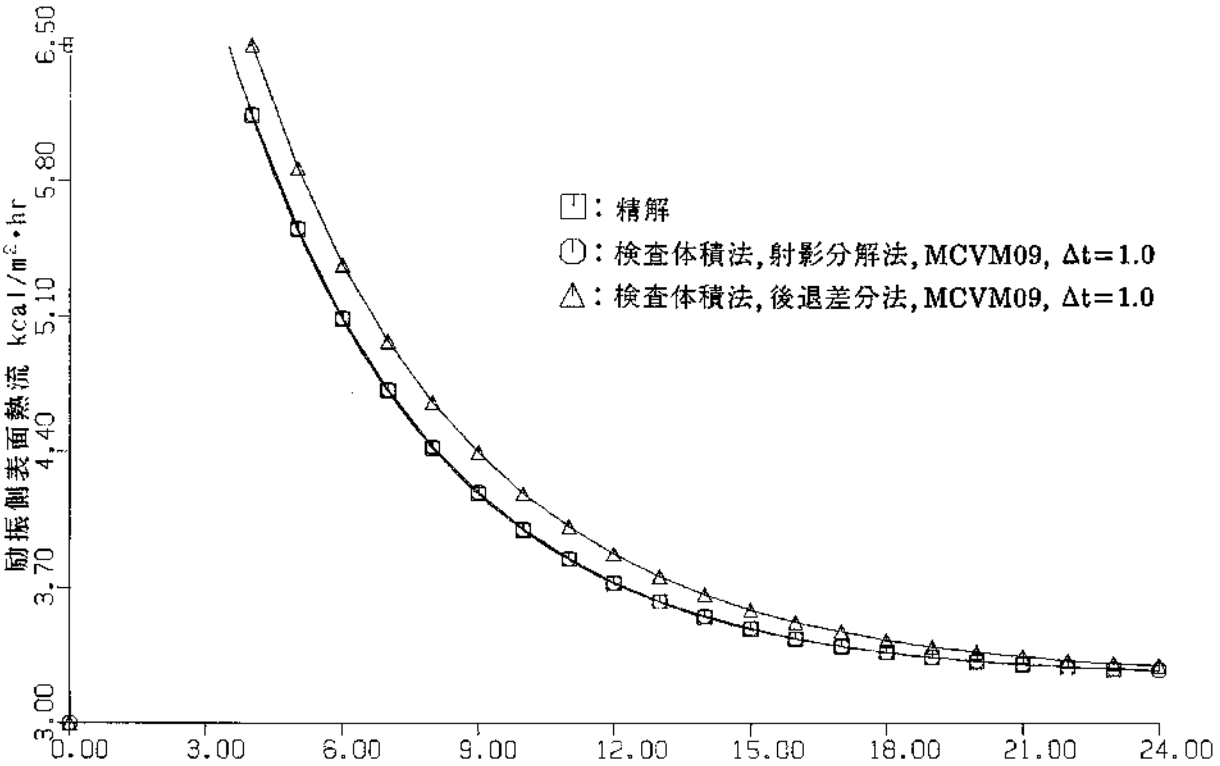


図4-12　吸熱応答・時間差分法誤差

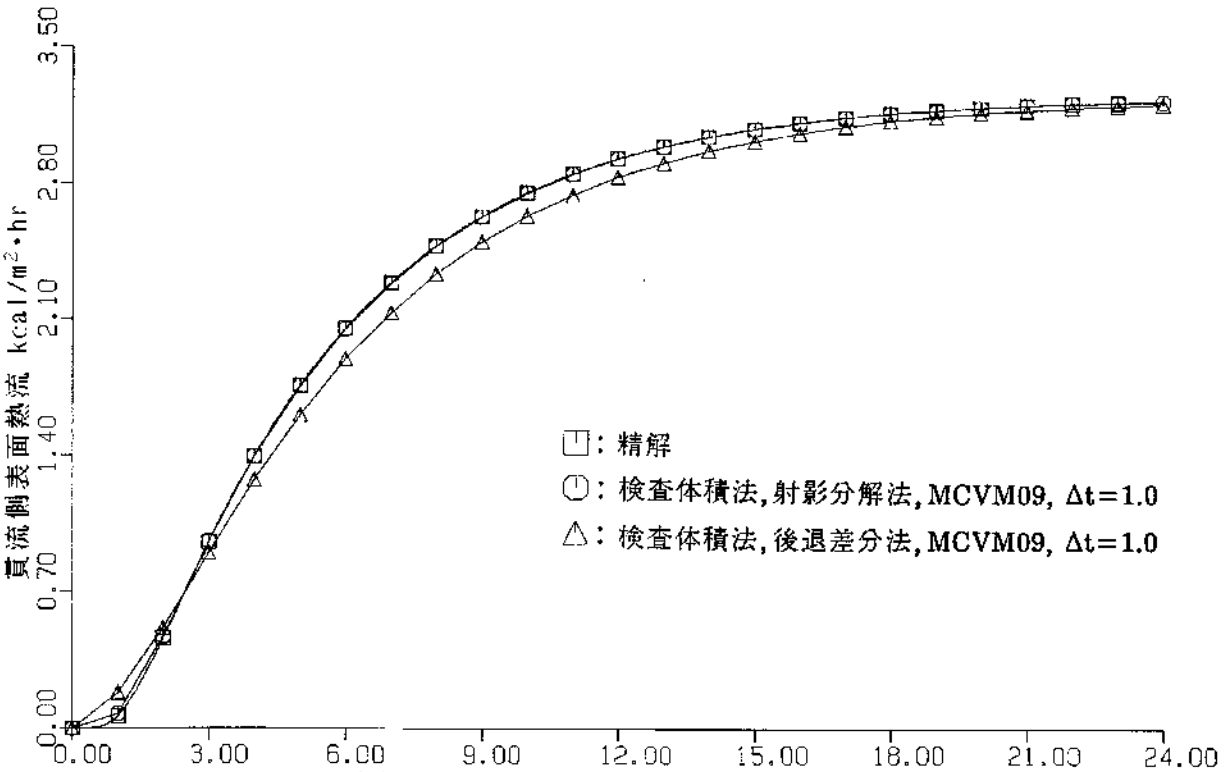


図4-13　貫流応答・時間差分誤差

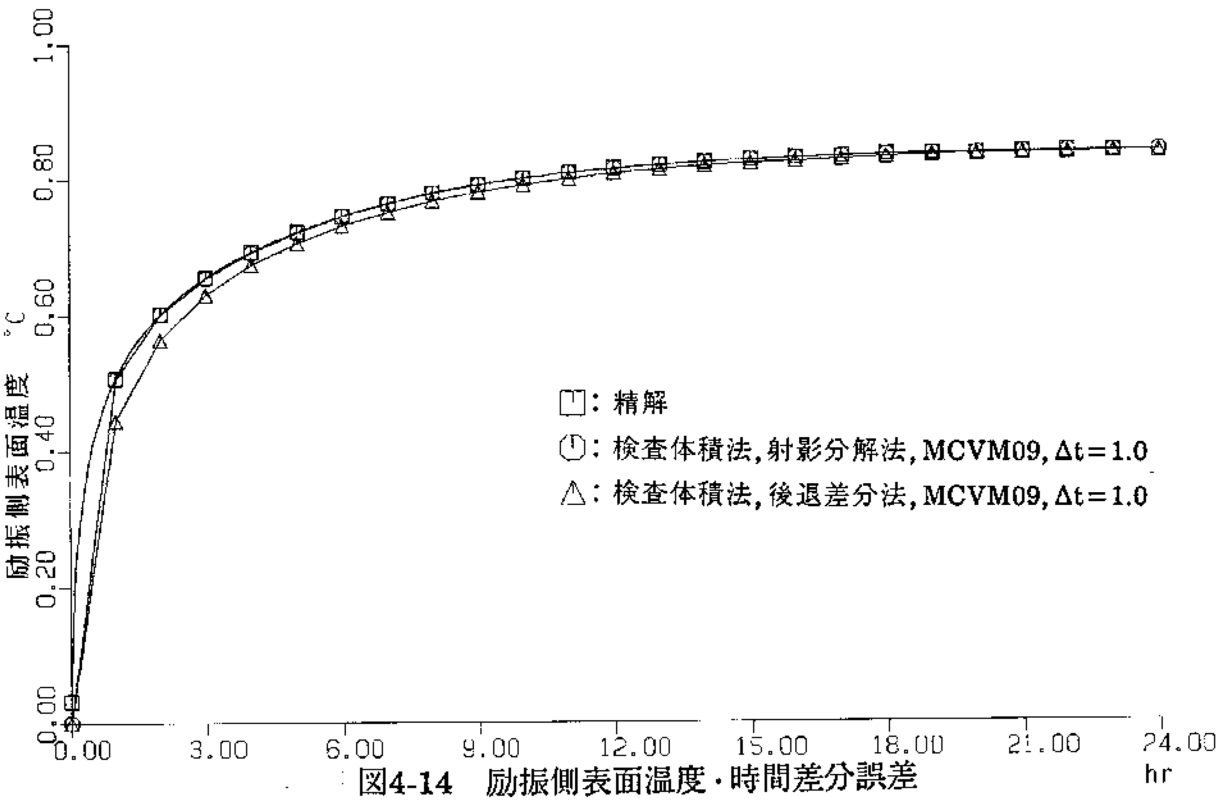


図4-14　励振側表面温度・時間差分誤差

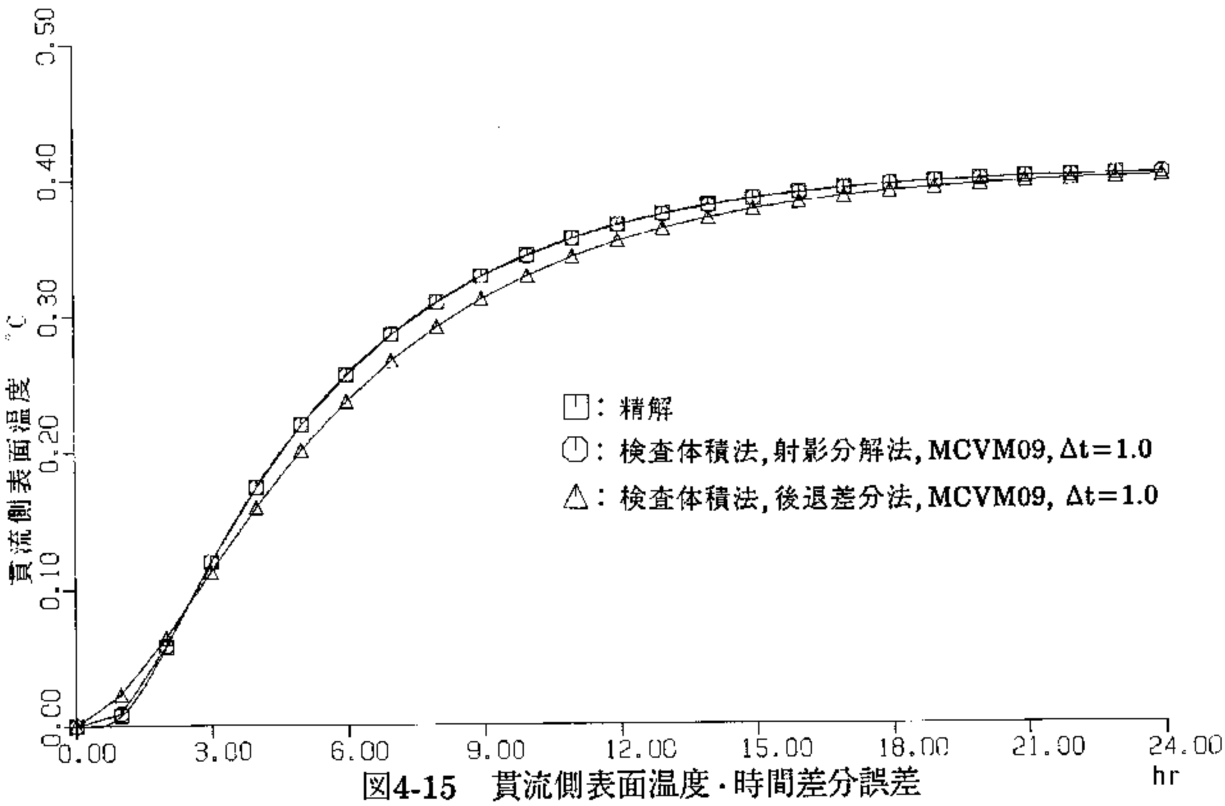


図4-15　貫流側表面温度・時間差分誤差

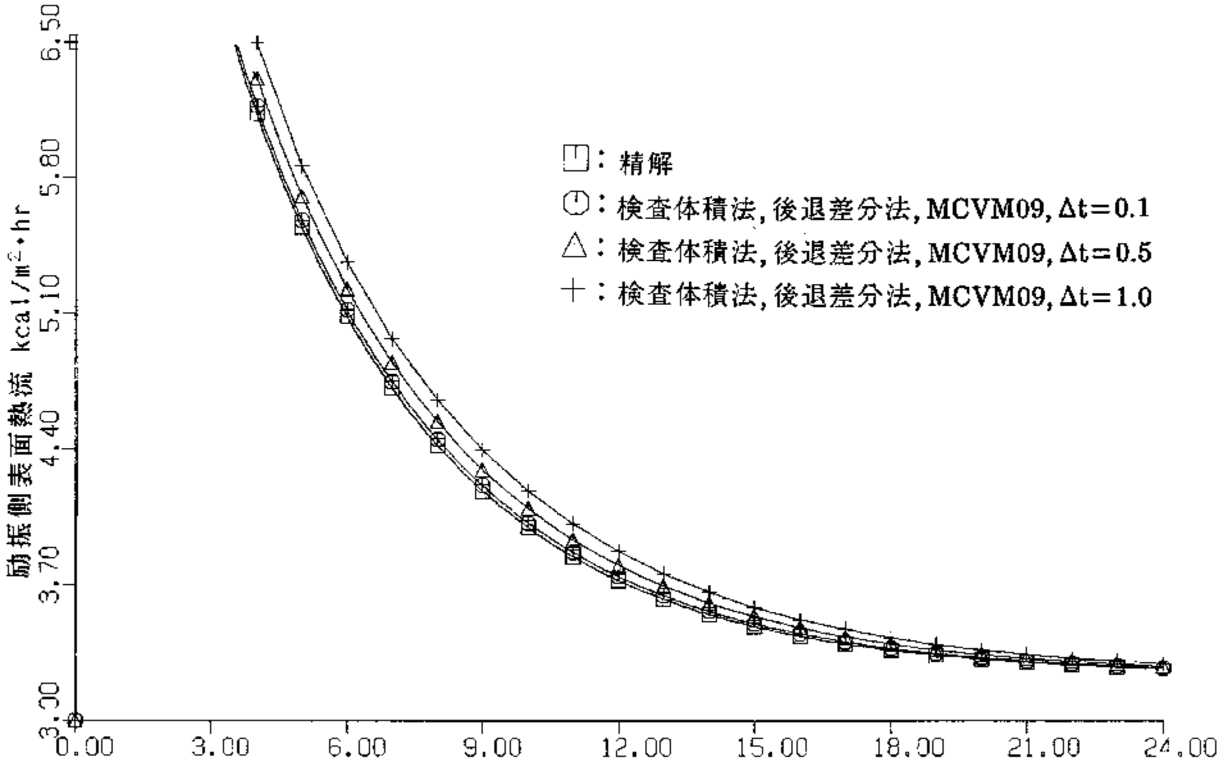


図4-16　吸熱応答・時間差分法誤差

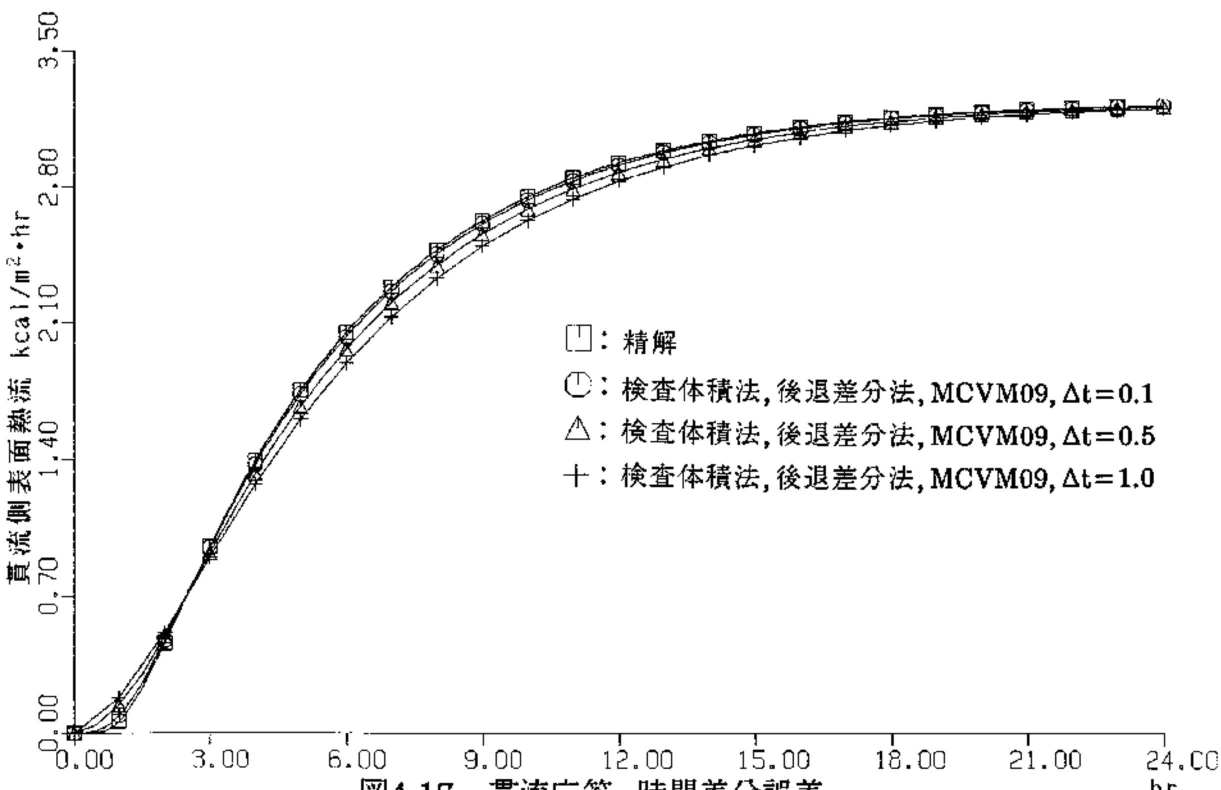


図4-17　貫流応答・時間差分誤差

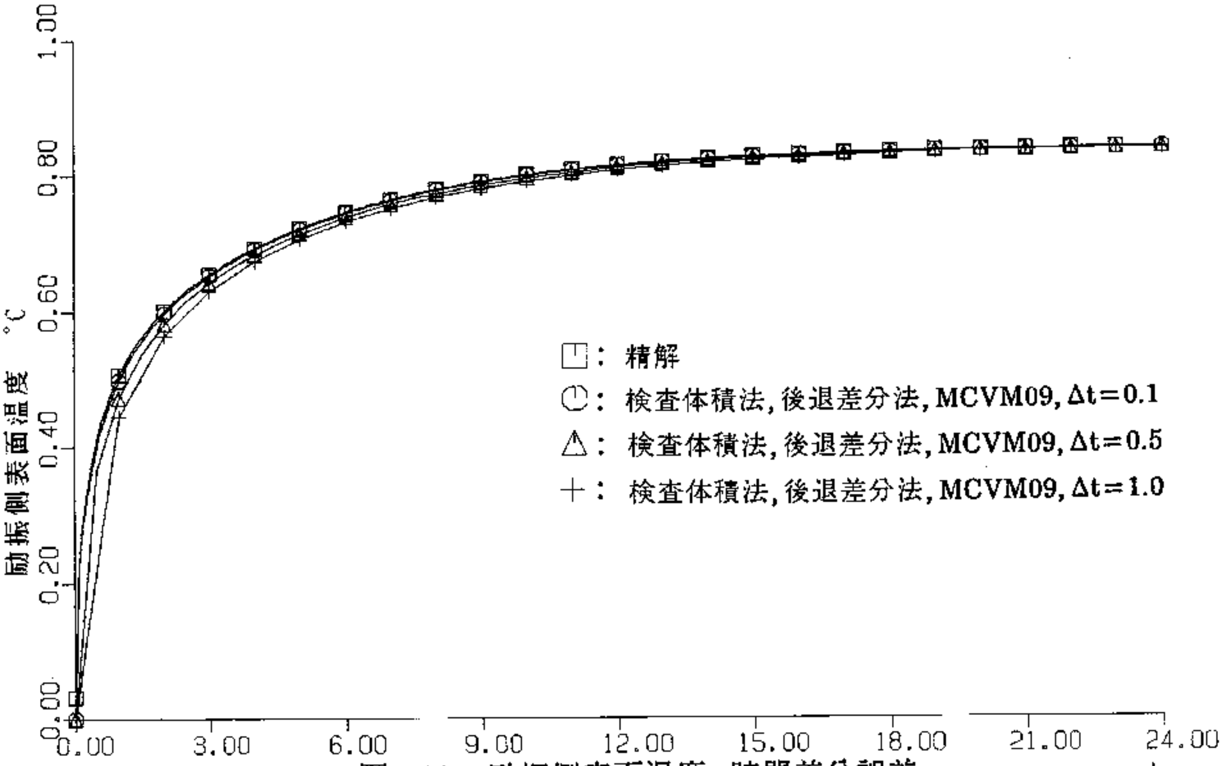


図4-18　励振側表面温度・時間差分誤差

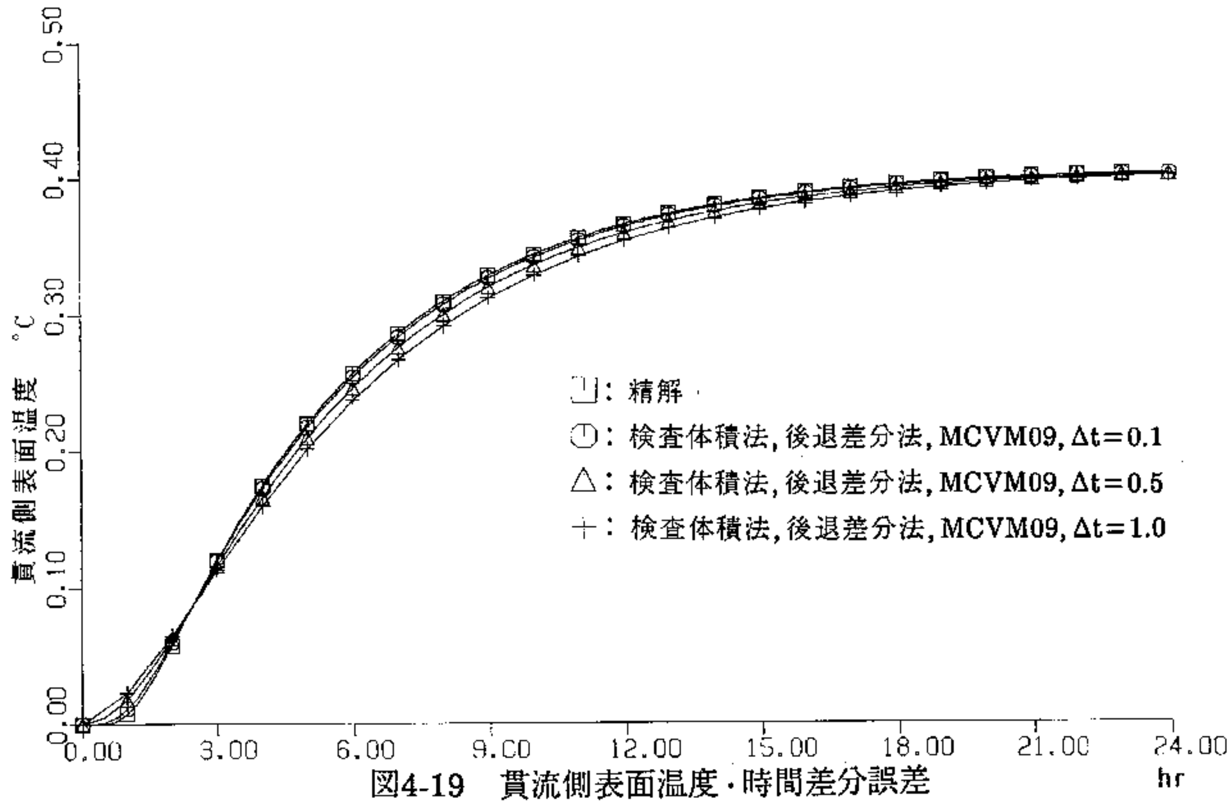


図4-19　貫流側表面温度・時間差分誤差

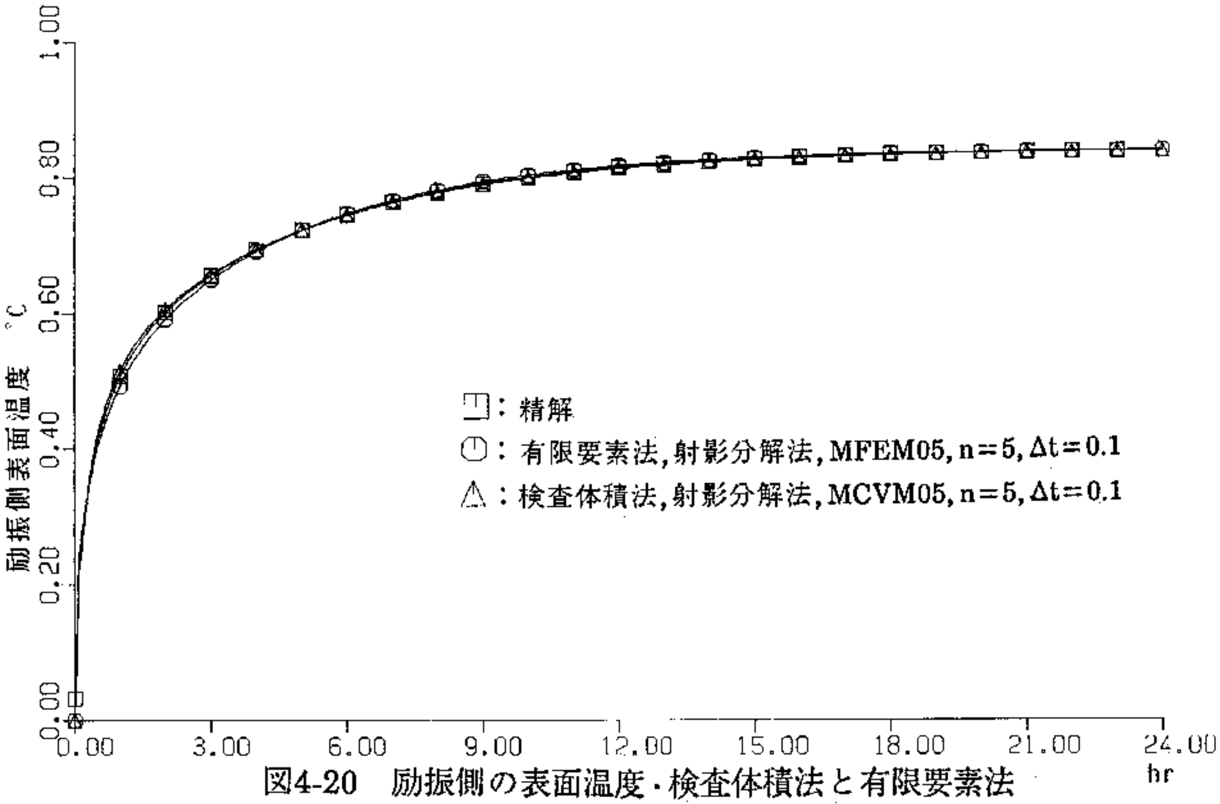


図4-20　励振側の表面温度・検査体積法と有限要素法

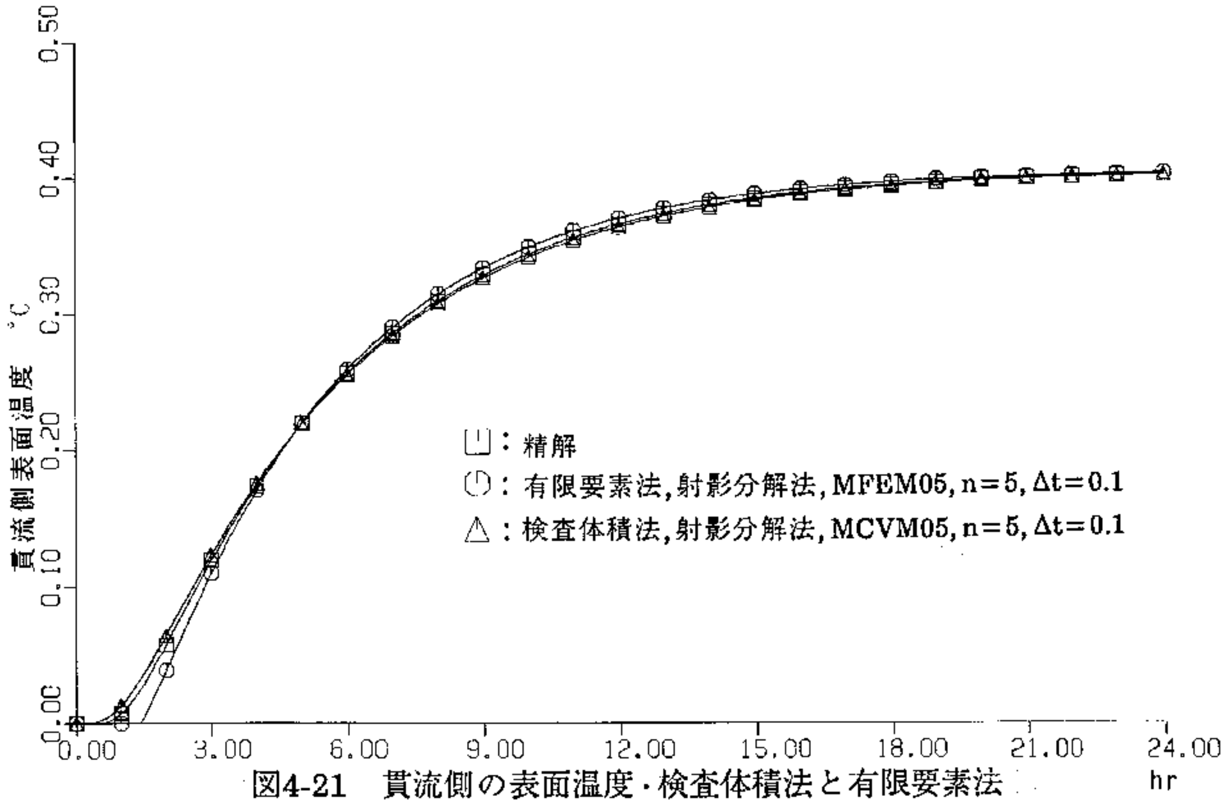


図4-21　貫流側の表面温度・検査体積法と有限要素法

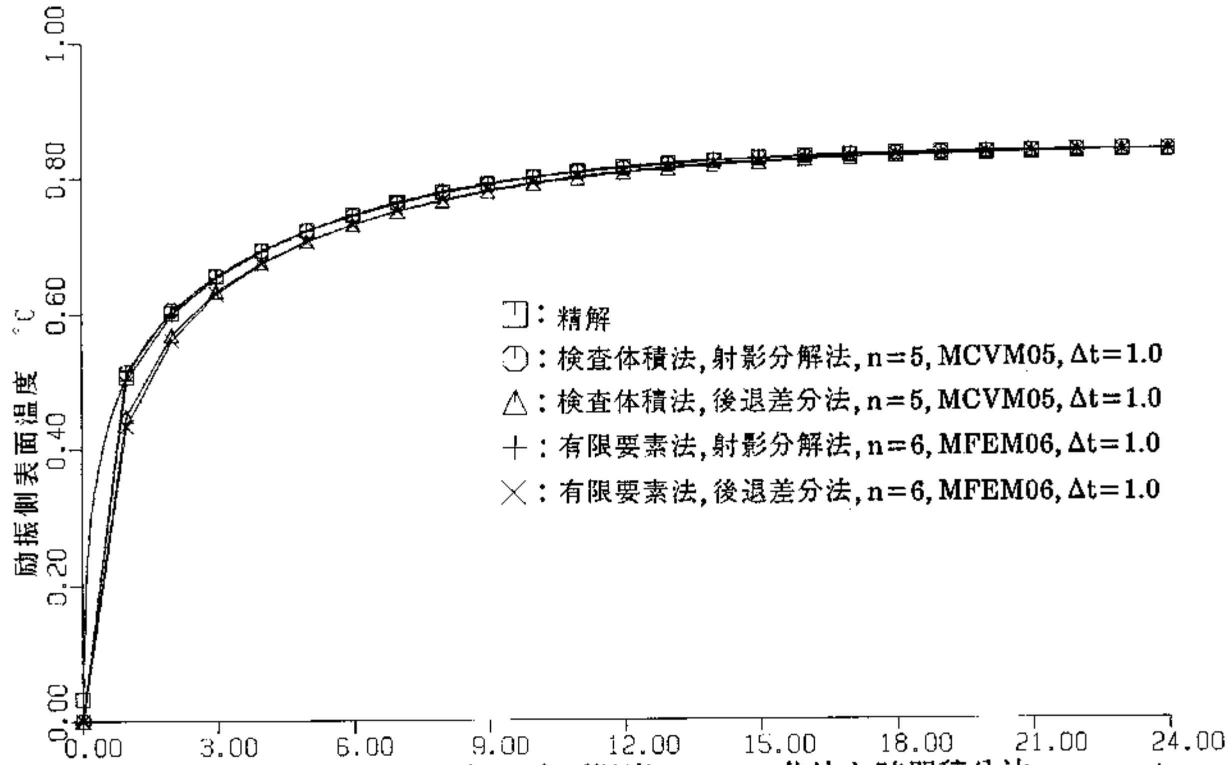


図4-22　励振側の表面温度・モデル化法と時間積分法

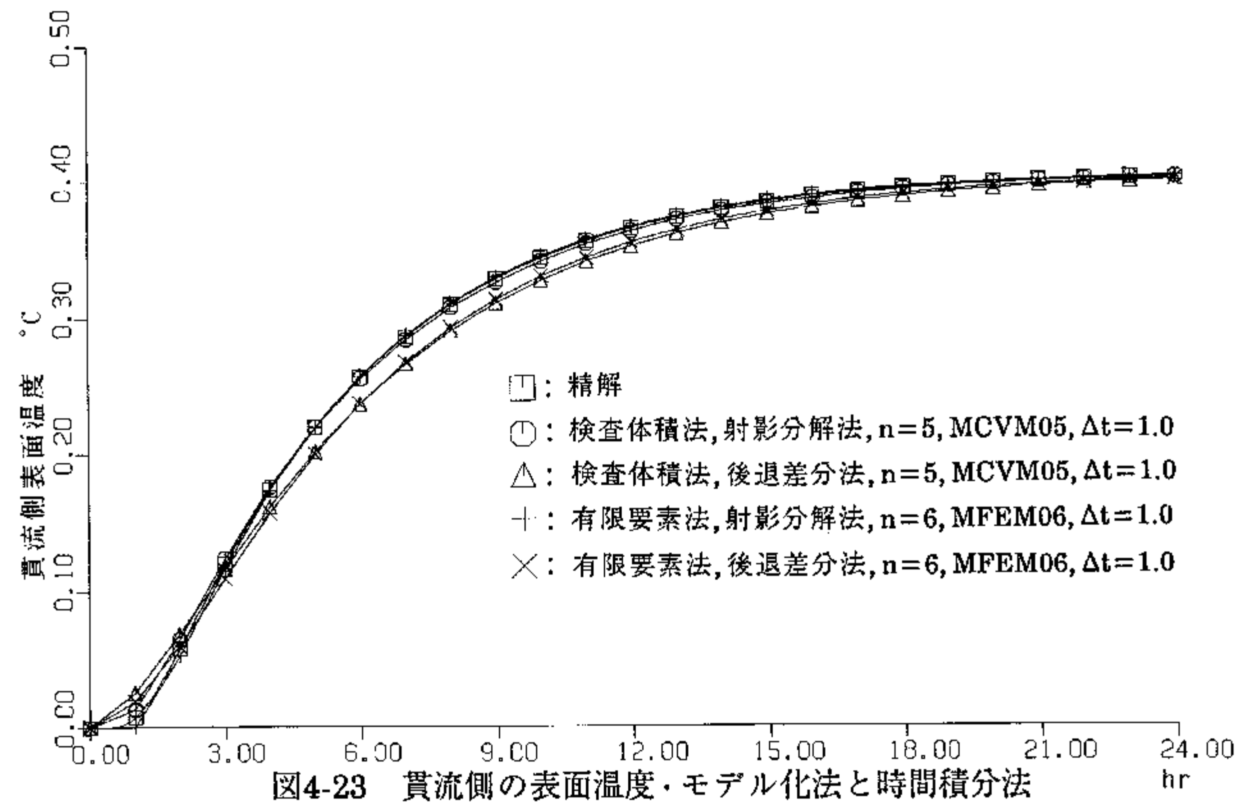


図4-23　貫流側の表面温度・モデル化法と時間積分法

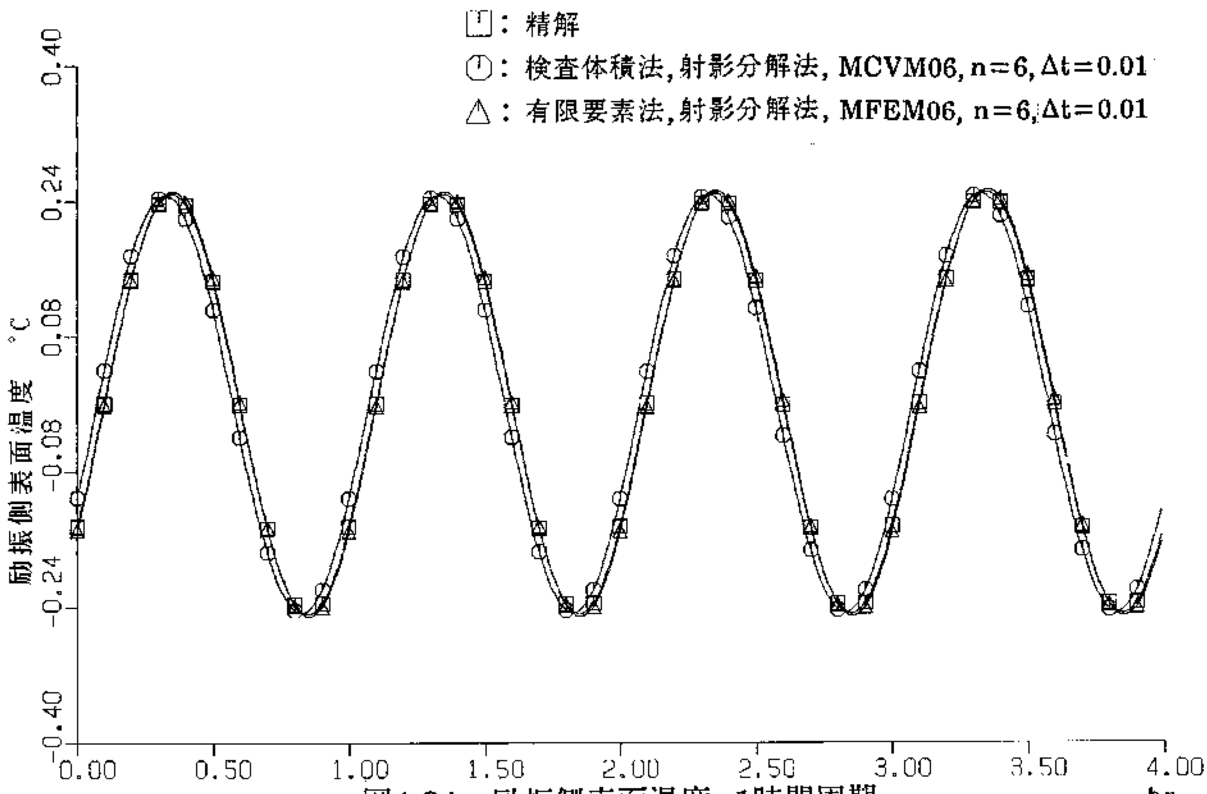


図4-24　励振側表面温度・1時間周期

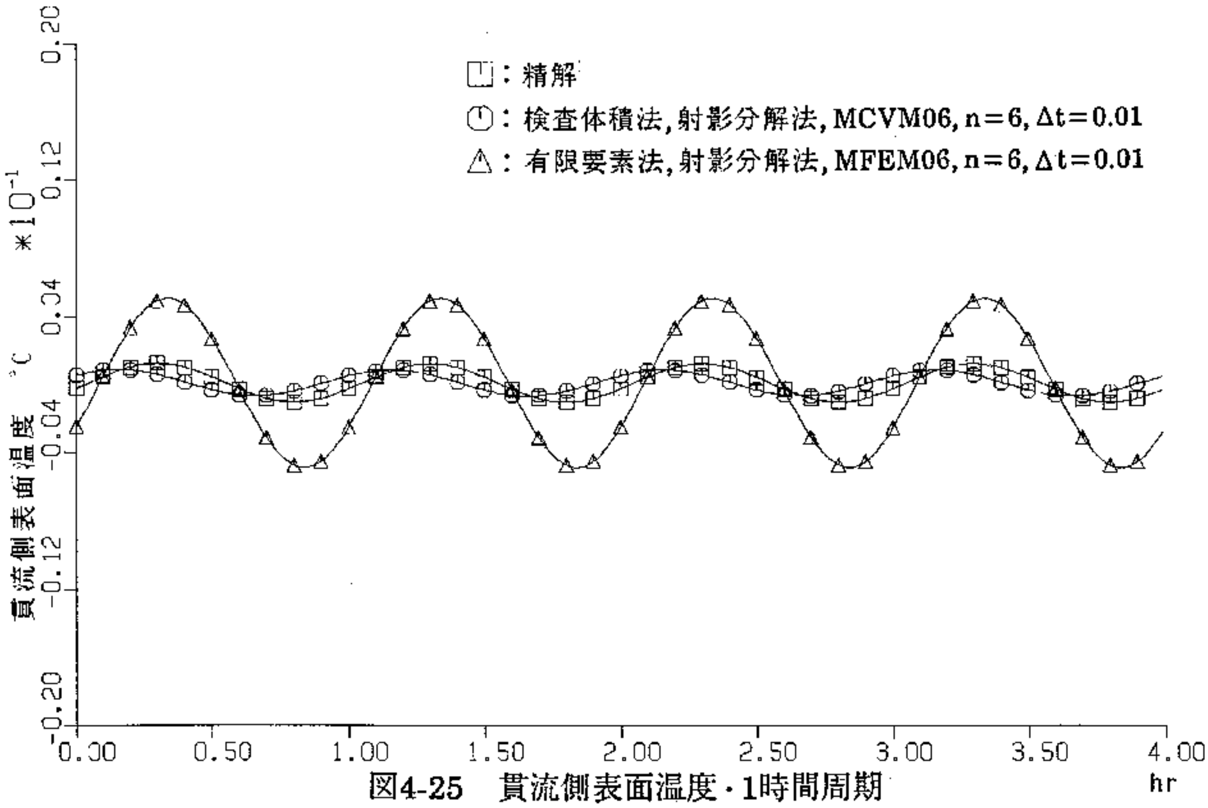


図4-25　貫流側表面温度・1時間周期

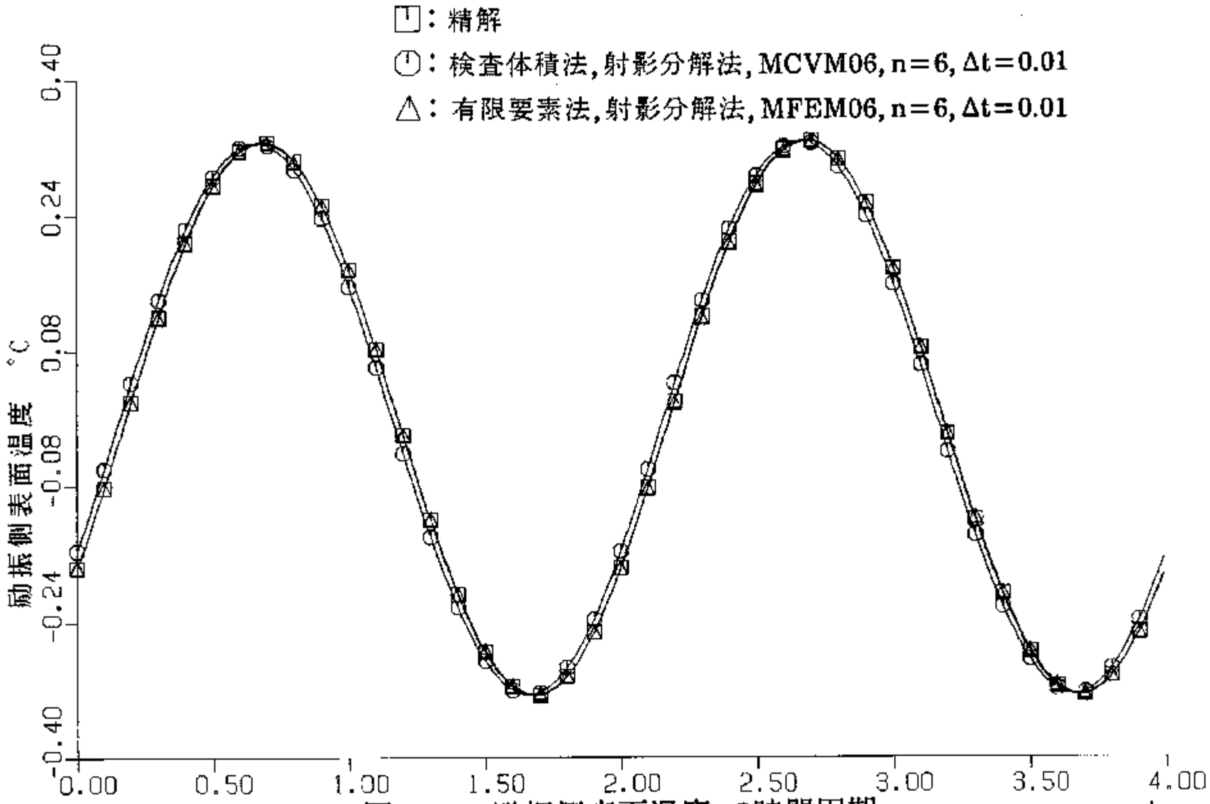


図4-26　励振側表面温度・2時間周期

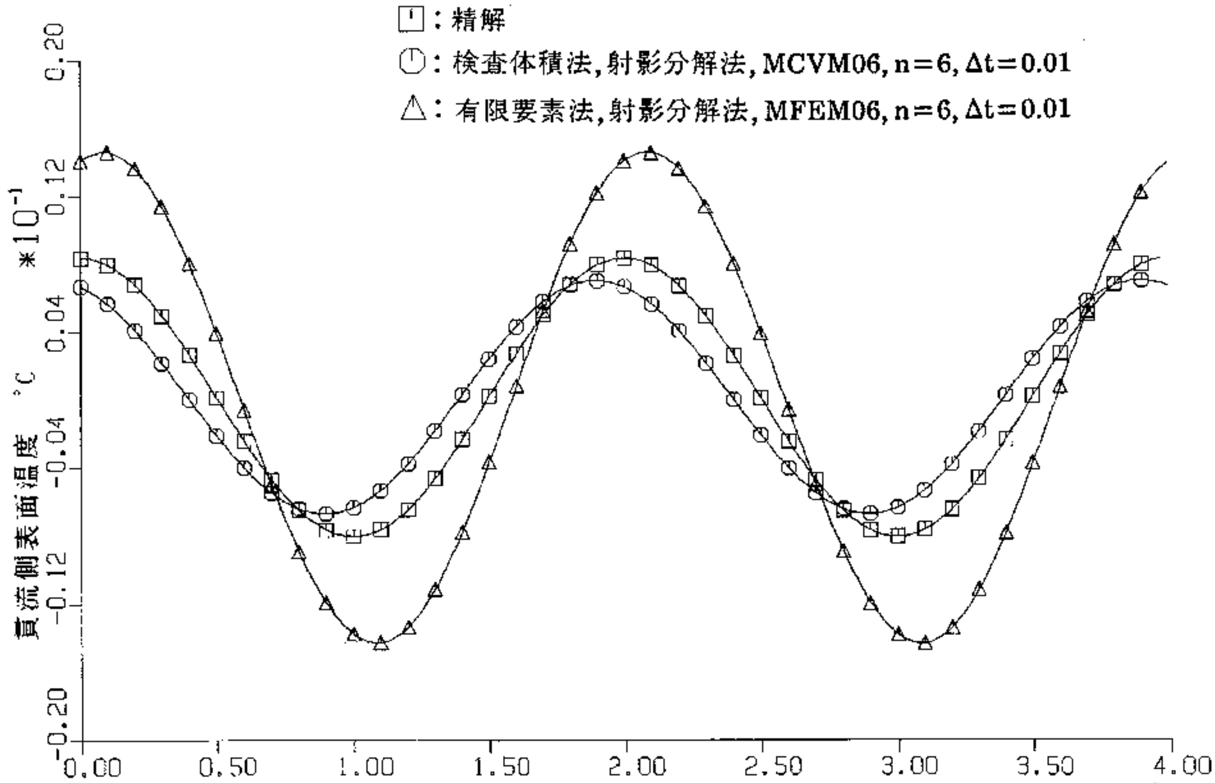


図4-27　貫流側表面温度・2時間周期

4.2　太陽熱集熱器での検証

空気熱媒の太陽熱集熱器について実測を行った結果と，熱回路網モデルによる予測計算の結果を比較した．このような伝熱系は物質移動や輻射による種々の伝熱形態を含むので，総合的なモデル化を特徴とする本手法の検証には適当である．

図4-28には集熱器の外観を示す．図4-29には空気の流れ方向に垂直な断面図を示す．この集熱器は某工場の南側外壁に垂直に取付けられ，外気導入の際の予熱に用いられた．断面図において，上からガラス，その下が空気層，裏側に放熱フィンを持つ鉄製の集熱板，そして断熱材である．フィンの間を空気が流れて集熱板から熱を除去する．断熱材の空気流の側には，集熱板との輻射熱交換を減少するためにアルミはくがはられている．断熱材の外側には鉄板がある．

熱回路網のモデルを図4-30に示す．空気の流れ方向には5分割した．横方向はフィン1板あたりの幅をとった．空気流は送風機によるために既定の拡張熱コンダクタンスとなる．また断熱材の中の熱コンダクタンスも一定値とした．しかし，ガラスと集熱板の対流伝達と輻射伝達による総合的なコンダクタンスは温度によって非線型とした．すなわち時々刻々，解を求めていく過程でそれを変化させていった．集熱板と空気流のコンダクタンスは強制対流伝達率とフィン効率についての伝熱工学資料[72]からの実験式をもとに算定した．

日射は一部がガラス板に，大部分は集熱板に吸収される．これらは熱流入力として扱われる．測定された日射量は垂直南面の全日射量である．従ってそれらの入力を計算するために，まず直散分離を行った．当日は晴天であったため，Liu & Jordan による計算式を用いた．これは圏外水平全日射に対する水平拡散日射の比を，やはりその圏外日射に対する水平直達日射の比の1次式で表したものである．一方，ガラスについては，その吸収率，透過率が，直達，拡散それぞれに対して，入射角余弦などのべき級数で得られている．[15] 従って，このような計算式により日射による熱流入力を計算した．集熱器は外気中にあるために，節点29だけでなく節点28も外気温に等しい．さらに外気余熱を意図しているために，節点27の入口空気温度も外気温に等しい．

比較のために熱回路網モデルとは別に，定常計算モデルも作成した．こちらは熱容量を無視したモデルである．これは流れ方向に空気の温度変化の微分方程式をたて，これに入り込んで来る他の層の未知数温度を各層から立てられる連立熱平衡式の逆行列を使って消去し，その微分方程式の積分を行うものである．(宇田川の方法)

両モデルの計算結果を出口空気温度について描いたのが図4-31である．これには測定された出口空気温度と外気温及び日射量も描いた．これらの結果から次のことがいえよう．測定出口温度は熱容量の効果により時間的遅れを持つが，定常モデルではこれが再現されておらず，熱回路網モデルがより測定値に近い結果を出している．また定常モデルは流れ方向の温度変化の微分方程式を解析的に解いているのに対し，熱回路網モデルは5分割の集中定数系近似をしているが，それでも十分な精度を出していることがわかる．さらにモデルを作るために，特別の測定を必要としたわけではなく，既存の伝熱工学上の資料だけを用いたことも考慮すれば，本モデルは予測モデルとして有効であると考えられる．

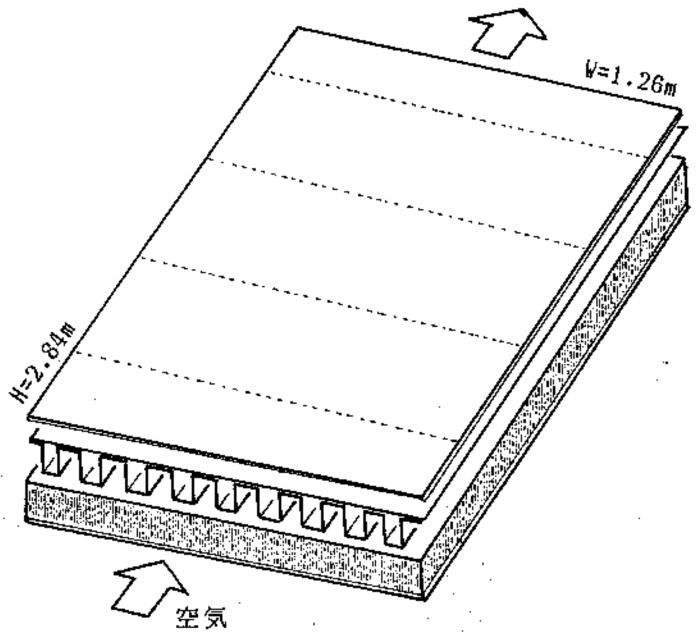


図4-28　太陽熱集熱器

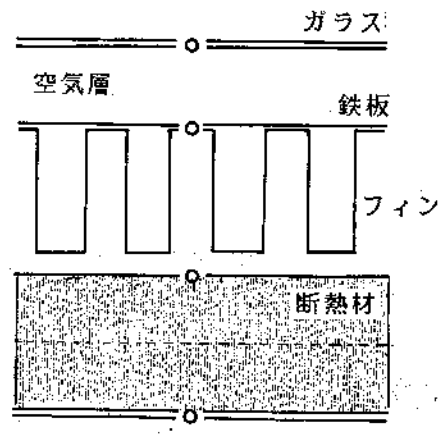


図4-29　断面図

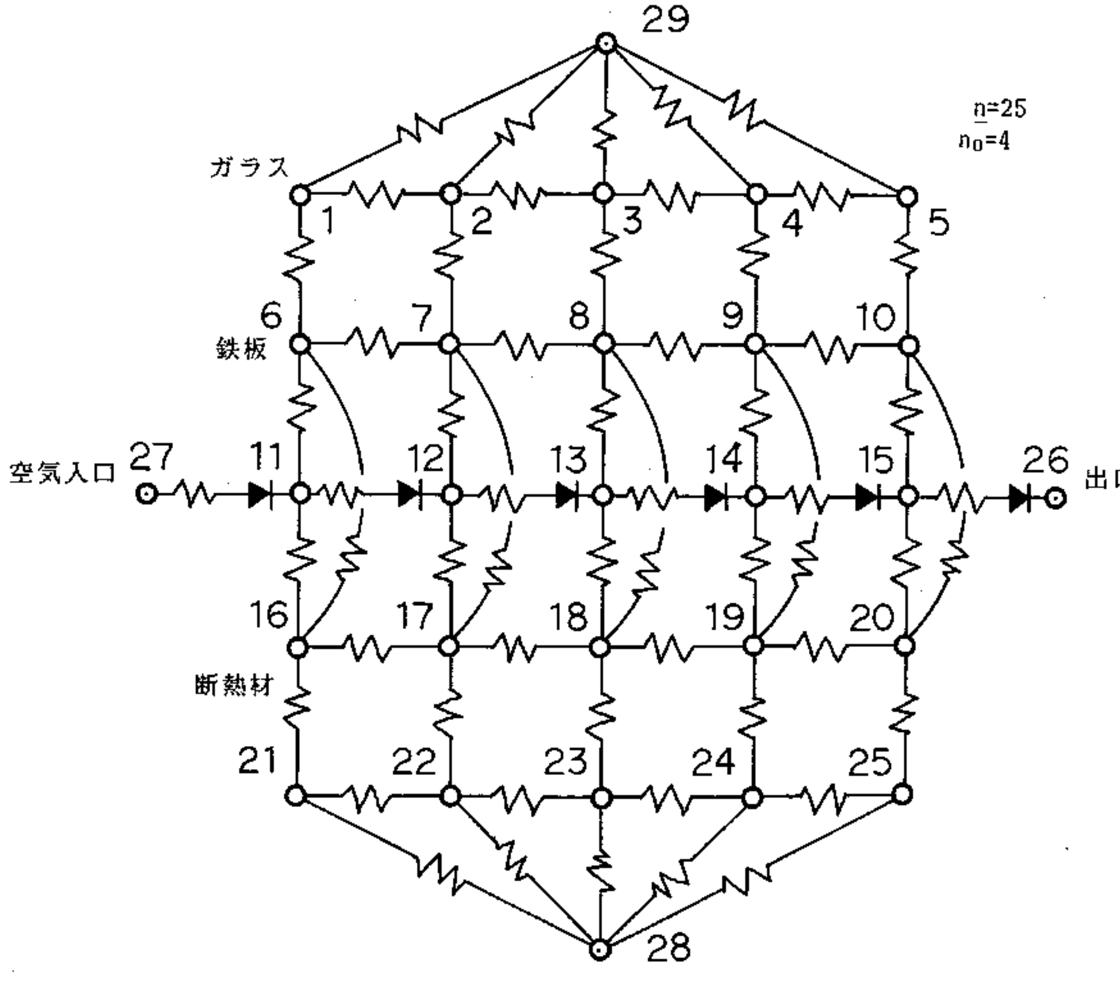


図4-30　熱回路網モデル

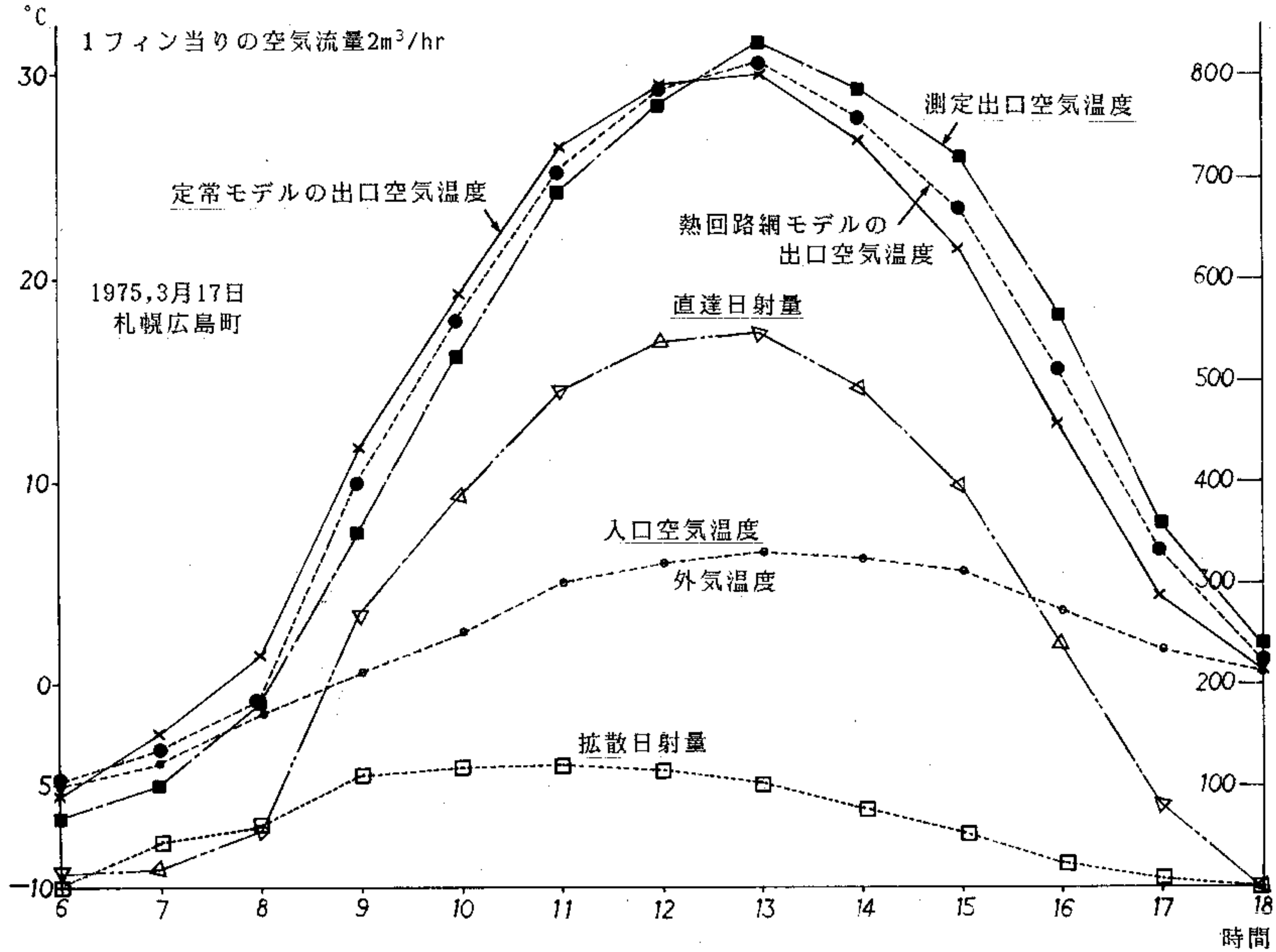


図4-31　出口空気温度のシミュレーション結果と測定結果

4.3 室温変動での検証

事務所建物で，非空調時での自然室温変動の実測の結果と，熱回路網モデルによる予測計算の結果を比較した．建築環境工学では最終的に室温を問題とすることが多いのでこの検討は重要である．

測定した建物は2階建てで延べ面積が400m^2程度であり，構造はPC版，窓は2重ガラスで箱状の日よけを持っている．2階の平面図を図4-32に示す．熱回路網にモデル化したのはこの東側の事務室である．そのため，下階室，隣室の温度は解かないですむように，これらの隣室が測定対象室につながる壁の内表面温度は測定しておき，これを規定温度節点とした．日射量の測定については，2個の日射計を用い，一方はシャドウバンドを付けることによりそれぞれ水平面全天日射，水平面拡散日射を測った．予測計算との比較を行う日は休日のものとし，内部発熱，人の出入による換気量などの不確実な要素はなるべく考慮しないですむようにした．

熱回路網モデルを図4-33に示す．各節点の壁などの部材における位置は部材断面図として図4-34に示す．またシステムパラメータを計算するためのもとになる物性値は表4-5にまとめた．換気量による拡張熱コンダクタンスは換気回数を0.5回/hrとして計算した．

シミュレーションは熱負荷計算を主目的にして開発した汎用計算プログラムによって行った．これは空調学会方式の気象データにもとづいて計算を行う．窓のひさしを考慮した正味の日射透過や吸熱の計算方法も当学会の標準的方法[82]と同様である．また比較日の初期温度を妥当なものとするため，その前日24時間分の測定気象データによって助走計算を行った．この最初の温度は全節点15°Cとした．

結果は図4-36に示す．これは測定した外気温と室温，さらに予測計算による室温の変化を描いている．また測定した日射量は図4-35に示す．計算値は，測定室温の変化の傾向をよく再現していると考えられる．差異の最大は約1°Cである．また系統的な違いとして計算値は測定値より低めである．17時以降の両方の室温変化は平行している．このときは日射はなく，外気温は下降しているから，総合的な外気に向けての熱コンダクタンスは実態に近いものがとられていると言える．ところが正午近くの日射が多い時の計算値は立上りが小さいから，窓透過日射量が室温上昇にあまり寄与しない計算モデルになっていることも推測される．事実，室内状況のモデル化はかなり単純化されている．室内には全く家具がないとか，透過日射は床面に吸収されるという仮定をとっている．従ってより実態に近い複雑な熱回路網モデルをつくれば，より実測値に近づくであろう．しかし，こうしたことは実物が出来上り，室内状況もきまった上ではじめて可能となる．つまり予測しようとするときは困難である．ここで重要なことは，いかにして計算値を測定値に近づけるかということではなく，既存の熱物性値や設計資料を用いたモデルによっても，この程度は実現象に合う予測が可能だということである．

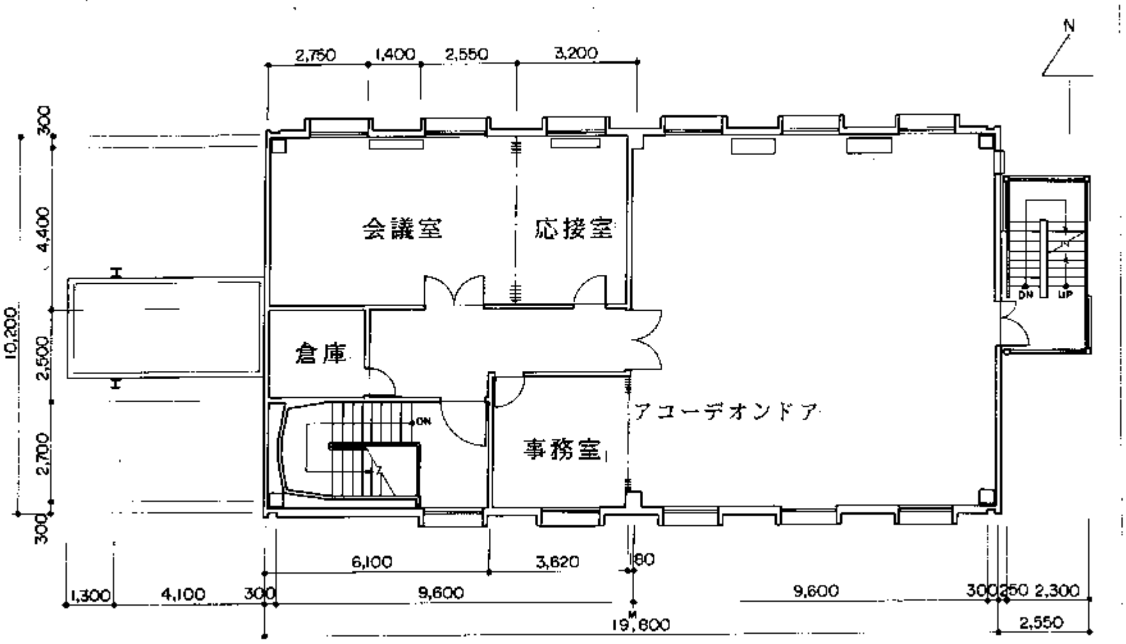


図4-32　2階の平面図

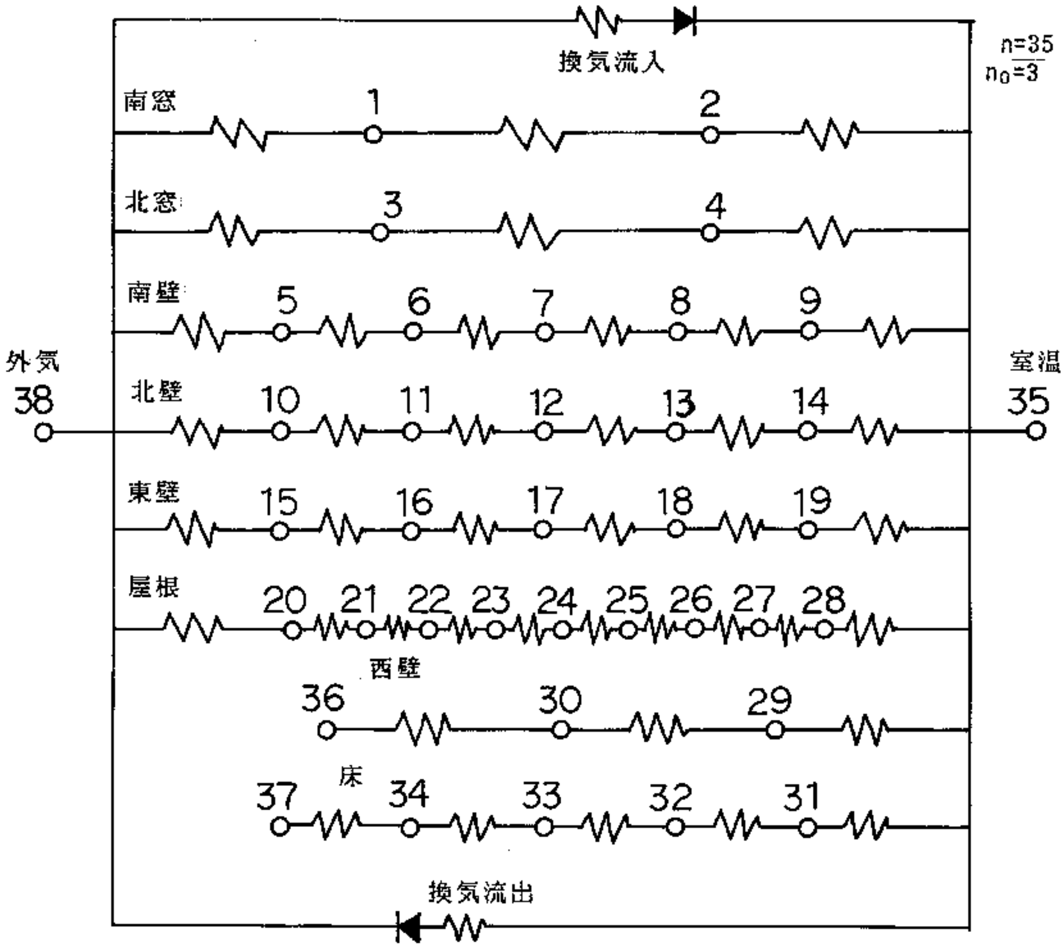


図4-33　熱回路網モデル

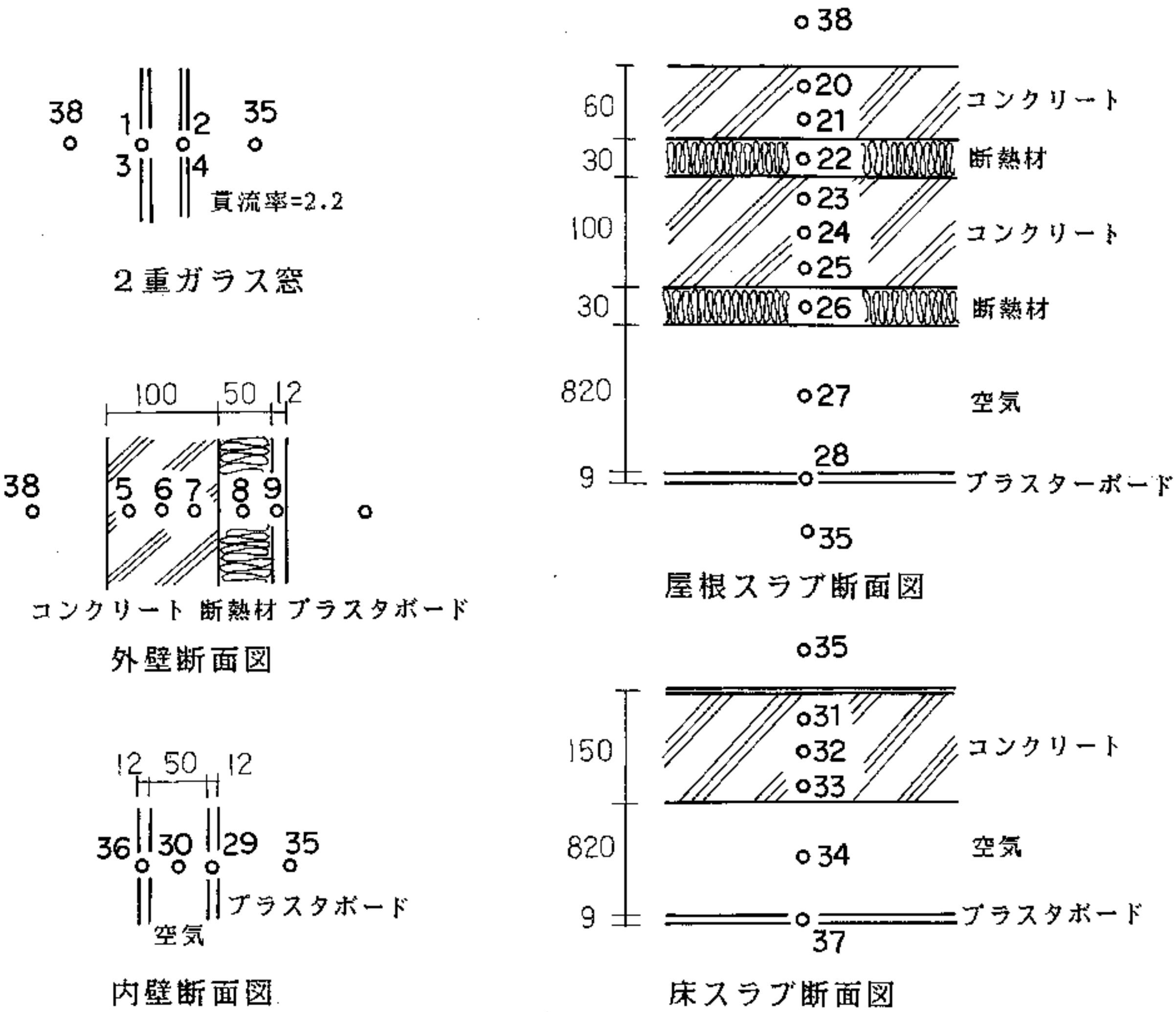


図4-34　部材断面図

表4-5　熱物性値

	伝導率 kcal/m·hr·°C	比熱 kcal/kg· °C	比重量 kg重/m3
コンクリート	1.4	0.21	2200
断熱材	0.03	0.32	30
プラスタボード	0.12	0.26	740
ガラス	—	0.20	2540
	外表面総合伝達率 kcal/m2·hr·°C	室内表面総合伝達率 kcal/m2·hr·°C	
	20	8	

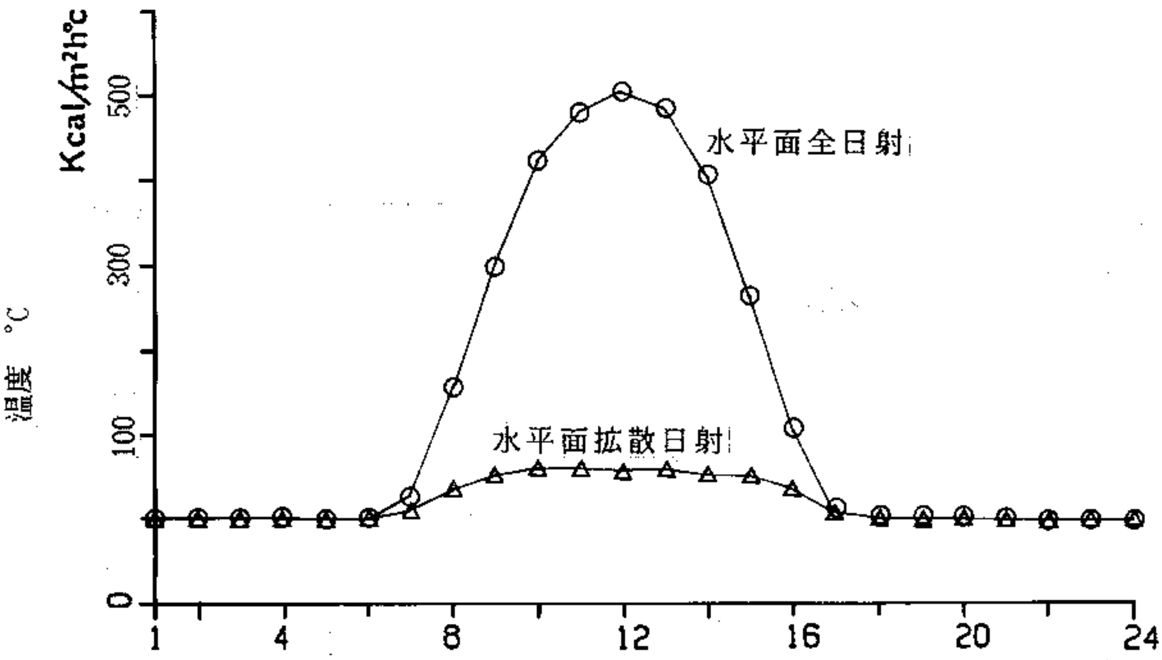


図4-35　日射量

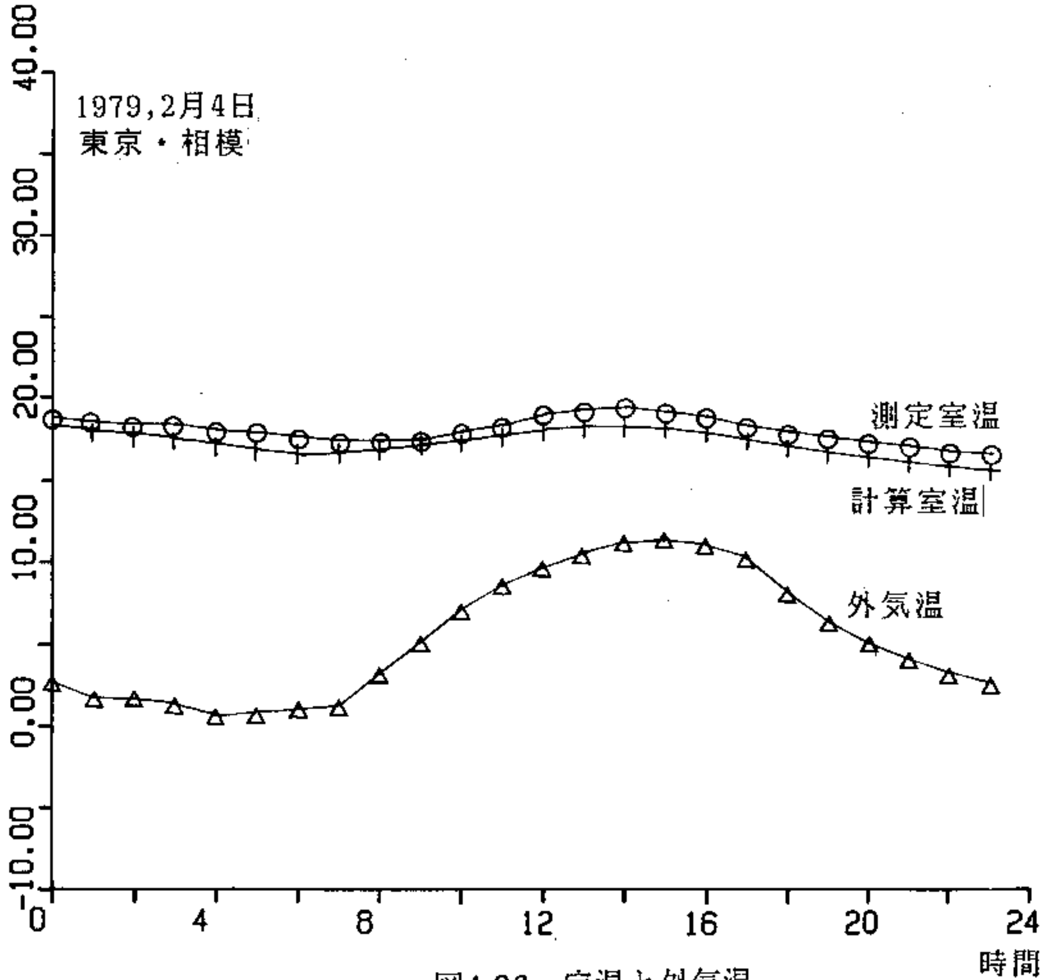


図4-36　室温と外気温

4.4　まとめ

この章では熱回路網モデルについての数値実験を行い，数学的精度について検討するとともに，実現象を予測する性能についても検証するために実測値との比較も行った．数学的な精度を検討するために，基準となる解析的な精解が得られる1次元多層壁体を試験体としてとりあげた．そして集中定数化法については検査体積法と有限要素法を，時間積分法については，射影分解による解析解と後退差分をとり上げた．

まず，検査体積法による分割のあらさを何通りか変えて，空間的な離散化誤差に関して検討した．この結果，コンクリートのような比較的に熱容量のある材質の場合でも5cm程度の厚みを検査体積とすれば，単位応答については十分な精度を持つことがわかった．そしてもし10cm程度の厚みにしても誤差の最大は約5%である．

次に近似時間積分の誤差について検討した．単位応答を後退差分により$\Delta t=1hr$で計算した場合，精解に比べ，吸熱側で表面温度の立上がりが遅く，貫流側のそれも初期の2時間ほどを除いては立上りが遅い．この最大の誤差は約5%である．この誤差はΔtを短くするにつれて減少し，0.1hrで最大約0.5%となる．一方，射影分解による方法ではΔtをいくらにとっても精解に一致する．

検査体積法と有限要素法のモデルの比較も行った．固有値の性質を，同じ節点数で同じ個数のものどおしで比較すると，絶対値の小さな方の固有値は，同程度の大きさを持つが，大きな方については有限要素モデルが，より絶対値の大きなものを持つ．従って有限要素モデルの固有値は絶対値が小さなものから大きなものまで範囲が広い．絶対値の大きな固有値は比較的に高周波の入力によってその影響を表す．外気温変動のような24時間周期程度では両者の違いは見られない．そこで1ないし2時間周期の正弦波入力を与えたところ，貫流側において顕著な差異が見られた．有限要素モデルは過剰に応答し，むしろ検査体積法の方が精解に近かった．また精解は両者の間にある．ただし，励振側については検査体積モデルの応答は遅くなる傾向を示し，有限要素モデルの方が精解に近い．一方，同程度の分割で，単位応答については，両者の違いはほとんど見られない．

太陽熱集熱器について実測を行った結果と，熱回路網モデルによる予測計算の結果を比較した．さらに通常用いられる定常扱いのモデルも参考のために比較した．出口空気温度の結果についてみると熱回路網モデルは，定常モデルよりも実測値に近い．さらに事務所建物において自然室温の変動の実測結果と，熱回路網モデルによる計算結果を比較した．両者の差異は最大で約1℃であり，計算値は測定値の変化傾向にほぼ追随している．

これらの2種のモデルはいずれも，熱物性値などは標準的な既存の資料にもとずいたものであり，特にこのモデル化のために試験をしたというものではない．また室温変動のモデルの場合，室内の家具設置状況など日射吸収や熱容量についての細かい考慮をした複雑なものではなく，建物が出来る以前にも十分モデル化が可能な単純なものである．それにもかかわらず，この程度の一致をみることができる．従って，この計算モデル化の方法は予測設計手法として有効なものと考える．

第5章　換気回路網

5.1　換気回路網計算法

建築換気計算法の発達史は序論で述べたが，このはじまりには，坑内通気や配水管網の計算法の成果から得られるところが多かった．しかし建築換気系には他分野のそれらとは異なったいくつかの特徴がある．従って，計算法もこれを考慮したものが必要である．建築換気系は多数の室とこれらをつなぐ通気路によって構成されていると見なせる．例えば隣接した2つの室があり，ドア等の開口でつながっていれば，これも一種の通気路である．しかし，もし2つの室に室温の違いがあれば，ドアの上部と下部では空気の流れが逆になることがしばしば起こる．配水管網の計算モデルでは，管の中の流れは常に一方向という前提がとられるから，こうした点でも大きな違いがある．本論文では集中定数系のモデルで扱うから，このような流れが起こるドアなどでは，上下方向に分割し集中定数化した複数の通気路を仮定する．建築換気系では各室の床面での圧力を室内圧と呼び，計算モデルでは，これを節点値とする．また節点間を結ぶ枝が通気路である．従って建築換気の場合は，圧力節点の数に比べ，枝の数が圧倒的に多くなる特徴を持つと言える．

通気路の両端にかかる差圧と風量の関係は非線型である．すなわち差圧の0.5乗から1乗に比例して風量が流れる．この指数は通気路の形状によって異なる．隙間のような場合で流れが層流に近ければ1乗に近ずき，孔状の開口であれば，乱流が起りやすく0.5乗に近ずく．従って建築換気系の通気路が持つこれらの抵抗指数は一定ではなく，通気路ごとに変るものと見なさなければならない．そして，この非線型性が換気計算を困難なものにしている．熱回路網の場合は熱流が温度差に比例して起こるという線型性があるために，温度を未知数とする線型の全体的な方程式が構成できたが，換気系の場合にはこのようなことが出来ないのである．

また，建築換気系では自然換気駆動力と機械換気駆動力が同時に作用する．一方，配水管網の計算で考慮するのは，多くの場合は，機械的な駆動力だけである．従って建築換気系では，機械換気装置だけでなく，外気の風圧が作用していなくても，室内外の空気温度の違いだけで空気が流動する．そして，むしろこのような温度差による空気の流動が予測が難しく設計上は問題となるのである．

5.1.1　風量残差の計算

換気モデルを定式化するにあたって大きな2つの選択がある．それは，圧力仮定法をとるか，流量仮定法をとるかである．坑内通気や配水管網においては流量仮定法が用いられることが多い．全体の管網は，いくつかの閉回路から構成されるが，それぞれの閉回路では圧力降下についてのキルヒホッフの法則が成立ち，これを基本的な計算式の1つとする．しかし建築換気系では，圧力節点の数に比べ，通気路の数が非常に多いから，もし流量仮定法をとると，考慮すべき閉回路の数も多くなって解法上は不利となる．そこで建築換気系に適した圧力仮定法をとる．

圧力仮定法というのは文字どおり，ある適当な圧力の仮定値からはじめて，何らかの繰り返し計算を経て，解に達せしめる．1回の計算で解を求めることができないのは，前述した圧力差と風量の非線型の関係に原因がある．いまもし全ての室内圧の正しい値が分ったとすると，これらに

よって全ての通気路の風量は定まり，さらにこれらの風量は各室の風量収支も満たしていることになる．すなわち，換気計算の本質的な未知数は室内圧であって風量ではない．そこで各室での風量収支を室内圧で表そうとすると，これらは室内圧についての非線型方程式になる．従ってどのような解法をとろうとも繰り返し収束計算は不可避となるのである．単室の場合はこの繰り返し計算も手計算で何とか実行できる．しかし多数室になってくれば，手計算は非常に困難なものとなる．従って電算機の利用は必要不可欠である．

電算機利用に適した計算モデルとして換気回路網を定義する．かつては実際に相似した電気回路網を組んで答を求めていたところから発生したと思われる回路網という言葉は，その背景にある意味を変えて用いることにする．本論文で言うところの換気回路網とは，どのような形状の換気系であっても一般的にモデル化できるということを意味する．つまり，圧力節点間を結ぶ通気路は，その結びつき方や本数について自由にすることができ，かつこの計算モデルが自動的に作成されるという意味で，換気回路網という言葉を定義する．

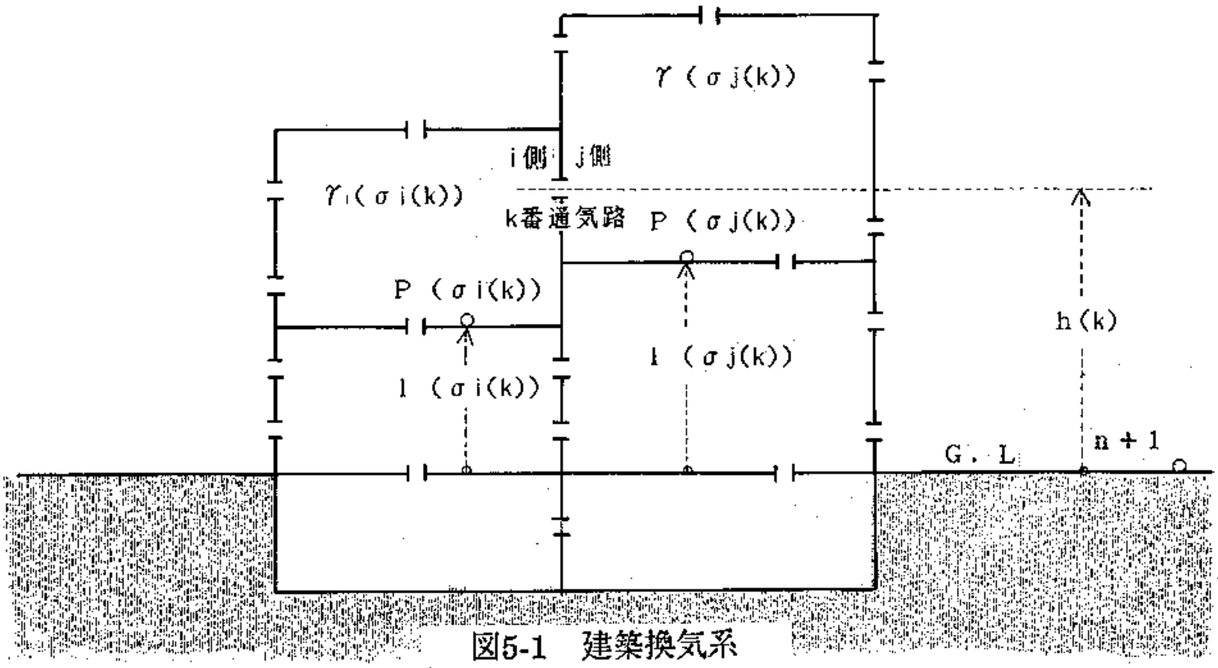


図5-1　建築換気系

圧力仮定法の計算は，ある仮定した室内圧を与えた時に，各室での風量残差を算出し，この残差を0にもっていくための室内圧の修正量を求めて施し，これらの手順を繰り返していく．従って1つの重要な計算過程は仮定された室内圧分布から各室の風量残差を求めるものである．そしてこの計算はなるべく単純で，一般的なデータ構造上で行われる必要がある．

図5-1に建築換気系の簡単な例を示す．室数が全部でn個あるとする．$p(1), p(2), \cdots, p(n)$がこれらの室内圧(kg重$/m^2$)を表す．特に$p(n+1)$は外気の地表面等の基準面での圧力を表す．全ての通気路に対して1から順に番号を付け，全部でm個あるとする．さらに計算モデルを作る人が全ての通気路に対して，任意にi側，j側という方向性の定義をする．

従って，この定義が行われれば，ある1つの通気路kについて，i側の圧力節点番号$\sigma_i(k)$, j側の圧力節点番号$\sigma_j(k)$を内蔵する配列σ_i, σ_jも定義できる．各室床面の基準面からの高さ$l(1), l(2), \cdots, l(n)$ (m)とする．$l(n+1)$は外気の基準面の高さである．また各通気路の基準面からの高さを$h(1), h(2), \cdots\cdots, h(m)$ (m)とする．各室の空気比重量を$\gamma(1), \gamma(2), \cdots\cdots\cdots, \gamma(n)$($kg$重 / m^3)とする．特に$\gamma(n+1)$は外気の空気比重量である．

通気路の通気抵抗に関する係数のデータ構造も定める．

通気路に関して次式が成り立つ．[83)]

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{\gamma}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{q}{a} \right)^{\eta} \qquad (5\text{-}1)$$

ここにΔpは差圧(kg重$/m^2$), qは風量(m^3/sec), aは通過面積(m^2), γは通過空気密度(kg重 / m^3)である．そしてζが抵抗係数，ηが抵抗指数と呼ぶものである．

(5-1)式をqについて解いておけば次式になる．

$$q = a \cdot \left(\frac{2 \cdot g \cdot \Delta p}{\zeta \cdot \gamma} \right)^{\frac{1}{\eta}} \qquad (5\text{-}2)$$

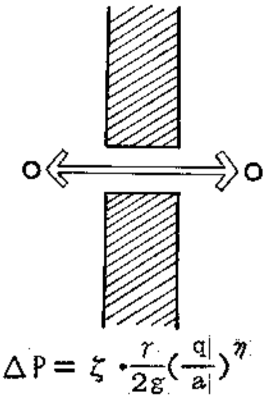


図5-2　通気抵抗

従って，通気特性は，ζ, ηの2つの係数と指数および面積aで定量化される．そこで一般にk番通気路のこれらの係数は$\zeta(k)$, $\eta(k)$, $a(k)$とする．

外気に面した通気路には風圧が作用する．こうした風圧は通気路の通過風量とは独立して作用する．気象上の外気風速を$v_w(m/s)$とすればこの風圧w(kg重 / m^2)は風圧係数を用いて次式で記述される．[83)]

$$w = c_w \cdot \frac{\gamma_o}{2 \cdot g} \cdot v_w^2 \qquad (5\text{-}3)$$

ここにc_wが風圧係数である．γ_0は外気の空気比重量(kg重 / m^3)である．建物に対する風向きが定まれば，建物外表面での風圧係数の分布も定まる．気象データ上，風向きは16方位で表されるから，風圧係数はこの16方位それぞれに対して定めておく必要がある．典型的な建物形状については，設計資料集成等に風圧係数の分布が示されている．しかし建物形状が少しずつ異なる個々のものについては，やはり風圧係数の分布は多少異なり，さらに近隣の建物の状況によっても異なってくるものであるから，より正確には風洞を用いた模型実験によってそれを求める必要がある．著者が行ったこの種の実験では次のような傾向が見られた．風上側の風圧係数は，当然のことながら正の値が多いが，建物外表面の面積としては正の値をとる領域は少なく，負の値をとる領域の方が多い．また正の風圧係数については全て$0<c_w<1$におさまっているが，負の風圧係数についてはその絶対値が1より大きくなるのも局部的に見られる．さらに風下側でなくても，風が壁面に平行に流れているような屋根面ではやはり負の値になる傾向がある．負の大きな値については渦の影響と考えられる．

さらに換気の駆動力になるものとして送風機がある．これは外気の風圧と異なり，通気路の通過風量qによってその加圧力が変化する．送風機の加圧力を全圧p_Tで表し，送風量qによる何らか

の関数形で表現するが，抵抗曲線との交点を求めることが可能であるようにしなければならない．2次曲線は送風機特性曲線に適合しないが3次曲線であれば，適合させることは可能であり，また根を解析的に求めることも可能である．

$$p_T = b_0 + b_1 \cdot q + b_2 \cdot q^2 + b_3 \cdot q^3 \tag{5-4}$$

この式の係数b_0, b_1, b_2, b_3は最小二乗法近似によって容易に得られる．

以上によって各通気路の風量を求めるのに必要な情報はそろった．そこでまずある仮定された室内圧分布$p(1), p(2), \cdots\cdots, p(n)$から各通気路の風量を求める計算過程を記述する．この場合，i)送風機の付いていない通気路と，ii)送風機の付いている通気路，では計算方法が異なる．また両者とも計算過程から生じる重要な配列σ_uとσ_dを定める．これらは風上側と，風下側の圧力節点番号を内蔵するものである．

i)送風機の付いていない通気路の風量計算

図5-1を参照する．あるk番通気路について，そのi側からかかる全圧をp_i，j側からかかる全圧をp_jとすれば，これらは次式で計算される．

$$p_i(k) = p(\sigma_i(k)) - \left\{ h(k) - l(\sigma_i(k)) \right\} \cdot \gamma(\sigma_i(k)) + w_i(k) \tag{5-5}$$

$$p_j(k) = p(\sigma_j(k)) - \left\{ h(k) - l(\sigma_j(k)) \right\} \cdot \gamma(\sigma_j(k)) + w_j(k) \tag{5-6}$$

ただし，$w_i(k)$，$w_j(k)$はそれぞれk番通気路についてi側，j側から作用する外気の風圧である．通気路が外気に面していなければ両方とも0であるが，例え外気に面していてもどちらか一方は0である．

圧力節点番号を内蔵する配列σ_iとσ_jによって，これらのp_i，p_jが容易に計算される．

ここで風上側の節点番号σ_u，風下側の節点番号σ_dの配列も計算される．すなわち，

もし$p_i(k) - p_j(k) \geqq 0$であれば

$$\begin{cases} \sigma_u(k) \leftarrow \sigma_i(k) \\ \sigma_d(k) \leftarrow \sigma_j(k) \end{cases} \tag{5-7}$$

もし$p_i(k) - p_j(k) < 0$であれば

$$\begin{cases} \sigma_u(k) \leftarrow \sigma_j(k) \\ \sigma_d(k) \leftarrow \sigma_i(k) \end{cases} \tag{5-8}$$

とする．記号の←は配列へ代入することを意味する．$\Delta p(k)$を次のように通気路両側の差圧として計算する．

$$\Delta p = | p_i(k) - p_j(k) | \tag{5-9}$$

このとき(5-2)式からk番通気路の風量$q(k)$は次式で計算される．

$$q(k)=a(k)\cdot\left(\frac{2\cdot g\cdot\Delta p(k)}{\zeta(k)\cdot\gamma(\sigma_u(k))}\right)^{\frac{1}{\eta(k)}} \tag{5-10}$$

ここに通過空気比重量は風上側の室内空気密度$\gamma(\sigma_u(k))$であることに注意する．

ii) 送風機が付いている通気路の風量計算

この場合は3次方程式を解析的に解くことによって風量を求めることになる．そのため通気路の抵抗指数ηを1と2に分ける．すなわち

$$\zeta(k)\cdot\frac{\gamma}{2\cdot g}\cdot\left(\frac{q(k)}{a(k)}\right)^{\eta(k)}=d_1(k)\cdot q(k)+d_2(k)\cdot q(k)^2 \tag{5-11}$$

と方程式近似化する．この近似は，あらかじめ最小二乗法によって行っておく．流体の粘性を考慮した運動方程式から演えき的に圧力損失を導いた場合はこの(5-11)式の右辺の形になることから，本来はこうした形式で表すのが正しいのであろうが，利用できる多くの既存データは左辺の形でまとめられているため，このような方程式近似が必要となるわけである．

送風機を内部に持つ通気路の両端には(5-5)式と(5-6)式で計算される全圧p_i, p_jが作用していることは i) と同じである．送風機が付いた場合はこれらのどちらか側にその加圧力が加わる形になる．まずi側から送風機加圧が作用する場合は

$$p_i(k)+b_0(k)+b_1(k)\cdot q(k)+b_2(k)\cdot q(k)^2+b_3(k)\cdot q(k)^3-p_j(k)$$
$$=d_1(k)\cdot q(k)+d_2(k)\cdot q(k)^2 \tag{5-12}$$

なる$q(k)$について3次方程式が得られる．逆にj側から送風機加圧が作用する場合は

$$p_j(k)+b_0(k)+b_1(k)\cdot q(k)+b_2(k)\cdot q(k)^2+b_3(k)\cdot q(k)^3-p_i(k)$$
$$=d_1(k)\cdot q(k)+d_2(k)\cdot q(k)^2 \tag{5-13}$$

の3次方程式が得られる．

これらの3次方程式をCardano(カルダノ)などの方法によって解析的に解く．根の吟味などにわずかに手間がかかるが，ニュートン法などの逐次近似計算よりは，はるかに計算時間が少なくてすむからである．根は複素数の範囲で必ず3個得られるが，少なくとも1個は実数である．根の実数，虚数，重根の状況は方程式の係数から得られる判別式によって判断される．運転点の風量として採用するのは正の最大根である．正の根が2個以上あればサージング状態を示すと考えられる．しかし換気計算が定常で行われる以上，この現象を正しくシミュレートすることはできない．この場合でも正の最大根を採る．注意すべきなのは逆流状態になっているときである．この状態の判別は，最大でも負の実根を持つことで行える．逆流の運転点を正しく求めるためには，こうした状態の性能曲線がやはり必要であるが，多くの場合は用意されていない．便宜的には，性能曲線が全圧軸と交わる点での全圧が逆流状態でも引続き作用すると仮定することで処理する．

表5-1 風量残差計算のデータ構造

<table>
<tr><th></th><th></th><th>内容</th><th>配列名</th><th>サイズ</th></tr>
<tr><td rowspan="2">スカラ</td><td rowspan="2">計算モデルのサイズ</td><td>総室数</td><td>n</td><td>ー</td></tr>
<tr><td>総通気路数</td><td>m</td><td>ー</td></tr>
<tr><td rowspan="21">ベクトル</td><td rowspan="4">室(セル)の情報</td><td>床の高さ (m)</td><td>$l(i)$</td><td rowspan="4">$n+1$</td></tr>
<tr><td>空気の比重量 (kg重/m3)</td><td>$\gamma(i)$</td></tr>
<tr><td>室内圧 (kg重/m2)</td><td>$p(i)$</td></tr>
<tr><td>風量残差 (m3/sec)</td><td>$v(i)$</td></tr>
<tr><td rowspan="13">通気路の情報</td><td>通気路の高さ (m)</td><td>$h(k)$</td><td rowspan="17">m</td></tr>
<tr><td>通気路の面積 (m2)</td><td>$a(k)$</td></tr>
<tr><td>抵抗係数</td><td>$\zeta(k)$</td></tr>
<tr><td>抵抗指数</td><td>$\eta(k)$</td></tr>
<tr><td>風量 (m3/sec)</td><td>$q(k)$</td></tr>
<tr><td>外気風圧・i側 (kg重/m2)</td><td>$w_i(k)$</td></tr>
<tr><td>外気風圧・j側 (kg重/m2)</td><td>$w_j(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">抵抗の回帰係数</td><td>$d_1(k)$</td></tr>
<tr><td>$d_2(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">送風機性能係数</td><td>$b_0(k)$</td></tr>
<tr><td>$b_1(k)$</td></tr>
<tr><td>$b_2(k)$</td></tr>
<tr><td>$b_3(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">通気路と室(セル)の接続情報</td><td>通気路のi側の室番号</td><td>$\sigma_i(k)$</td></tr>
<tr><td>通気路のj側の室番号</td><td>$\sigma_j(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">流れの向きの情報</td><td>風上側室番号</td><td>$\sigma_u(k)$</td></tr>
<tr><td>風下側室番号</td><td>$\sigma_d(k)$</td></tr>
</table>

送風機が付いている場合にもσ_u, σ_dの配列を計算する.

もしi側から送風機加圧する場合で根の状況から正流ならば

$$\begin{cases} \sigma_u(k) \leftarrow \sigma_i(k) \\ \sigma_d(k) \leftarrow \sigma_j(k) \end{cases} \tag{5-14}$$

とする. ただし逆流ならばこの逆である.

もしj側から送風機加圧する場合で根の状況から正流ならば

$$\begin{cases} \sigma_u(k) \leftarrow \sigma_j(k) \\ \sigma_d(k) \leftarrow \sigma_i(k) \end{cases} \tag{5-15}$$

とする. ただし逆流ならばこの逆とする.

以上によって全ての種類の通気路において風量が計算された. 次にこれらの風量から各室での風量残差を計算する. この計算は計算プログラム言語か, これに近い方法で記述した方がわかりやすい. 各室での風量残差を$v(1),v(2),\cdots\cdots,v(n)$の配列に内蔵するとする.

$$\begin{cases} k=1,2,\cdots,m \text{ について} \\ v(\sigma_d(k)) \leftarrow v(\sigma_d(k))+q(k) \\ v(\sigma_u(k)) \leftarrow v(\sigma_u(k))-q(k) \\ \text{を計算する} \end{cases} \tag{5-16}$$

もちろん配列$v(1),v(2),\cdots\cdots,v(n)$の中味は最初は0にセットしておく. 流入風量は正の符号を, 流出は負の符号を持つ. この計算手順を敢えて数式記述すれば, 次のように書ける.

$$v(i)=\sum_{k=1}^{m}\delta(i,\sigma_d(k))\cdot q(k)-\sum_{k=1}^{m}\delta(i,\sigma_u(k))\cdot q(k) \tag{5-17}$$

これを$i=1,2,\cdots,n$についてそれぞれ計算する. ただし$\delta(i,j)$はクロネッカデルタを表し, $i=j$のときだけ1であり$i\neq j$では0である. この数式どおりにプログラムを組めば, (5-16)のアルゴリズムよりも複雑で計算時間のかかるものになってしまう.

これまでの風量残差計算に必要な情報を表5-1に一覧表にして示す. 配列は全て1次元であり必要最小限にしている. この中には本文中で用いた$p_i(k)$, $p_j(k)$の配列は入れていない. これは実際のアルゴリズムでは導入する必要がないからである.

5.1.2 非線型方程式の解法

前述した各室の風量残差$v(1),v(2),\cdots\cdots,v(n)$によって適当な室内圧の修正量を計算して施す. このための方法として, 基本的には多次元的なニュートン法を用いる. ただし, これには少々改良

を加えなければならない．まずこれらの残差を$v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$のように表示することにし，従って$p(1), p(2), \cdots\cdots, p(n)$も$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$のように表示する．この換気計算は本質的には圧力仮定法であるから，今，ある仮定の圧力の$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$に対して，適当な圧力修正量$\Delta p_1$, $\Delta p_2, \cdots\cdots, \Delta p_n$を施せば全ての風量残差が0になるとする．

そこで$p_1+\Delta p_1$, $p_2+\Delta p_2, \cdots\cdots, p_n+\Delta p_n$の点でのテーラー展開の第1項近似を行う．例えば$i$番の室では次のようになる．

$$v_i(p_1+\Delta p_1, p_2+\Delta p_2, \cdots\cdots, p_n+\Delta p_n)$$

$$\simeq v_i(p_2, p_2, \cdots\cdots, p_n)+\frac{\partial v_i}{\partial p_1}\cdot\Delta p_1+\frac{\partial v_i}{\partial p_2}\cdot\Delta p_2+\cdots\cdots+\frac{\partial v_i}{\partial p_n}\cdot\Delta p_n=0 \tag{5-18}$$

これを$i=1, 2, \cdots\cdots, n$全てについて記述し，修正量ベクトル

$$\mathbf{p}_c={}^t(\Delta p_1, \Delta p_2, \cdots\cdots, \Delta p_n) \tag{5-19}$$

と風量残差ベクトル

$$\mathbf{v}={}^t(v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n) \tag{5-20}$$

について整理する．

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial p_1} & \frac{\partial v_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial v_2}{\partial p_1} & \frac{\partial v_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_i}{\partial p_1} & \frac{\partial v_i}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial v_i}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial v_i}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial p_1} & \frac{\partial v_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial p_i} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial p_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_i \\ \vdots \\ \Delta p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_i \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix} \tag{5-21}$$

この式のマトリクスはヤコビアン$(n\times n)$であり，これを$\mathbf{J}$で表す．すると

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}_c=-\mathbf{v} \tag{5-22}$$

と書き改められる．逆行列の計算を行い，$\mathbf{p}_c$は次のように求まる．

$$\mathbf{p}_c=-\mathbf{J}^{-1}\cdot\mathbf{v} \tag{5-23}$$

ここで，仮定された圧力ベクトルを

$$\mathbf{p} = {}^t(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n) \tag{5-24}$$

と表す．

修正量$\mathbf{p}_c$を単に$\mathbf{p}$に加えれば，普通のニュートン法である．ところがこれでは，しばしば解の振動を起こし収束しない事態が発生することが，実際の経験からわかっている．さらに安定に解に収束させるために必要な工夫が初期値のとり方と，ヤコビアンの作り方について存在する．このことをそれぞれ論じる．

＜初期値のとり方：換気駆動力0からの開始＞

一般にニュートン法は解への収束が速い利点があるにもかかわらず，初期値のとり方によっては全く正解へ収束しない欠点もあることが知られている．初期値の持つべき条件は2つある．1つは解の近傍にあることと，もう1つは，初期値も，ある状況によっては一組の正解となっていることである．換気系の物理的考察から，これらの2つを満たすであろう状態が考えられる．それは換気駆動力が働かず全ての通気路の風量が0の状態である．駆動力は温度差による浮力，風圧，送風機が原因となる．全室が外気温に等く，風圧も0，そして送風機も停止している状態では室内圧の正解が物理的考察から求められる．

$$p(i) = p(n+1) - \gamma(n+1) \cdot l(i) \tag{5-25}$$

これを$i=1,2,\cdots,n$について計算すれば，初期値となる．なお，$n+1$番は外気である．

＜ヤコビアンのつくり方：中央差分＞

ヤコビアンの中の偏導関数は数値微分によって求める．そしてこれは中央差分で行う．この計算において前述した各室での風量残差を求める過程をサブルーチンとして利用する．まず仮定した圧力ベクトル$\mathbf{p}$に対し，このj番要素に$\Delta p/2$の圧力増分を加えたベクトル$\mathbf{p}_{\delta j}$とする．また同じく$-\Delta p/2$の圧力増分を加えたベクトルを$\mathbf{p}_{-\delta j}$とする．すなわち，

$$\mathbf{p}_{\delta j} \leftarrow \mathbf{p} + {}^t(0, \cdots\cdots, 0, \Delta p/2, 0, \cdots\cdots, 0) \tag{5-26}$$

$$\mathbf{p}_{-\delta j} \leftarrow \mathbf{p} + {}^t(0, \cdots\cdots, 0, -\Delta p/2, 0, \cdots\cdots, 0) \tag{5-27}$$

である．これらの$\mathbf{p}_{\delta j}$, $\mathbf{p}_{-\delta j}$によって計算される風量残差をそれぞれ，$\mathbf{v}_{\delta j}$, $\mathbf{v}_{-\delta j}$とする．またヤコビアンの第j列ベクトルを$\mathbf{j}_j$とする．

するとヤコビアンは次のアルゴリズムで計算される．

$j=1,2,\cdots\cdots,n$について，※印まで繰り返し計算する．

$\mathbf{p}_{\delta j}$を求める．

風量残差計算過程により$\mathbf{p}_{\delta j}$についての$\mathbf{v}_{\delta j}$を計算する．

$\mathbf{p}_{-\delta j}$を求める．

風量残差計算過程により$\mathbf{p}_{-\delta j}$についての$\mathbf{v}_{-\delta j}$を計算する．

$$\mathbf{j}_j \leftarrow (\mathbf{v}_{\delta j} - \mathbf{v}_{-\delta j})/\Delta p \tag{5-28}$$

ヤコビアンのj列へ$\mathbf{j}_j$を格納する.

└※ここまでを繰り返す.

このように中央差分をとることにより, 片側差分よりも正確な偏導関数が得られる. なお, 数値微分の増分Δpは浮動小数点の加減算が意味をなす最小の値にする. 従って, 床レベル$l(i)$の大きさによってΔpは変えることが望ましい.

<圧力修正量の加え方：振動防止係数を乗じる>

この非線型方程式の解法について, はじめに逐次増分法を試みた. すなわち, 換気駆動力0における確かな解から出発し, 少しずつ駆動力を増加させていき, 多次元のニュートン法によって逐次解を求めて, 所定の駆動力の作用する状態の解まで到達させていた. この方法は初期値を解のごく近傍にもっていってニュートン法を適用するため確実ではあったが, 計算時間のかかる欠点があった. 一方, 通常の多次元のニュートン法で収束しない場合の過程を調べたところ, 得られる圧力修正ベクトルの符号が繰り返し反転するのが認められた. 同様な症状はΔpが大きめのときにも起こるが, これを十分に小さくしてもそれが起こる場合もあった. このようなことから(5-23)式による圧力修正ベクトルをそのまま施すのではなく, ちょうど半分にしたものを施せばよいことが経験的にわかった. 従ってこれを修正ニュートンラプソン法と呼ぶことにした. 数多くのモデルによる検討の結果, この方法は, 換気駆動力0からの逐次増分法よりも計算時間の上で優れていることも分った. この修正の有効性は次節で論じる.

修正ニュートンラプソン法は次のような計算手順になる.

$\mathbf{p}_{new}$ ← 初期値, $\mathbf{p}$ ← $\mathbf{o}$

┌── $\| \mathbf{p}-\mathbf{p}_{new} \|$ <(許容誤差)になるまで※ までを繰り返す

$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_{new}$

$\mathbf{p}_c \leftarrow -\mathbf{J}^{-1}\cdot\mathbf{v}$

$\mathbf{p}_{new} \leftarrow \mathbf{p}+\varepsilon\cdot\mathbf{p}_c$ (5-29)

└ ※ここまでを繰り返す.

この$\varepsilon=0.5$が振動防止係数である.

5.1.3 解法についての考察

前述した修正ニュートンラプソン法の有効性と必要性を考察する. この考察を一般的に行うのは複雑で困難である. しかし最も単純な要素モデルと条件であれば可能であり, 一般の場合はこれから類推することができる. 最も単純な要素モデルとは室内圧節点が1個だけで, 通気路も最低限の2個の場合である. これを図5-3の上部に示す. 単純な条件とは室内外とも同じ空気比重量であって, 風圧なども作用しない状態である. この状態では明らかに室内圧は外気圧に等くな

り，空気の出入りもなく，自明の解を持つ．図5-3Bのグラフにおいて$p=0$の点がこの解である．しかし，ニュートン法の収束や振動のプロセスを議論するための本質を失うことはない．なぜなら，何らかの換気駆動力があっても，解くべき方程式のグラフ上の形状は同様だからである．

図5-3Aの図において，通気路1と2は同じ抵抗係数と指数を持つものとする．するといずれの通気路の通過風量qも次式で表される．

$$q=\xi\cdot p^{\frac{1}{\eta}} \tag{5-30}$$

ここに室内圧節点も外気圧の節点も同じレベルにあり，外気圧は基準となる与条件として0としている．またηは抵抗指数であり，ξは抵抗係数ζの$-1/\eta$乗に比例する定数である．計算上の風量残差vの関数を導く．まず$p\geqq 0$の場合は次式となる．

$$v=-\xi\cdot p^{\frac{1}{\eta}}-\xi\cdot p^{\frac{1}{\eta}}=-2\cdot\xi\cdot p^{\frac{1}{\eta}} \tag{5-31}$$

$p<0$の場合は次式となる．

$$v=\xi\cdot(-p)^{\frac{1}{\eta}}+\xi\cdot(-p)^{\frac{1}{\eta}}=2\cdot\xi\cdot(-p)^{\frac{1}{\eta}} \tag{5-32}$$

これらの曲線の性質を調べるためにvのpによる1次微分と2次微分の導関数を求める．

$p\geqq 0$においてはそれぞれ次のようになる．

$$\frac{\partial v}{\partial p}=-2\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\xi\cdot p^{\frac{1}{\eta}-1} \qquad <0 \tag{5-33}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}=2\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\cdot\xi\cdot p^{\frac{1}{\eta}-2} \qquad >0 \tag{5-34}$$

つまり$p\geqq 0$においてvはpの増加にともなって常に減少し，曲線は下にむかってトツである．

$p<0$においてはそれぞれ次のようになる．

$$\frac{\partial v}{\partial p}=-2\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\xi\cdot(-p)^{\frac{1}{\eta}-1} \qquad <0 \tag{5-35}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}=-2\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\cdot\xi\cdot(-p)^{\frac{1}{\eta}-2} \qquad <0 \tag{5-36}$$

従って$p<0$において，vはpの増加にともなって常に減少し，ただし曲線は上に向かってトツである．

以上のことからvの曲線を描くと図5-3Bのグラフのようになる．この曲線は$p=0$を境にして関数が異なってくるが，これは風量の向きの切り変りの点に相当する．そしてこの点での接線は垂直である．

いま，ある初期値$p_0(p_0 \neq 0)$から普通のニュートンラプソン法を開始したとする．もしp_0が負であれば，ここでの接線方程式は次式となる．

$$v-2\cdot\xi\cdot(-p_o)^{\frac{1}{\eta}}=\left(-2\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\xi\cdot(-p_o)^{\frac{1}{\eta}-1}\right)\cdot(p-p_o) \tag{5-37}$$

従って，これがp軸と交わる交点，すなわち次の仮定値p_0'は

$$p_o'=(1-\eta)\cdot p_o \tag{5-38}$$

となる．同様にしてp_0が正の場合の接線方程式は

$$v+2\cdot\xi\cdot p_o^{\frac{1}{\eta}}=\left(-2\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\xi\cdot p_o^{\frac{1}{\eta}-1}\right)\cdot(p-p_o) \tag{5-39}$$

であるから，次の仮定値p_0'は次式で表される．

$$p_o'=(1-\eta)\cdot p_o \tag{5-40}$$

よく用いられる抵抗指数は$\eta=2$であるが，この場合はどちらの初期値からはじめても

$$p_o'=-p_o \tag{5-41}$$

となる．このときvの曲線の性質から図5-3Bのように振動をはじめ，正解に到達しないのは明らかである．これを防止し，正解に達せしめるためには普通のニュートン法によって得られる次回への修正量に係数$\varepsilon=0.5$を乗じてやればよいこともわかる．また，普通のニュートン法では振動が必ず起こる条件はvの変曲点と解が一致している場合である．実際にはこれらが多少ずれているために普通のニュートン法でも解に達する場合があると考えられる．さらに数値微分によって微係数を求める際に中央差分を用いる有効性は，解の近傍ではその傾きが大きく変化も激しいためであると説明される．

より一般的な場合についても，以上の振動防止法が有効であることが示される．これは通気路1と2に何らかの加圧力f_1とf_2が加わった場合である．このときのvの曲線がどうなるかを考える．仮りに$f_1<f_2$とすればこれらの点によってp軸は3区間に分けられ，それぞれの区間でのvの関数は異なったものとなる．実は前述した例は$f_1=f_2=0$で，中間の区間が点の場合であった．

$p-f_1$が正ならば流出，負ならば流入であるから，まず$p<f_1<f_2$の区間は次のようなvの関数になり，pによる1次微分と2次微分も続く式のようになる．

$$v=\xi\cdot\left(-(p-f_1)\right)^{\frac{1}{\eta}}+\xi\cdot\left(-(p-f_2)\right)^{\frac{1}{\eta}} \tag{5-42}$$

$$\frac{\partial v}{\partial p}=-\xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(-(p-f_1)\right)^{\frac{1}{\eta}-1}-\xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(-(p-f_2)\right)^{\frac{1}{\eta}-1}\quad<0 \tag{5-43}$$

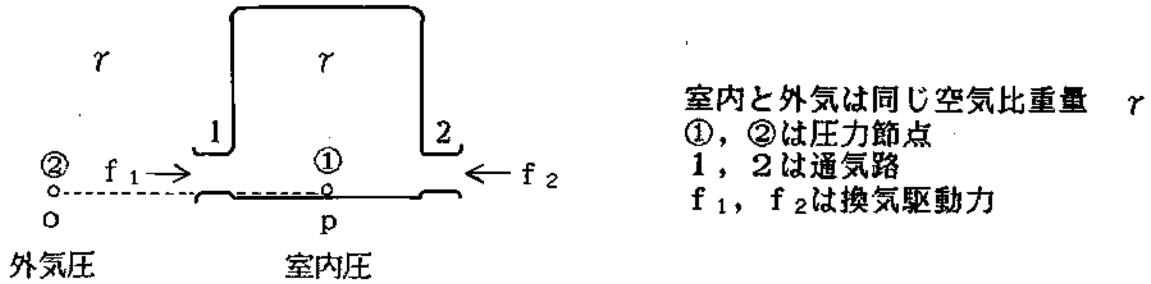


図5-3A　最も単純な要素モデル

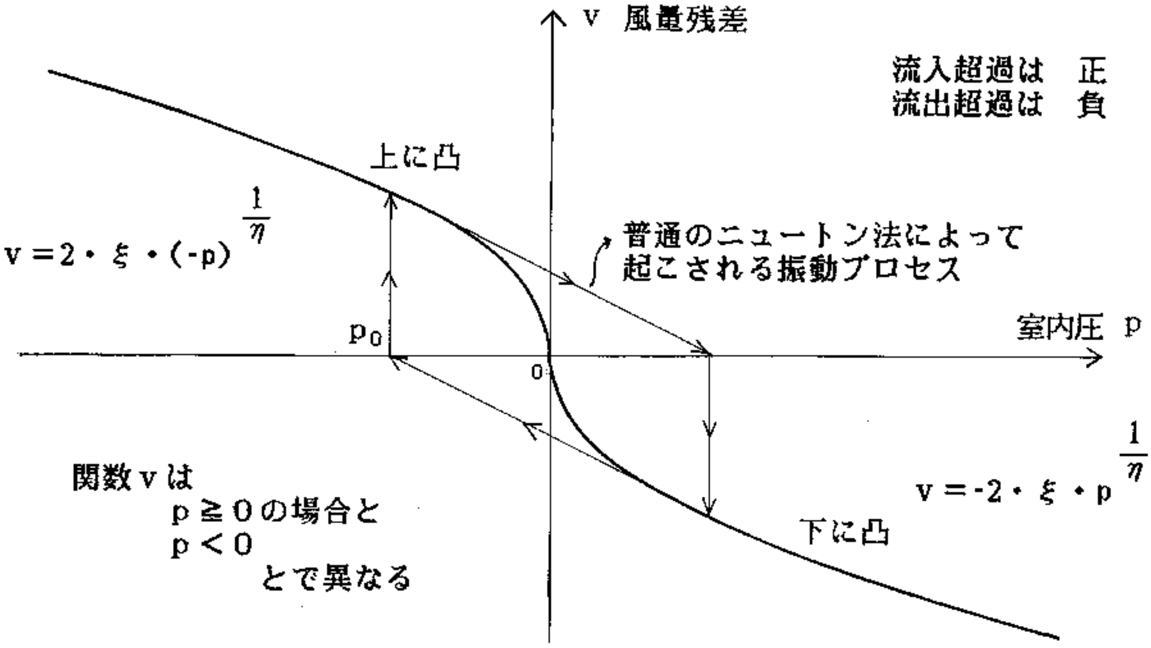


図5-3B　振動のしくみ(換気駆動力なし)

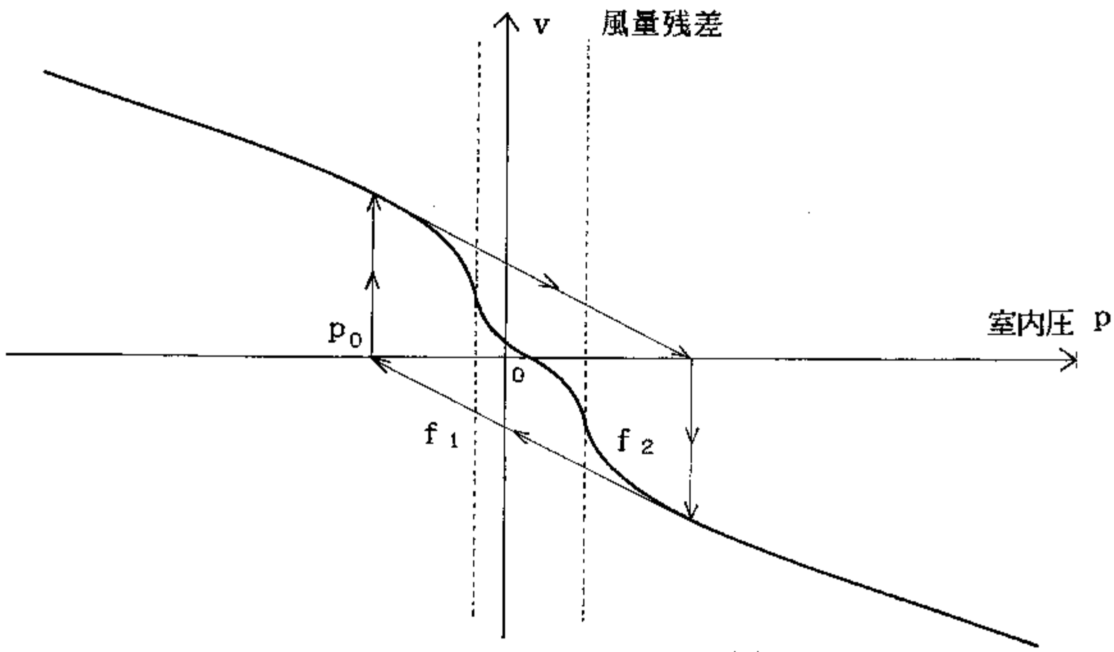


図5-3C　振動のしくみ(換気駆動力あり)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = -\xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\cdot\left(-(p-f_1)\right)^{\frac{1}{\eta}-2} - \xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\cdot\left(-(p-f_2)\right)^{\frac{1}{\eta}-2} \quad <0 \qquad (5\text{-}44)$$

$f_1 \leqq p \leqq f_2$の区間では次のようになる.

$$v = -\xi\cdot(p-f_1)^{\frac{1}{\eta}} + \xi\cdot\left(-(p-f_2)\right)^{\frac{1}{\eta}} \qquad (5\text{-}45)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot(p-f_1)^{\frac{1}{\eta}-1} - \xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(-(p-f_2)\right)^{\frac{1}{\eta}-1} \quad <0 \qquad (5\text{-}46)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = \xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\cdot(p-f_1)^{\frac{1}{\eta}-2} - \xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\cdot\left(-(p-f_2)\right)^{\frac{1}{\eta}-2} \qquad (5\text{-}47)$$

$f_1 < f_2 < p$の区間については次のようになる.

$$v = -\xi\cdot(p-f_1)^{\frac{1}{\eta}} - \xi\cdot(p-f_2)^{\frac{1}{\eta}} \qquad (5\text{-}48)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot(p-f_1)^{\frac{1}{\eta}-1} - \xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot(p-f_2)^{\frac{1}{\eta}-1} \quad <0 \qquad (5\text{-}49)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = \xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\cdot(p-f_1)^{\frac{1}{\eta}-2} + \xi\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\cdot(p-f_2)^{\frac{1}{\eta}-2} \quad >0 \qquad (5\text{-}50)$$

1次導関数をみれば，全ての区間でvは減少曲線である．2次導関数をみれば左の区間では上にトツ，中間の区間では上にも下にもトツになりうる．そして右の区間では下にトツである．そこで中間の区間での状況をみるために$p=f_1$と$p=f_2$へ限りなく近づいた場合の2次導関数の符号を調べる．するとf_1の近傍では正，f_2の近傍では負であることが容易にわかる．またこれらの2点ではvの傾きは垂直に近ずくこともわかる．従ってこの中間区間では左方で下にトツ，右方で上にトツで途中に変曲点がある．全体的な曲線は図5-3Cのようになる．中間の区間に初期値があれば普通のニュートンラプソン法で解に到達する．しかし通気抵抗がゆるく開口面積の大きい通気路が一部にある換気系では，その部分が図5-3Bの状況に近く，初期値を中間区間に入れるのが困難であるために振動の問題を起こしやすい．しかしこうした場合でも修正ニュートンラプソン法は有効である．また著者が初期に試みた逐次増分法は常に初期値をこの中間区間に入れるための工夫であったと説明される．

以上の考察により，この修正ニュートンラプソン法は単に解への収束を速めるというのではなく，振動を防止するために必要であるといえる．つまり，非線形問題を解く優れた方法であるニュートンラプソン法も，問題の特性に応じた工夫をしてやる必要があり，この修正ニュートンラプソン法は換気計算への適用のための工夫である．

5.2　全圧節点系の概念とモデル化の手順

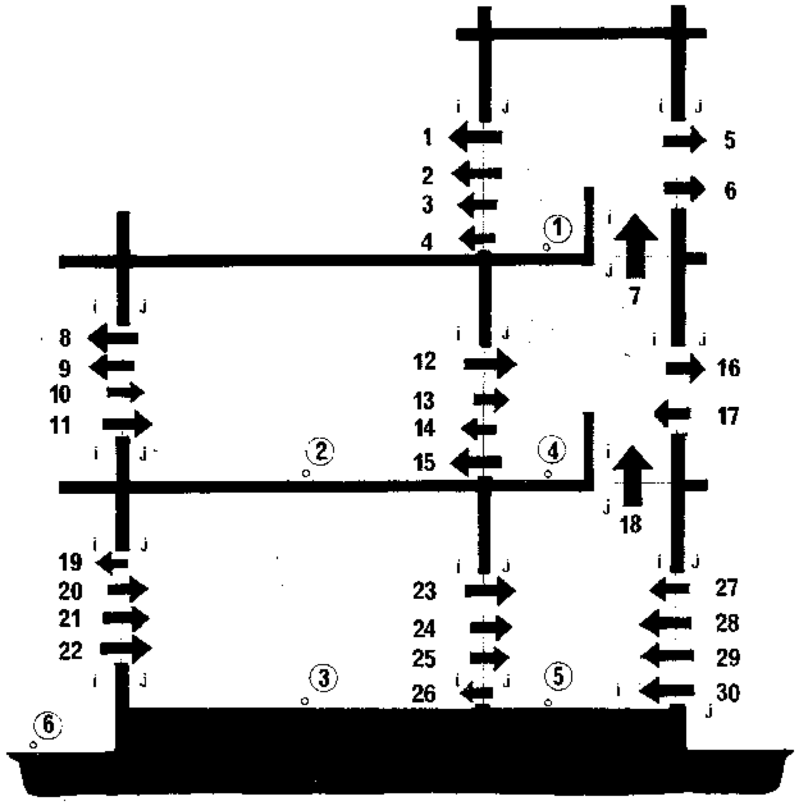
実際の換気系を計算モデル化するために必要な考え方を述べる．前節では計算法の説明のために単純化した図5-1のような例をとりあげた．しかし実際の換気系を一般的に計算モデル化するためには，ある独特の見方が必要になってくる．

図5-4の上部には，建築換気系について，その自然換気状況を描いている．すなわち，三層ほどの多数室からなる建物において，温度差による浮力や，外気の風圧の影響によって自然換気が起きている様子を示す．黒い矢印は窓，ドア，階段のたて穴などでの風量を表している．室内圧の節点は各室の床面に位置し，この場合は①から⑤までである．⑥は外気の地表面での圧力であり，基準圧力となる．各室内では風速による動圧は，静圧に比べて無視できる程に小さいと見なされる．従って，ばく然と圧力と表現してきたのは，正確には静圧である．そして動圧がほぼ0とすればこれは全圧にも等しい．この例によって説明すべき最も重要なことは，各種の開口を計算モデル上の通気路に集中定数化するときの考え方である．窓，ドアなどの開口は，実際の形状的には確かに1つの通気口ではあるが，計算モデル上はこれをさらに分割してそれぞれを通気路と見なさなければならない．例えば室温の異なる2つの室がドアなどでつながっているとすれば，ドアの上部と下部では空気の流れの向きが逆になっている場合も起こる．いわゆる中性帯がドアの中位に位置している場合に起きる現象である．この場合，そのドアを1つの通気路に見なしたのでは，正くモデル化されない．最底は上下に2分割する必要がある．これに対し階段室のたて穴のように，水平に広がっている開口は1本の通気路でモデル化して十分である．図5-4の下部にはモデルの図を示す．両方向の矢印は通気路を表す．通気路のi側，j側の定義はモデルをつくる人が任意に行ってよい．通気路の高さは，開口面の面積中心にとる．

次に空調用のダクトを用いた機械換気系を図5-5に示す．このような系をモデル化するときに，はじめて全圧節点系の概念が有効になってくる．前の例での圧力とは全て直感的に明らかな静圧を意味していた．しかし，ダクトの中にも圧力節点を設ける場合には，明確に全圧で考える必要がある．広い室の空間とダクトがつながっており，室の側とダクトの中の両方に圧力節点を設けたとする．室の床面での圧力は静圧が支配的で動圧はほとんどない．しかし，ダクトの中では動圧が顕著になってくる．そこでもし，室からダクトへの流管を想定して，動圧を分けて考えるベルヌーイの定理を適用しようとすれば，換気モデル全体でも2種の圧力を導入することになり，非常に繁雑なものとなる．

空調用のダクトの中に全圧節点を設ける必要があるのは2つの場合である．1つは分岐，合流があるときには，これらの場所に全圧節点を設ける．もう1つは，例え1本のダクトであっても途中の熱損失などにより，著しく空気温度が変化するときであり，この場合は，その温度変化の大きさに応じて途中に何点か全圧節点を設ける．これらの以外の場合は，ダクトは1つの通気路としての扱いですむから，全圧節点を設ける必要はない．

ダクトの中の全圧節点を物理的に意味づけすることが出来る．例えば，図5-5の①，⑥，⑦，⑧，⑨，⑩は分岐するゆえに設けられた全圧節点である．これらは，その節点の位置で仮想的に十分広い容積を持つ室が存在すると想像すれば，その室での静圧を全圧と見なせばよいことになる．こうした意味から，それらの節点を室のような形状の中に置いて描いているわけである．



上図の建物を下図の様にモデル化する

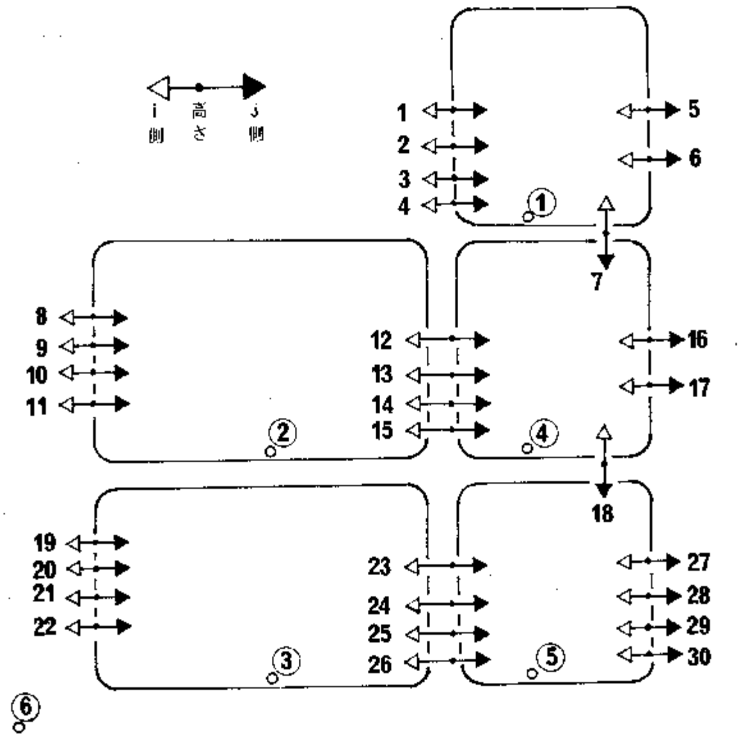
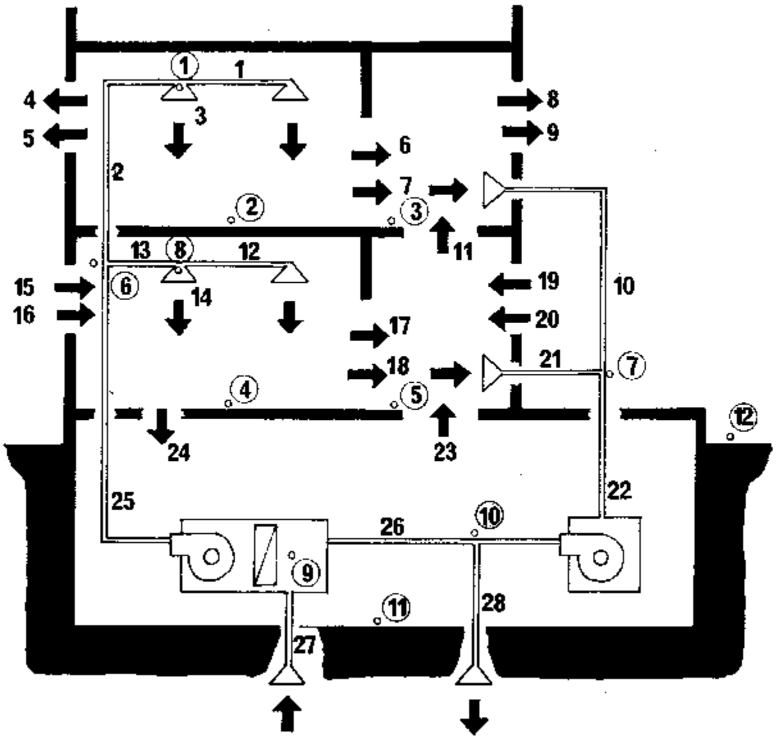


図5-4　建築換気系の計算モデル化の方法



上図の建物を下図の様にモデル化する

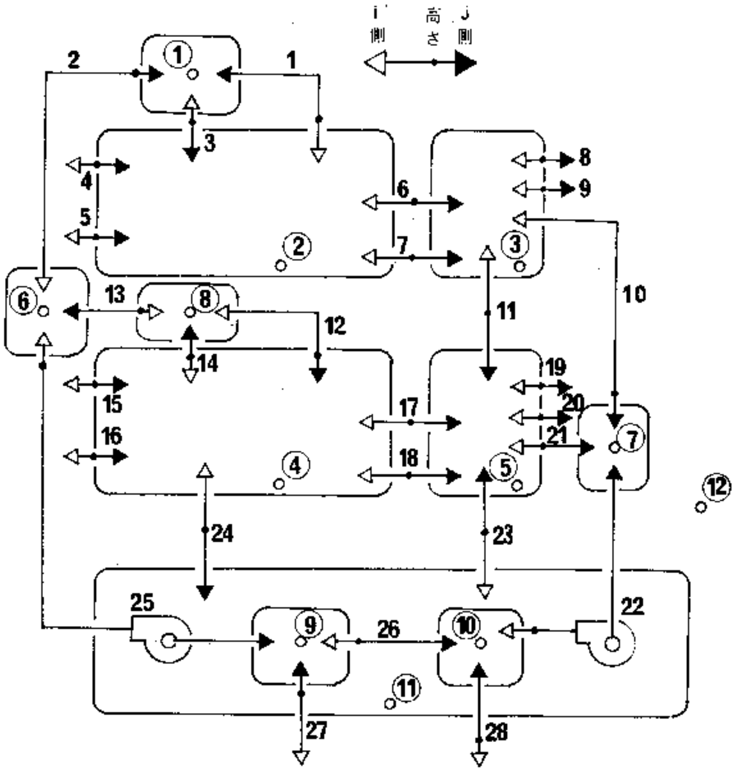


図5-5　機械換気系の計算モデル化の方法

さらにダクトのように長い通気路の高さをどのように定めるかについても注意が必要である．通気路も集中定数化されて，点として見なされるわけだから，この点の高さの定め方が問題となる．前述したように全圧節点はそれぞれ実際上の，あるいは仮想上の室を持つものと見なせる．従ってダクトの，ある位置が，その通気路の高さにとられたとすれば，その位置をはさんで，それぞれのダクト内の空気温度は，それぞれにつながっている室の空気温度に等しいと見なされる．そこで比較的に短いダクトの通気路において，送風機によって少なくとも流れの向きがわかっていれば，ダクト内の空気温度は入口側の室の温度にほぼ等しいわけであるから，通気路の高さとしては出口のところにとるのが適当であることになる．図5-5においては，25番の通気路は，仮想的な室⑨と⑥の間にあるわけであるが，流れの向きが⑨から⑥に向かっているため，この高さは⑥の近くにとることになる．

送風機については，必ず1個の送風機は1本の通気路に付いているものとしてモデル化する．そして，これの持つ属性は，計算法のところで述べたように，i側から加圧するか，j側から加圧するかの識別と，風量対全圧の関係を示す特性曲線である．

最後に換気回路網のモデルをつくる手順を述べる．

(1) 建物全体を換気モデル上のセルに分割する．

(2) 通気路の集中定数化を行う．セルとセル，セルと外気との通気路を定める．
上下方向に長い開口は上下にいくつかに分割し，それぞれの高さの中心に集中定数化する．

(3) 圧力節点についてのデータをつくる．
各セルの底面での静圧を圧力節点とみなす．圧力節点に番号をつける．外気は最後の番号にする．節点の高さを与える．

(4) 各通気路において次のデータをつくる．
○任意にi側，j側の定義をする．
○i側，j側の圧力節点番号を求める．
○高さを求める．
○通気抵抗を定める．

なお，送風機などがある場合は，通気路の属性として定義することになる．

以上の議論における全圧節点系の概念と，前節の計算法で説明したデータ構造及びアルゴリズムによって，どのような換気系でも一般的にモデル化され，かつ解けることが示された．

5.3 換気系と熱系の連成

換気計算法についてのこれまでの扱いでは，空気温度に従い空気比重量は与えられるものとしてきた．ここでは空気温度も未知数である場合のモデル化の方法と解き方を述べる．例えば自然換気の起きている建物を考える．外気よりも室内が暖かければ，浮力あるいは煙突効果によって，建物の下部から外気が侵入し，上部から室内の空気が出ていく．つまりこの換気風量は温度差に関係している．逆に外気の侵入量が多ければ室温は下がる．すなわち，温度差は換気風量に関係している．こうしたことを換気系と熱系は相互影響を持つと表現する．実際の現象は定常的な意味であれ，非定常的な意味であれ，2つの系の平衡状態として表われている．これを計算上も考慮するためには，まず換気系モデルと熱系モデルの連成方法を考えなければならない．

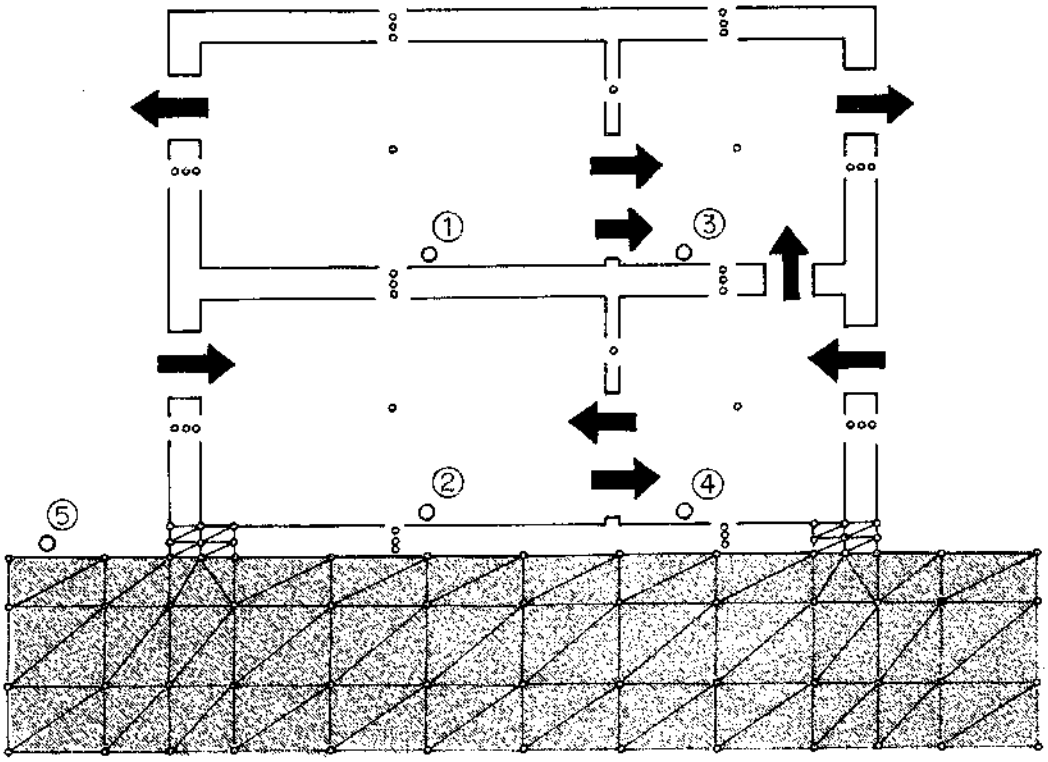


図5-6　熱系と換気系の連成

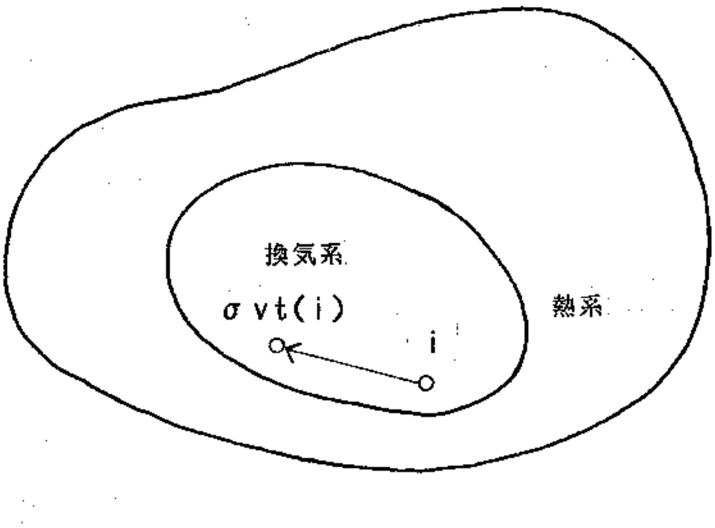


図5-7　熱系と換気系の節点の包含関係

換気系は空気比重量を入力とし，風量を出力とする．一方，熱系は風量は入力とし，空気比重量を出力とする．すなわち互いに，一方の入力はもう一方の出力になっている関係にある．両者の系が線型システムで記述できていれば，こうした相互関係も考慮した全体の線型システムが記述できる．しかし換気系は前述したように本質的に非線型を持つから，そのようにすることは困難である．換気系を逐次的に線型近似化することも不可能ではないが，逐次であるがゆえの複雑さが残る．本論文では，単に両者の系を交互に繰り返し計算していく過程によって，この連成を実現することにする．もし定常状態を求めようとする場合には，繰り返し計算過程において，温度あるいは風量がほとんど変化しなくなった状態をもって解とする．このとき逐次の温度の更新には適当な緩和係数をかけることが必要である．また非定常状態を求めようとするときには，時間積分のΔtの時間間隔だけの遅れを許して，一方の出力をもう一方の入力として，時間軸方向の計算を進めていく．

熱系は熱回路網のモデルで表される．これは熱容量を持つ節点系である．換気系は全圧の節点系で表される．両者の系の節点が持つ物理量は異なっていても，ある1つの室については，それぞれから1つずつの節点が対応する．しかし熱系における固体中の伝導を表す節点には，換気系の節点で対応するものはない．こうした様子を描いたのが，図5-6である．換気系の節点は室数に外気の分を足した個数しかない．これに対し熱系の節点は壁体中の節点のほか，地盤中の節点などが加わった個数となる．なお，この図の例では，地盤伝熱は有限要素法でモデル化し，壁体などでは検査体積法でモデル化して，両者を第2章で述べた接続法でつないで，全体の熱回路網モデルをつくっている．従って熱系と換気系の節点については図5-7で示すような包含関係が成り立つ．

このような両系の節点番号の対応をとる関数を定義する．$\sigma_{vt}(i)$は換気系の節点番号を熱系の節点番号に対応づける関数である．すなわち，iが換気系の節点番号，$\sigma_{vt}(i)$が熱系の節点番号となる．この関数が実際の計算プログラムで持つ形は単なる配列ですむ．

さて，この節点番号の対応関数を用いて，まず換気風量を拡張熱コンダクタンスにすることができる．熱系のj番節点からi番節点への拡張熱コンダクタンスをc_{ij}とすれば，これは次のアルゴリズムで計算される．

$$
\left[\begin{array}{l}
k=1,2,\cdots,m \text{ について} \\
i \leftarrow \sigma_{vt}(\sigma_d(k)) \\
j \leftarrow \sigma_{vt}(\sigma_u(k)) \\
c_{ij} \leftarrow c_{ij}+3600\cdot c_p\cdot\gamma\cdot q(k)
\end{array}\right.
\tag{5-51}
$$

ここで，c_p, γはそれぞれ空気の比熱，比重量である．3番目の代入式において右辺にもc_{ij}が表われているのは，同一方向の風量は重ね合せていることを表している．

次に熱系からの出力としての温度は空気比重量に換算されて換気系へ与えられる．建築換気系の場合は，空気温度と比容積の関係，ひいては空気温度と比重量との関係に，ゲイ·リュサックの法則がほぼ成立すると考えられるから次のアルゴリズムで，温度xから比重量γが計算される．

ただし，nは換気系の総室数で，$n+1$は外気を表す．

$$\begin{cases} i=1,2,\cdots,n+1 \text{ について} \\ \gamma(i)=353.2/(273.2+x(\sigma_{vt}(i))) \end{cases} \tag{5-52}$$

このようにして両系のつながりがとれ，前述した計算手順によってその相互影響が計算上模擬される．

5.4 換気シミュレーションの検証

ここではシミュレーション結果と実測結果の比較を，換気現象の中でも把握の比較的に困難な隙間風について行う．この種の自然換気量はある特殊な状況下ではきわめて重大な意味を持つことがある．この実験および実測のデータは受託調査の報告書[84)85)]に詳述してある．

多数室の換気モデルにおいて用いる係数のうち重要なものは通気抵抗係数と指数，あるいは風圧係数である．これらの係数は，代表的な形状のものについては文献資料に載っているが，実際のものと少し異なる場合もある．例えば窓の金属性サッシであれば，隙間についての断面形状はメーカーごとに異なっている．また風圧係数は建築外形の意匠上のバリエーションによってだけでなく，近隣建物の状況によっても変ってくる．一方，通気抵抗の係数は加圧箱を用いて実験的に求めることもできる．また風圧係数は近隣建物まで再現した模型を風洞の中に置いて，やはり実験的に求めることができる．シミュレーションと実測の違いの原因を考えるためには，これらの係数を実験によって確かなものとしておいた方がよいであろう．なお，換気風量の実測はシミュレーションモデルと同様に多数室系で行なうようなものでなければならないが，この測定法と測定データ解析法については第6章で述べる方法を用いる．

測定を行なったのは鉄筋コンクリートアパートの一戸分である．この建物は3階建であり，一戸あたり3DK程度である．建物の配置図を図5-8に，図5-9から図5-12にこの立面図と断面図を示す．図5-13は一戸分の平面図を示す．測定対象の室は北側のはじの1階部分である．この建物は東京の烏山に所在する．

5.4.1 通気抵抗の実験

窓サッシやドアの隙間の通気抵抗係数ζと指数ηを，加圧箱と呼ぶ試験装置を作製して，実験的に求めた．この装置を図5-14から図5-17に示す．これは，ドアや窓を普通の状態にとりつけた壁状の試験体の両側に差圧を与え，この差圧と隙間を通過する風量を測定するものである．風量の大小に応じて送風機を3台備えている．風量は整流管の途中のアニューバ(商品名·米国製·ピトー管の改良型)か，あるいは風量の小さいときにはフロート式流量計で測定した．差圧はバラトロン(商品名·米国製)という金属薄膜ダイアフラム式の微差圧計で測定した．ある隙間について，差圧と風量が何組みか測定されれば通気抵抗係数ζと指数ηは最小二乗法によって回帰される．隙間は開口面積が定めにくいため，通常の開口については面積を用いるところを，長さによって置き換えて扱う．試験体がドアの類であれば，その4辺に4本の隙間を，引違いの窓サッシの類であれば，引違い部分を含めて7本の隙間を持つことになるが，実験はそれぞれの隙間の1本ごとに行ない，ζとηは隙間の単位長さ当りで定義されるものを求めた．ただし試験体の全ての隙間を目張

りした状態でも，目につかない，また予期しないところから空気が漏れるので，あらかじめこの状態での何通りかの差圧と風量を測定し，較正曲線をつくっておく．そして，それぞれの隙間の試験においては，この較正曲線を用いて正味の通過風量に直す．

当測定建物が持つドアや窓サッシと同一のものをはめこんだ試験体を製作した．これらはスチールドア1体，スチールサッシ2体，滑り出し窓1体，換気扇ダンパ1体，間仕切用の木製ドア2体の計7体である．

例えばスチールドアの1本の隙間についての試験結果を図5-18に示す．またスチールサッシ窓については図5-19に示す．追加としてゴムのウェザーストリップのついたアルミサッシについても実験したが図5-20に示す．これらのグラフ中の図は隙間の断面形状と，その隙間が全体のどの部分かを示す．外とか内というのは加圧箱の外側か内側かということである．グラフの中の数式において$Qc(l/min)$とは較正された風量を表わし，$Qs(m^3/s)$とはQcの単位を変えたものである．ほとんどの隙間の抵抗係数は10の4乗から8乗の大きさを持つ．そして抵抗指数は1から2の間にあることが確認された．スチールサッシはさまざまな部位の隙間で平均すると10の6乗程度であり，これに対しアルミサッシは10の8乗程度であった．

5.4.2　風圧係数の実験

実測の建物と近隣の状況まで再現した1/150の模型を製作した．図5-21に示す破線の円内が模型化した範囲である．模型の様子を写真5-1と写真5-2に示す．当アパートの模型には風圧測定用の孔を合計116個設けた．これらを図5-22にに示す．孔の番号36~62と96~107のところが密集しているが，これらのところに実測の室が存在する．

実験を行なったのは図5-23に示すような回流式境界層風洞で，測定部の断面は幅$2.6m$×高$2.1 \sim 2.4m$，測定部の長さは$18.9m$である．図5-24には測定方法の概要を示す．各々の風圧測定孔からビニールチューブを介して圧力を多点圧力測定器(SCANI VALVE-D9)に導き，模型表面の圧力と自由風速の静圧との差を測定した．ターンテーブルの風上端の風洞中央で，高さ$1.5m$の位置にピトー管を設置した．このピトー管の静圧を自由風速の静圧に，動圧を自由風速の速度圧として用いた．圧力変換器の出力は0.016秒のサンプリングタイムで30秒読みとり，計算機によって平均値を求めた．垂直方向の風速分布は，模型の風上側のラフネスの配置によって調節した．この分布は，当建物が市街地にあることから，指数法則[15)]の1/4に合うようにした．現場の実測においては屋上の給水塔の上部で風向風速を測定したので，これに対応する模型の位置での風速は，その指数法則で求めた．またその位置の風速を基準風速として風圧係数を定めた．なおこの実験において実際に与えた自由風速の値は$20m/s$である．得られた風圧係数の一部は図5-25から図5-29に示す．この実測した室のところでは風圧係数は負の面が多い．正になっているのは北東風の時の東面ぐらいである．しかし西面は南西風の時でも負である．このように負の面積が大きい原因は，周囲の建物の影響，西面のベランダの板状突起などによって単純にはわからない．しかし一般的にも，建物全体において風向に直面する面が正になり，他の側面や風下面など大部分の面では負になる傾向があるから，あり得ないことではない．

5.4.3 実測値とその比較

前述した通気抵抗係数と指数，さらに風圧係数を用いて換気モデルを作った．窓サッシやドアの隙間は垂直または水平であるが，垂直のものは高さ方向に30cm程度ずつ区切ってそれぞれを通気路とした．従って例えば一組の掃出し窓については計22本程度の通気路を持つことになる．このような通気路の集中定数化によって，窓の上部と下部で流れが逆になるような現象もモデル化される．このアパートの一戸の総室数は玄関部も含めて計7室ある．従って換気回路網のモデルは7つのセルと，210本の通気路を持つ．このモデルを駆動するためには外気温，各室温，外気の風向風速が必要である．

実測は，換気モデルを駆動するためのこれらのデータの測定と，比較基準となる換気風量の測定を行った．換気風量の測定は第6章で述べる同定理論によって行った．この実測は1回当り約6時間かけ，3回行った．換気風量は時々刻々変化するものであるが，換気測定ではその時間帯における平均的なものが求まる．一方，換気シミュレーションは外気温や室温の変化，あるいは風向風速の変化に瞬間的に追随していくものとして行う．比較的に温度の変化は緩やかであるが，風向風速の変化は激しい．風向はベーン型の，風速は3杯型のセンサーを用いて測定し，記録はペンレコーダで行った．そしてこの記録用紙から，15分間隔ずつの平均的な値を読みとった．従って換気シミュレーションモデルに与える条件は，外気温や室温も含め，15分間隔とした．この時間間隔で，シミュレーション結果である換気風量も変化していくが，換気測定の約6時間に対応するように，平均的な値に直して比較を行った．

実測結果と解析結果を並べて，図5-30から図5-32に示す．それぞれ1月21日(1985)，1月23日，1月24日の3回の結果である．換気測定の時間帯における外気風速の平均的な大きさは，図の順序と同じくそれぞれ，4.58m/s，3.65m/s，2.56m/s，である．また室の容積平均的な室温から外気温を差し引いた温度差はそれぞれ，-0.71℃，-2.32℃，1.52℃である．一戸全体での換気回数で実測値と計算値を比較すると，それぞれ1.65回/hに対し1.20回/h，1.00回/hに対し1.12回/h，0.70回/hに対し0.75回/hとなっている．最大の誤差は約30%である．ただし，個々の風量で比較するとかなり違っているものも見られる．この誤差の原因は主として，風圧変動が精密に与条件としてとり入れられなかったことや，建具の隙間は可動部分の合せ目にあるから，隙間の断面形状が変化しやすい不確定なものであるため，等ではないかと推定される．この建物は3層であるが圧力的には各層は独立しており，測定したのは1階部分である．従って換気駆動力の支配的なものは風圧である．実測中は暖房していないことや低層であることにより煙突効果は比較的に小さい．さらに風の乱れは時間的にも空間的にも高層部分よりも低層部分において大きい．このことは風洞実験によって確認されている．模型の風洞実験で得た風圧係数は，こうした乱れを時間的に平均化して扱っている．また実験で得られた風向風速の変動も15分間で平均化している．このようなことから，実際のすばやい風向風速の変化が反映されなかったことが考えられる．少なくとも，変動の大きい風圧の影響が支配的な場合における隙間風の換気シミュレーションは，伝熱シミュレーションほどの予測精度は出せないということが言える．

さらに同様な比較を別の2種の建物においても行った．これらの建物は，きわめて古い木造2階建の住宅(東京·奥沢)と，メゾネット式の2階建鉄筋コンクリートアパート(東海村·長堀)である．前者は窓やサッシの建具は木造，後者はアルミサッシである．これらの建物の持つ隙間の位置や

大きさについては現場での観察を行い，またその通気抵抗や指数については原則的には文献資料[83]により定めた．ただし資料にない隙間形状のものは加圧箱の実験を行った．風圧係数についても原則的には文献資料にもとずいたが，建物形状が全く同じでない場合は類推したところもある．これらのモデルの諸係数を定めるのは木造建物の場合が最も困難であった．それは隙間の所在を確定するのが難しいうえに，1本の隙間をとってみても，ひずみにより隙間幅が均一でなかったりしているからである．さらに風圧係数についても周囲の隣家の影響は考慮できなかった．一方，メゾネット式アパートの場合は，周囲が広い野原に近い状態であることにより，比較的に確かな風圧係数であると思われる．しかし多くの実際的な場面では，このようにいくつかの不確定要因を残したまま予測計算するわけであるから，それでもなおかつどの程度の予測精度があるのか検討するのは意味がある．

これらの2種の建物についての測定結果と計算結果の比較は，それぞれ2回ずつの実測に対応し図5-33から図5-36に示す．やはり木造建物の場合は，全体的な換気回数でみて，誤差は40%にも達する場合がある．一方，鉄筋コンクリート造メゾネット(長堀)の場合には比較的に誤差は小さくなるがそれでも20%程度の誤差を持つことがある．

さらに以上の3種の建物について実測値と計算値の比較を相関図としてまとめると図5-37-Aから図5-37-Iのようになる．図5-37-Aから図5-37-Dが風量ごとの相関図であり，それぞれ烏山アパート，奥沢木造住宅，長堀メゾネットアパートとこれら3つの建物まとめてのものである．図5-37-Eから図5-37-Hまでは室ごとの換気回数の相関図であり，同じようにそれぞれ烏山アパート，奥沢木造住宅，長堀メゾネットアパートとこれら3つの建物まとめてのものである．最後の図5-37-Iは一戸全体の換気回数を3つの建物全部についてまとめたものである．プロットのシンボルは共通して烏山アパートは○，奥沢木造住宅は□，そして長堀メゾネットアパートは△を用いている．烏山アパートについては計算モデルの諸係数を実験により与えたものであり，他はそれを文献資料により与えたものとなる．特に奥沢の住宅は古い木造であり，かなり不確かさを残した計算モデルが用いられている．

これらの相関図を全般にわたって見ると，風量ごとの相関が悪いのに対し，比較的に室ごとあるいは一戸全体の換気回数の相関は良いという傾向がある．風量ごとの相関図において，どちらかの座標軸上にのっているプロットのものは空気の流れが両方向ではなく片方向だけの場合を表わす．風量ごとの相関についてr表により検定すると，長堀メゾネットの場合だけ5%の危険率で，あとのものは1%の危険率で有意性があると言えるが，回帰直線の傾きから計算値の風量は小さめになるという系統的な差異があることがわかる．一方，室ごとの換気回数については全て高度に有意な相関がある．しかしこれも計算値の風量は測定値のものより少し小さめになる系統的な差異をもつ．ところが一戸全体の換気回数ではこの系統的な差異はさらに小さくなる．すなわち，一個ずつの風量を正確に予測するのは困難であるが全体的な換気回数については，計算値は実測値の傾向をとらえているといえる．

以上の検討により言えることをまとめると次のようになる．風圧および風圧変動による換気駆動力が支配的に働く低層の住宅の場合においては，隙間風換気を本論文のような換気シミュレーションによって正確に予測するのは困難であり，単に傾向を把握できる程度である．隙間の所在と形状が比較的に明確な鉄筋コンクリートアパートにおいて，通気抵抗の加圧箱試験と風

圧係数の風洞実験によってモデルの諸係数を比較的に確かなものにしてさえも，換気回数の予測誤差は約30%に達することがある．さらに木造住宅のように隙間の所在と形状が不明確な建物で，モデルの諸係数も一般的な文献資料によって得た場合には，予測誤差は約40%にもなることがある．しかし同様に文献資料によった場合でも，鉄筋コンクリートのメゾネットアパートでは予測誤差は最大約20%におさまっている．こうした計算と実測の差違の原因は，建具の隙間は可動部分から出来ているので動きやすく不確定的であることや，風圧係数はそもそも静的な現象の扱い方によるものであり，風の乱れなどの動的な実態を再現しにくいこと，などがあげられる．また可能性のあることとして，静的あるいは定常的な換気計算の限界ということも考えられ，この場合は動的な換気計算法の必要性を示していることになる．ただし現状の工学においてこのような動的換気計算法が必要とされているのは，暴風時に瞬間的に窓が破壊され，吹き込んだ風により屋根が吹き飛ばされる現象の解析等ぐらいのようである．この場合は急激な室内圧の増加と減少の振動がきわめて短い時間に起こるものと考えられる．

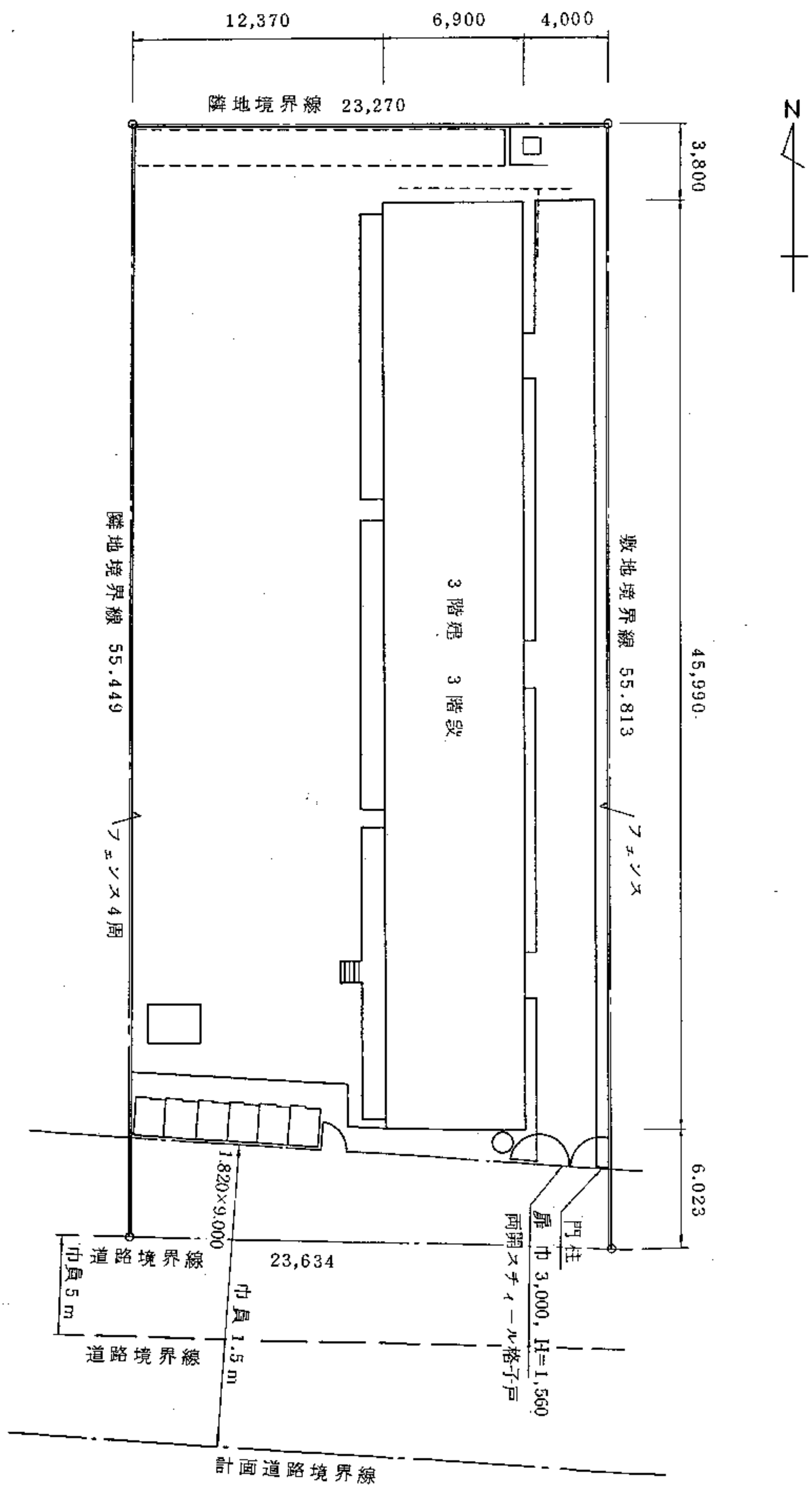

12,370
6,900
4,000
隣地境界線 23,270
3,800
隣地境界線 55.449
3階建 3階段
敷地境界線 55.813
45,990
フェンス4周
フェンス
6.023
1,820×9,000
門柱
扉 巾 3,000, H=1,560
両開スチィール格子戸
道路境界線
23,634
巾員5m
巾員1.5m
道路境界線
計画道路境界線

図5-8　配置図

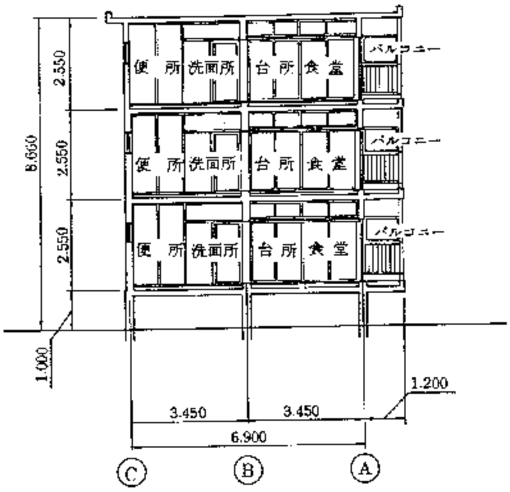


図5-12　断面図

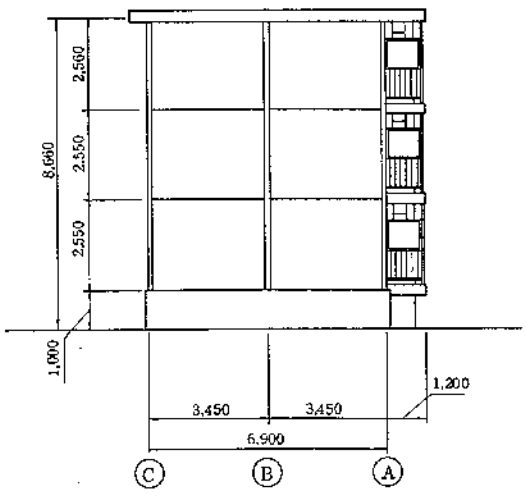


図5-11　北立面図

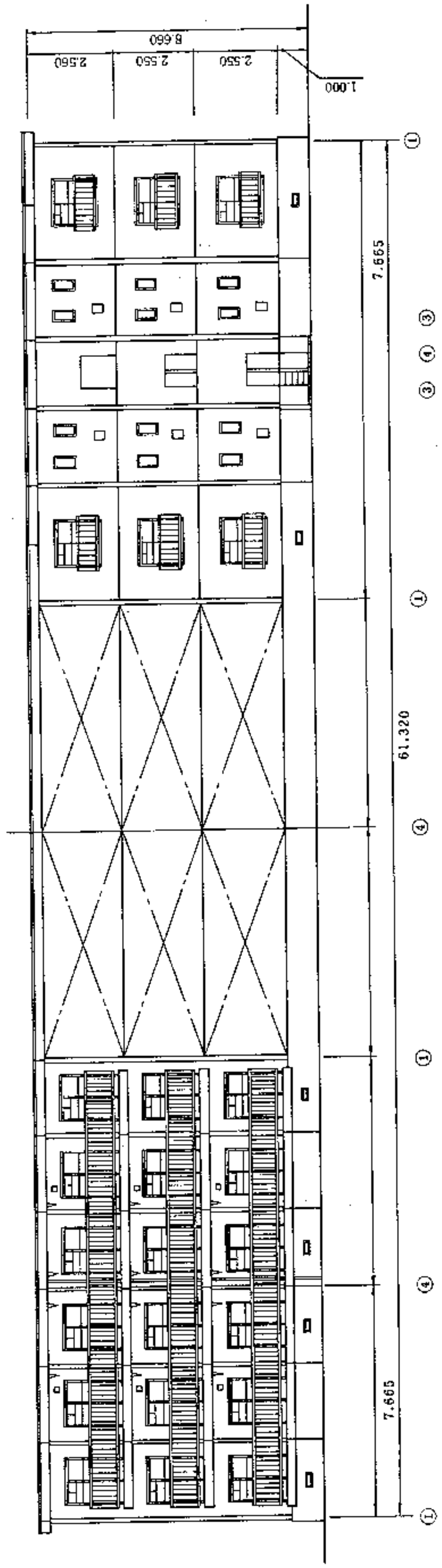


図5-10　東立面図

図5-9　西立面図

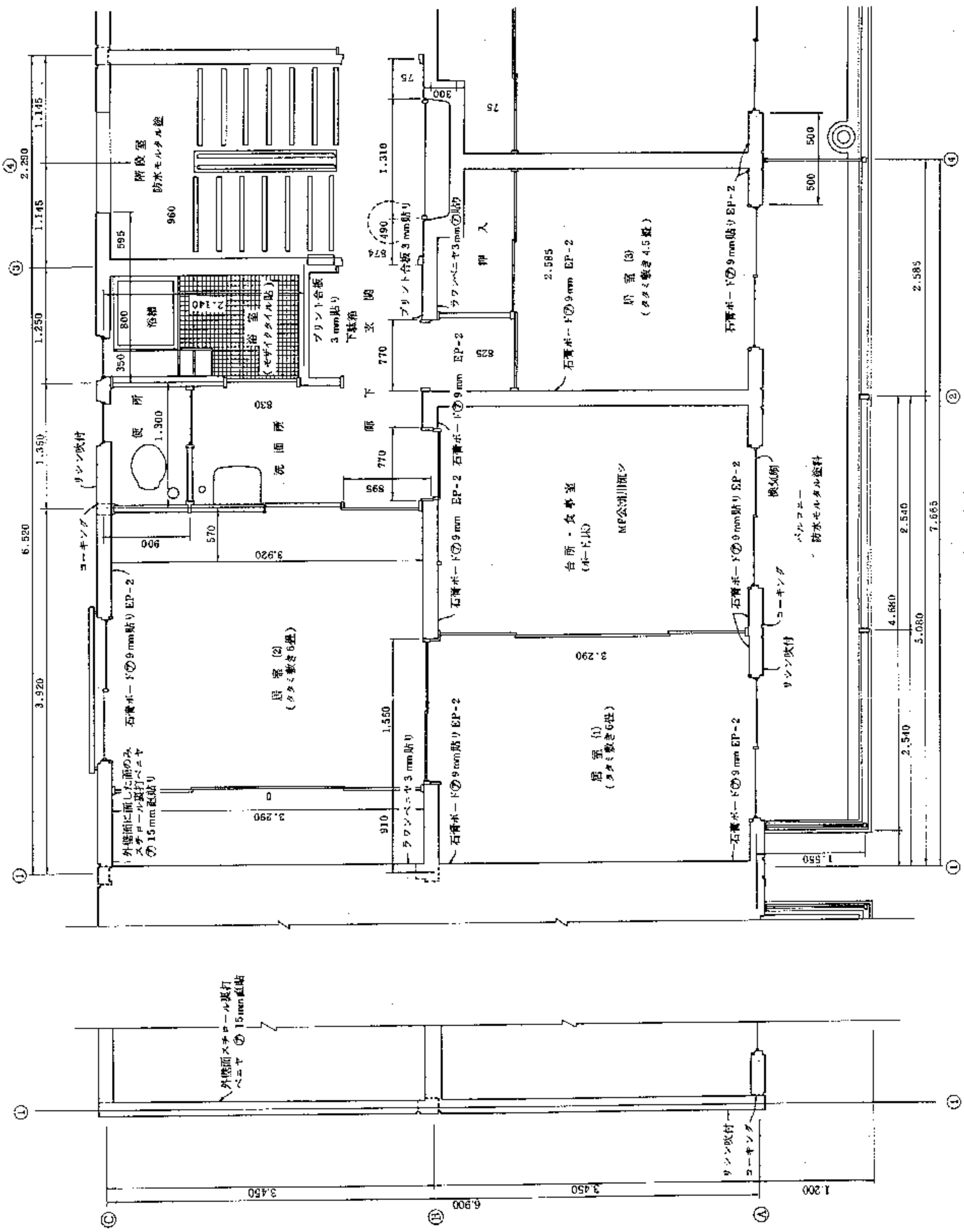

階段室
防水モルタル塗
浴室
(モザイクタイル貼)
浴槽
便所
洗面所
玄関
廊下
押入
居室(1)
(タタミ敷き6畳)
居室(2)
(タタミ敷き6畳)
居室(3)
(タタミ敷き4.5畳)
台所・食事室
バルコニー
防水モルタル塗
リシン吹付
コーキング
EP-2

図5-13　間取り図

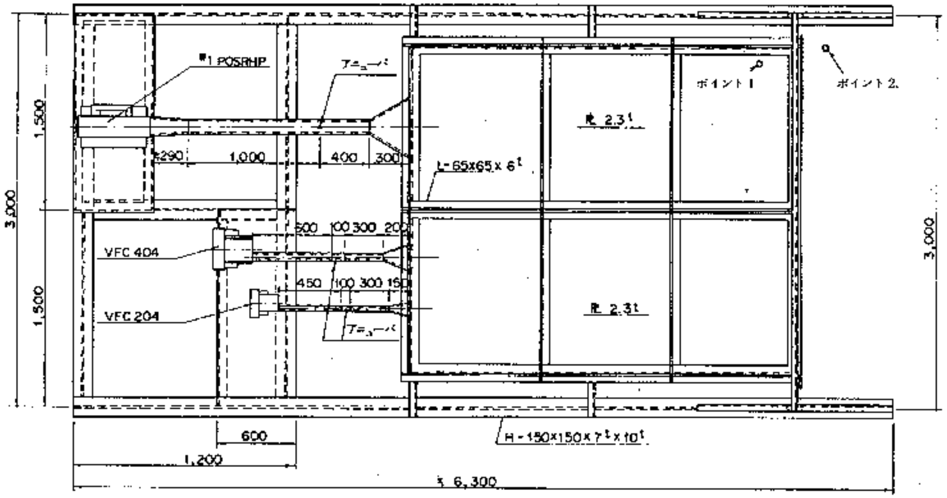


図5-14　加圧箱平面図

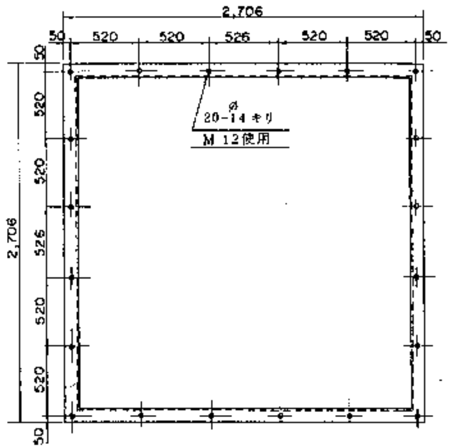


図5-17　試験体枠

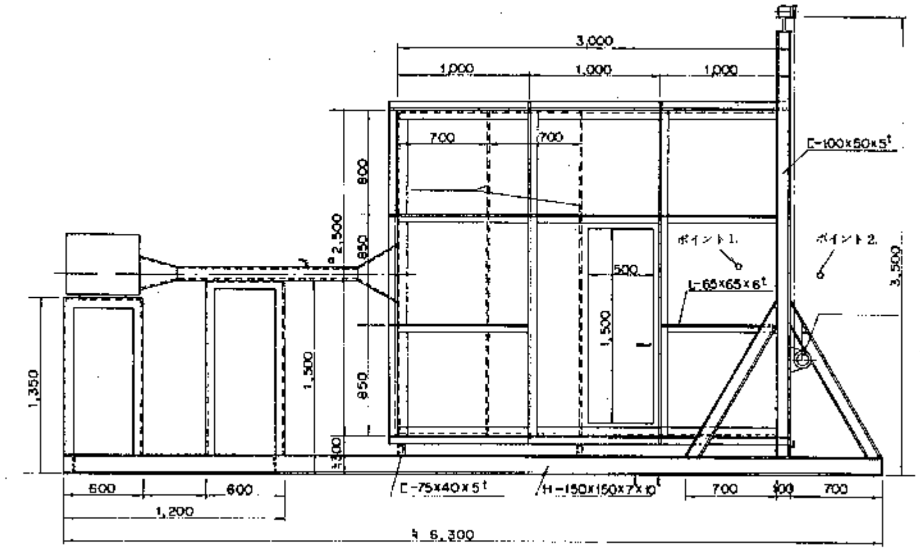


図5-15　加圧箱側面図

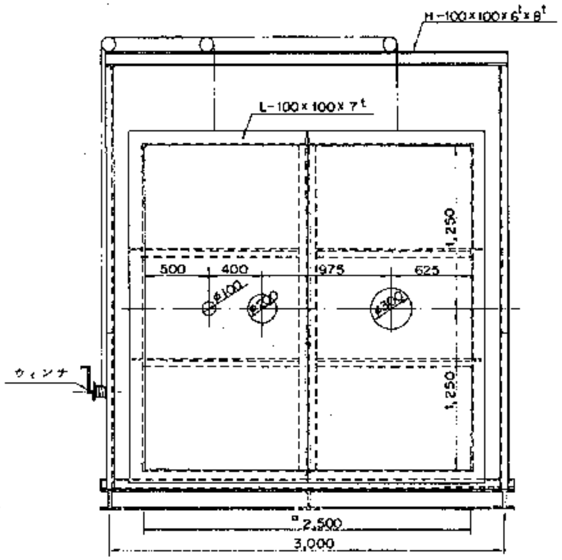
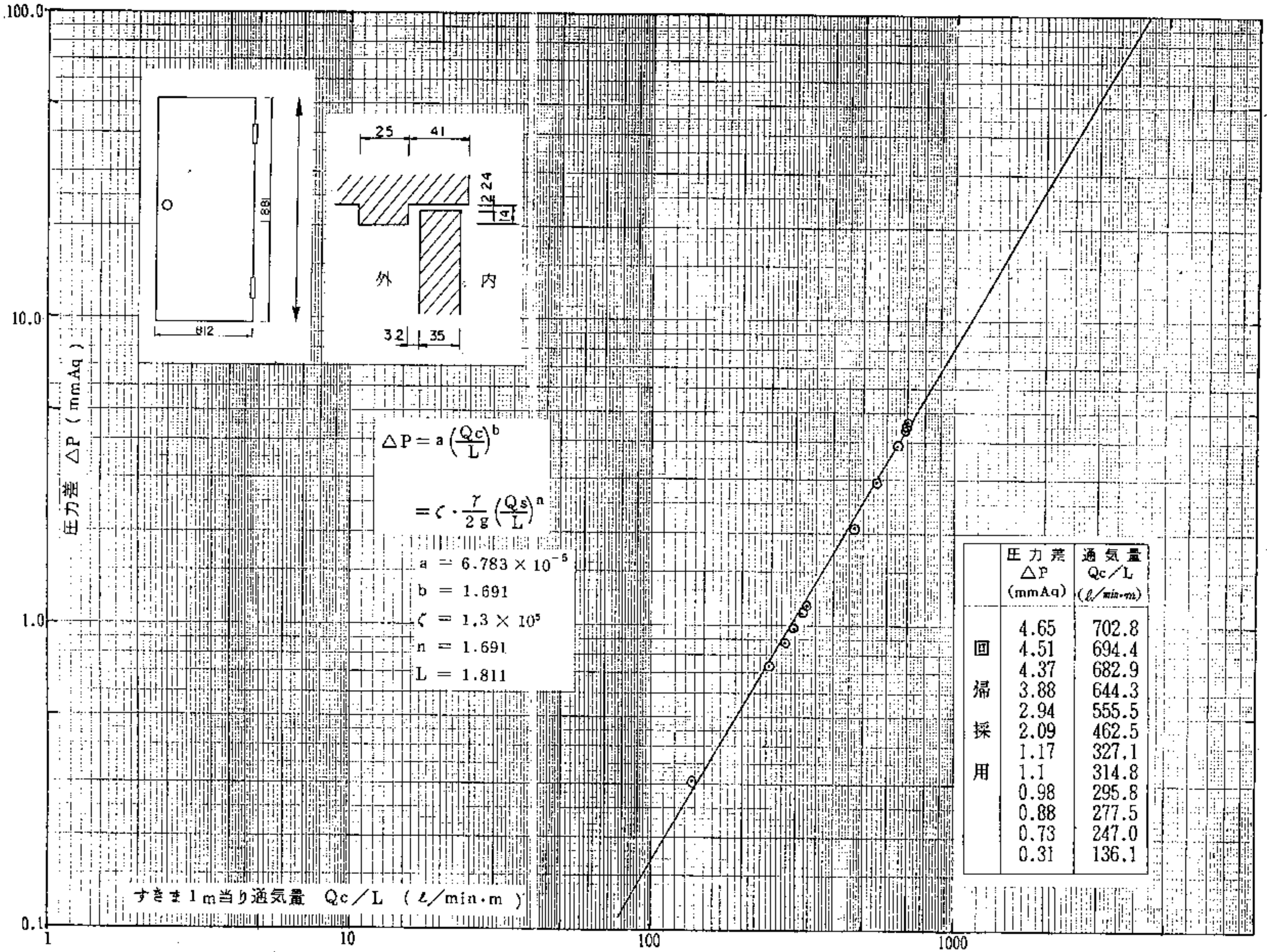


図5-16　加圧箱正面図



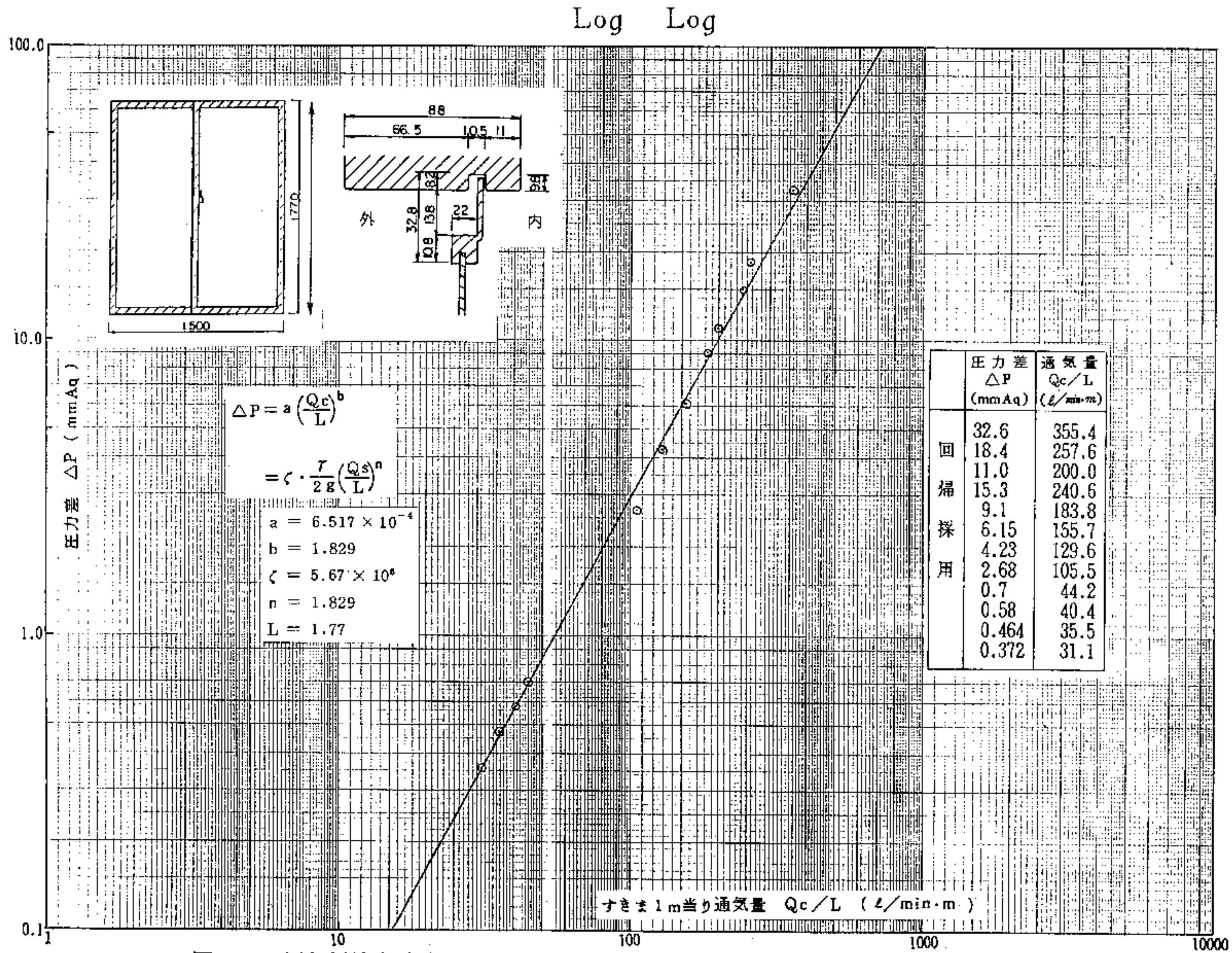
$$\triangle P = a\left(\frac{Qc}{L}\right)^{b}$$

$$= \zeta \cdot \frac{\gamma}{2g}\left(\frac{Qs}{L}\right)^{n}$$

$a = 6.783 \times 10^{-5}$
$b = 1.691$
$\zeta = 1.3 \times 10^{5}$
$n = 1.691$
$L = 1.811$

	圧力差 △P (mmAq)	通気量 Qc／L (ℓ/min·m)
回帰採用	4.65	702.8
	4.51	694.4
	4.37	682.9
	3.88	644.3
	2.94	555.5
	2.09	462.5
	1.17	327.1
	1.1	314.8
	0.98	295.8
	0.88	277.5
	0.73	247.0
	0.31	136.1

図5-18　通気抵抗実験結果・スチールドア・内側から見て右の隙間



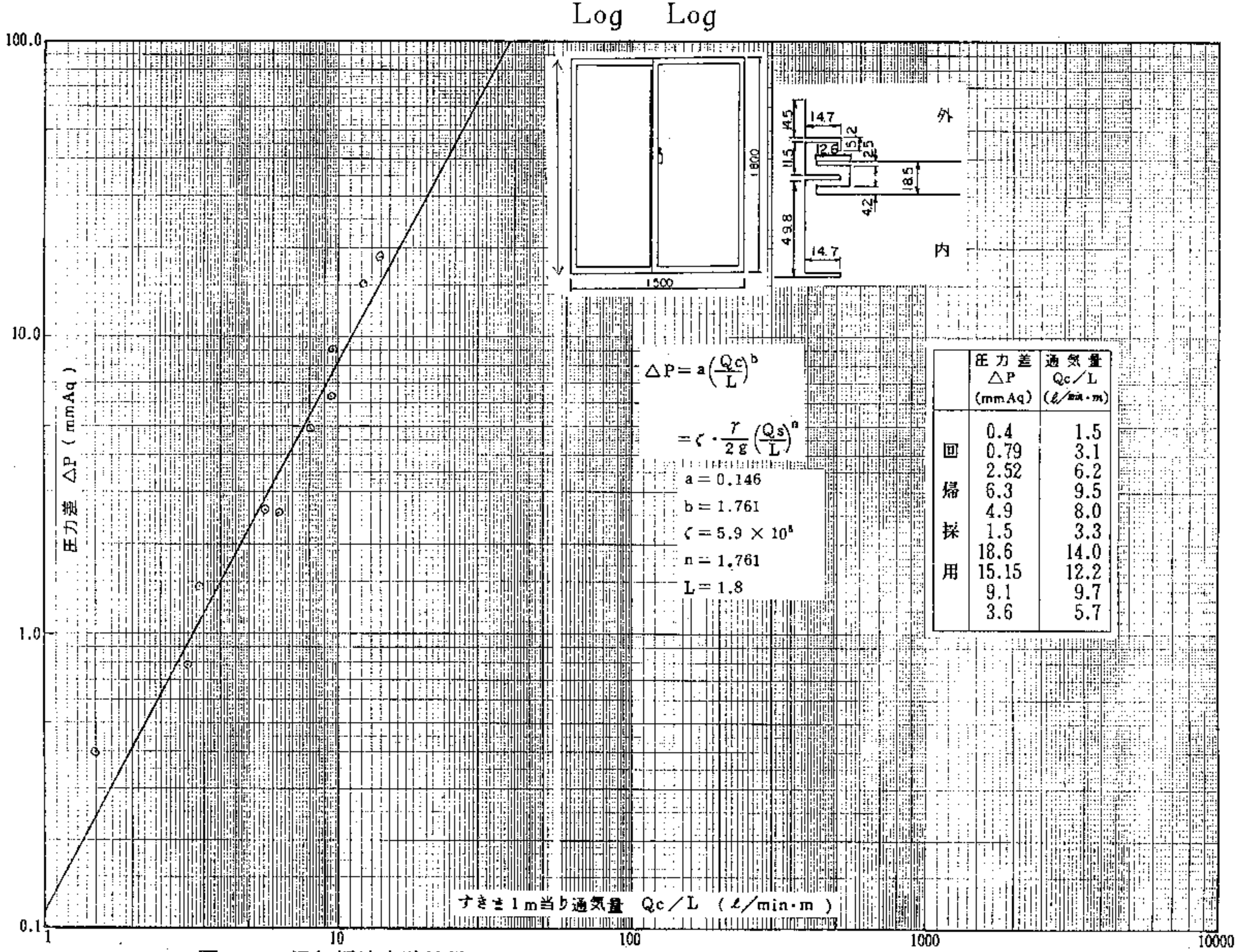
$$\triangle P = a\left(\frac{Qc}{L}\right)^{b}$$

$$= \zeta \cdot \frac{\gamma}{2g}\left(\frac{Qs}{L}\right)^{n}$$

$a = 6.517 \times 10^{-4}$
$b = 1.829$
$\zeta = 5.67 \times 10^{6}$
$n = 1.829$
$L = 1.77$

	圧力差 ΔP (mmAq)	通気量 Qc／L (ℓ/min·m)
回帰採用	32.6	355.4
	18.4	257.6
	11.0	200.0
	15.3	240.6
	9.1	183.8
	6.15	155.7
	4.23	129.6
	2.68	105.5
	0.7	44.2
	0.58	40.4
	0.464	35.5
	0.372	31.1

図5-19　通気抵抗実験結果・スチールサッシ・1500×1770・内側から見て右の隙間



$$\triangle P = a\left(\frac{Qc}{L}\right)^b$$

$$= \zeta \cdot \frac{\gamma}{2g}\left(\frac{Qs}{L}\right)^n$$

a = 0.146
b = 1.761
$\zeta = 5.9 \times 10^5$
n = 1.761
L = 1.8

	圧力差 △P (mmAq)	通気量 Qc／L (ℓ／min・m)
回帰採用	0.4	1.5
	0.79	3.1
	2.52	6.2
	6.3	9.5
	4.9	8.0
	1.5	3.3
	18.6	14.0
	15.15	12.2
	9.1	9.7
	3.6	5.7

図5-20　通気抵抗実験結果・アルミサッシ・1480×1750・内側から見て右の隙間

図5-21　周囲状況・円内を模型化

写真5-1　模型の西側

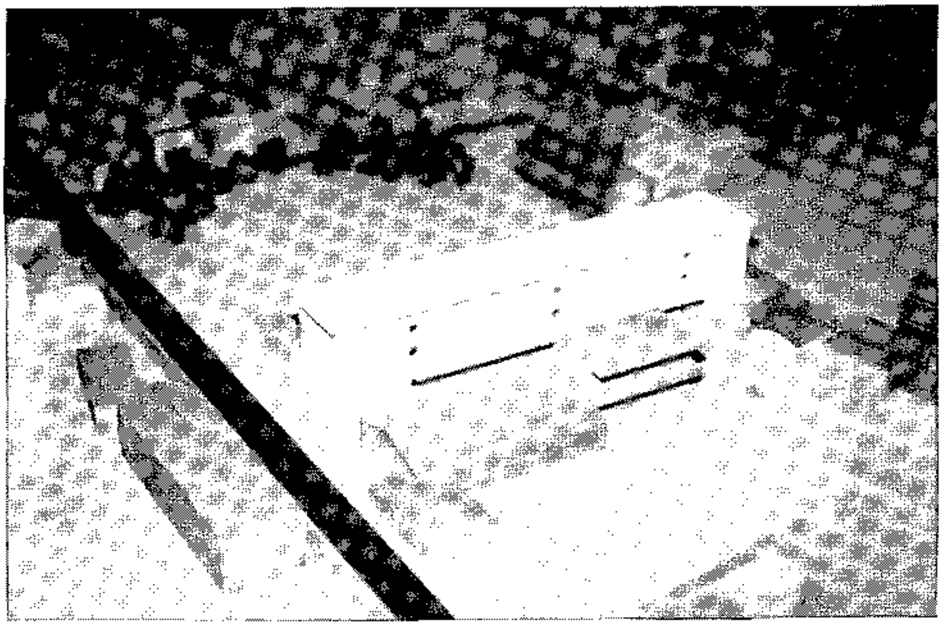


写真5-2　模型の東側

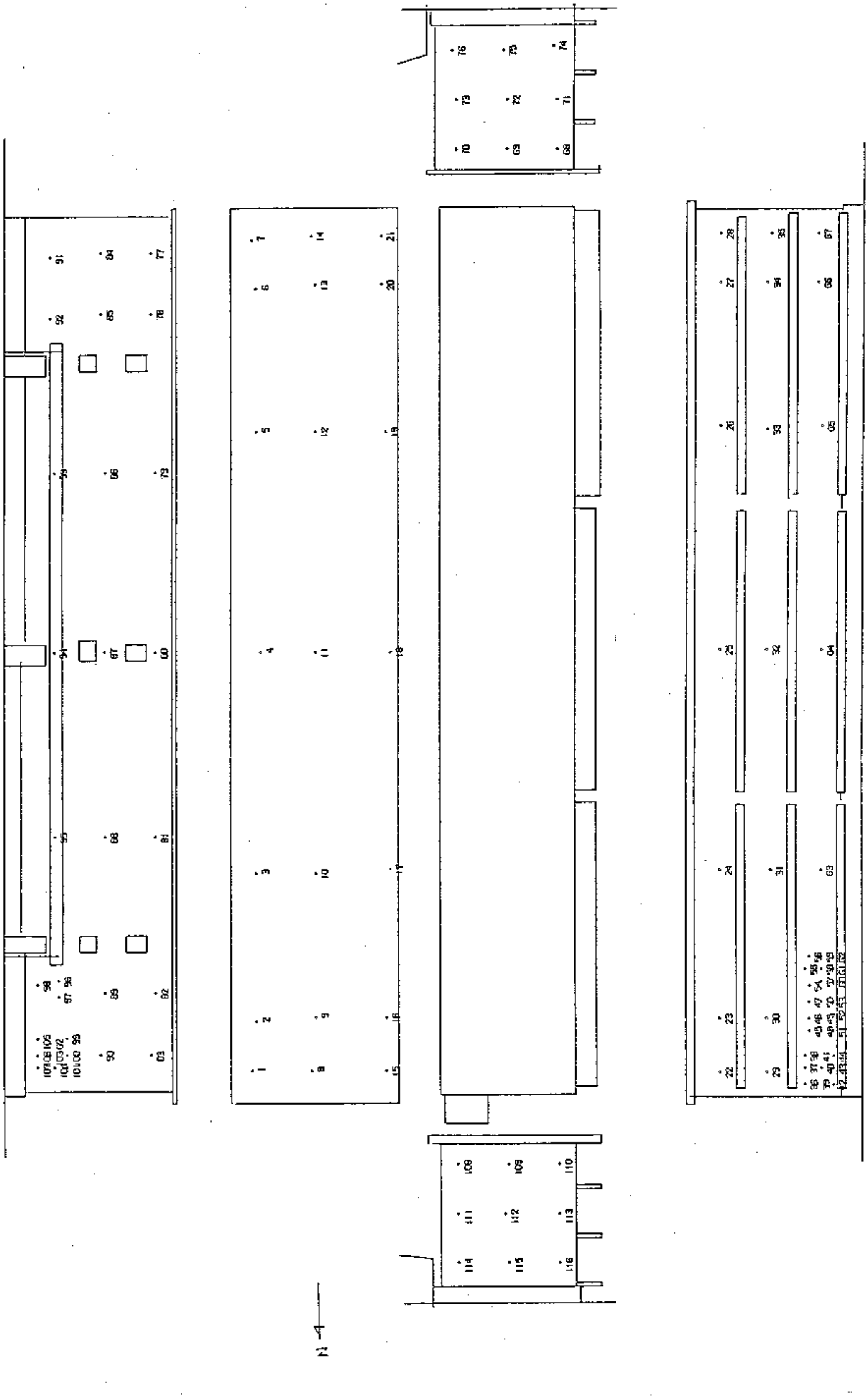


図5-22　模型の風圧測定孔

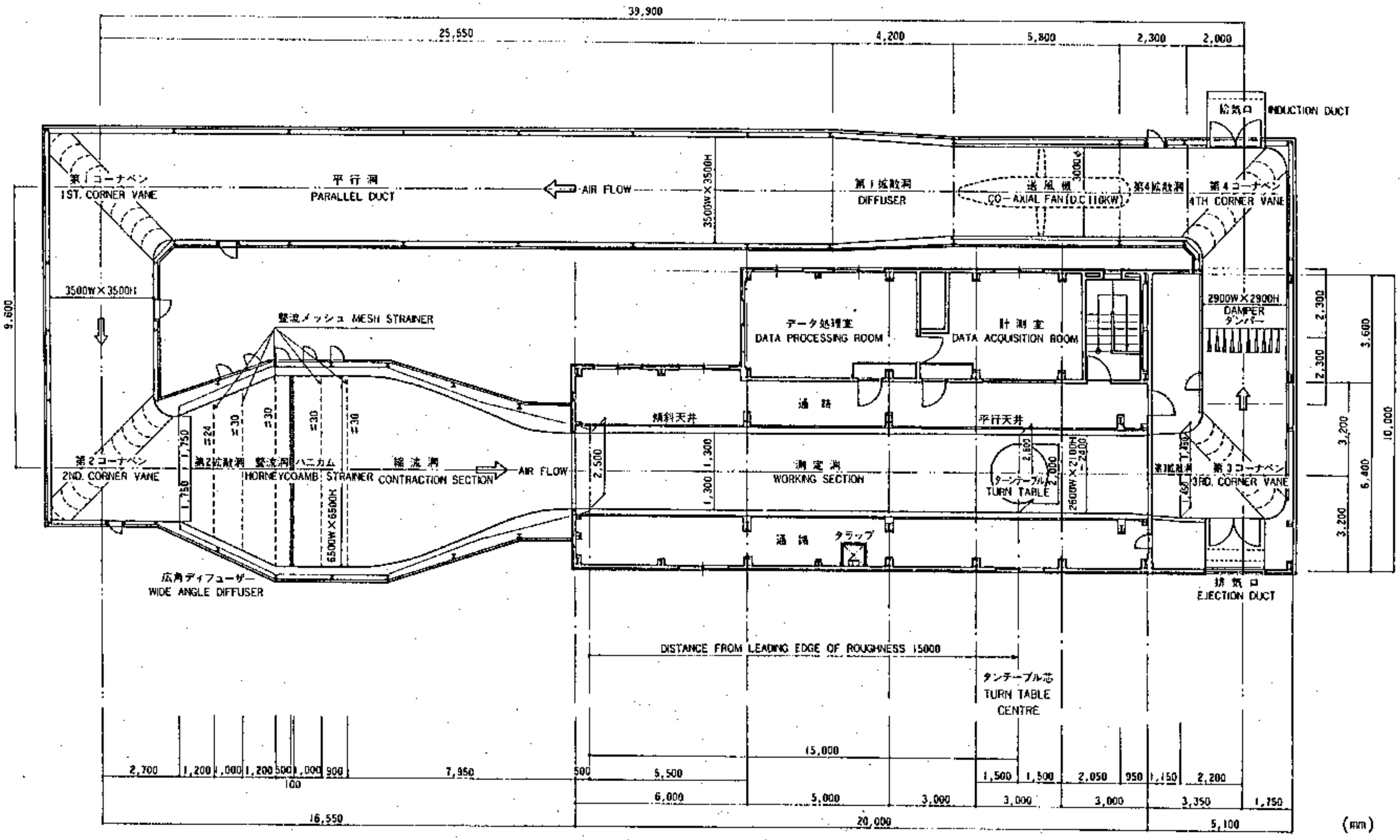


図5-23　回流式境界層風洞の実験施設

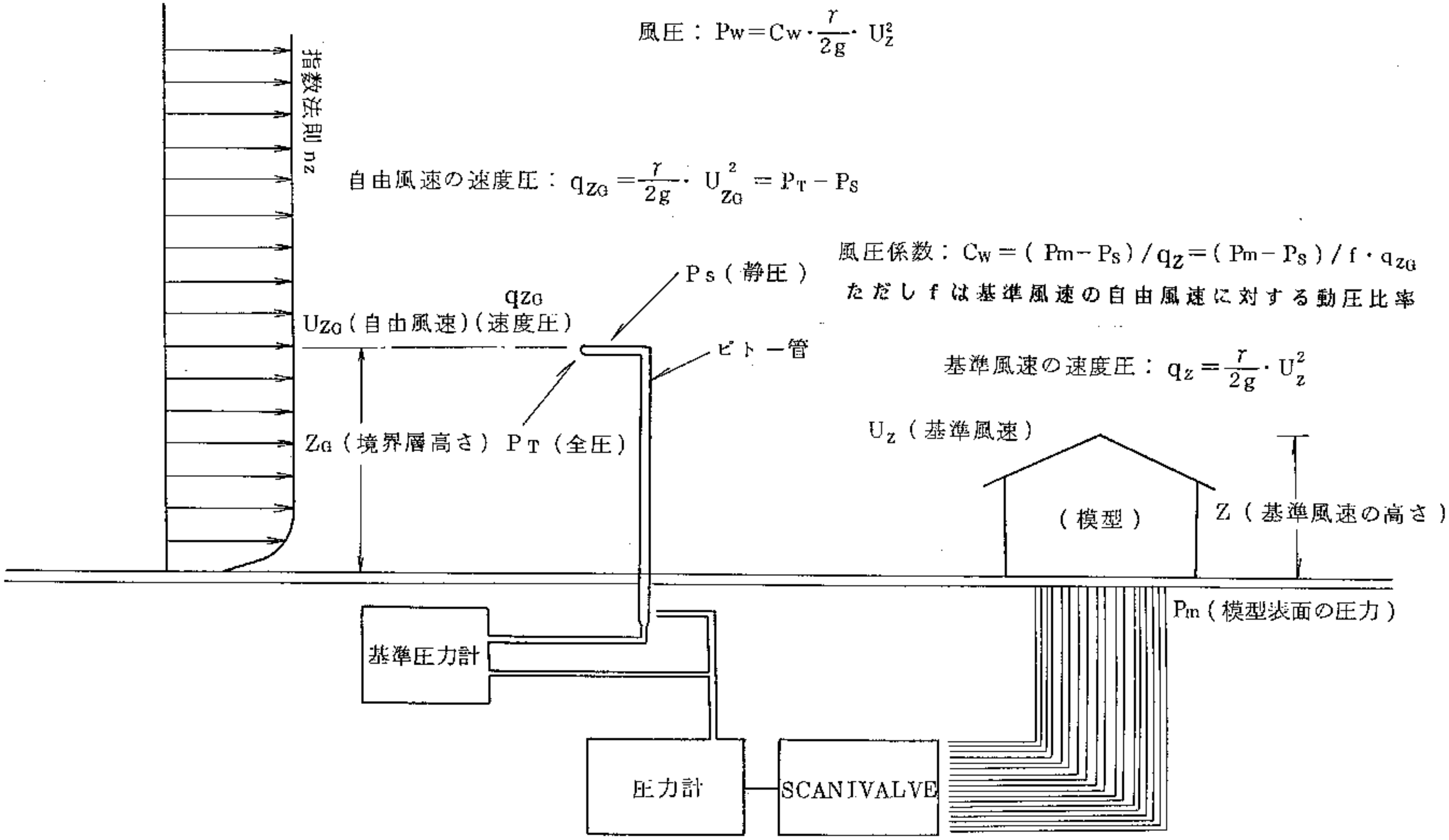


図5-24　風圧係数測定法の概要図

図5-25　風圧係数実験結果，南風時

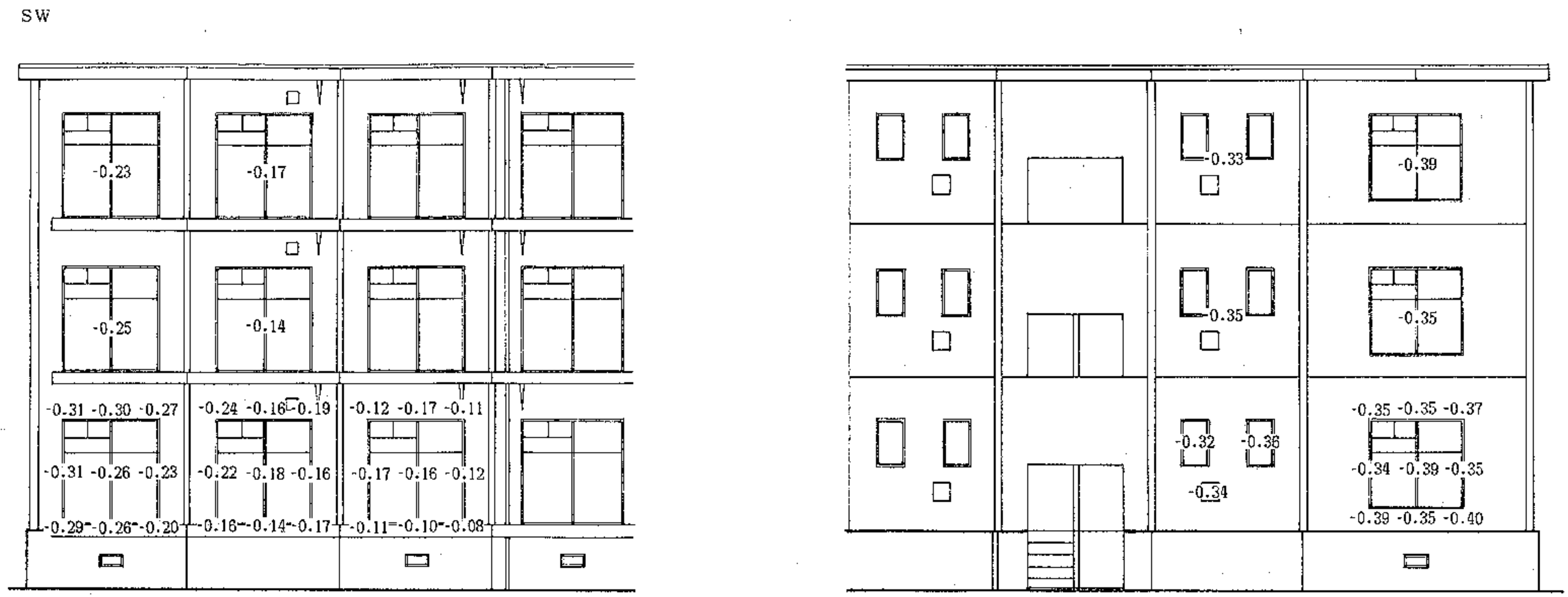
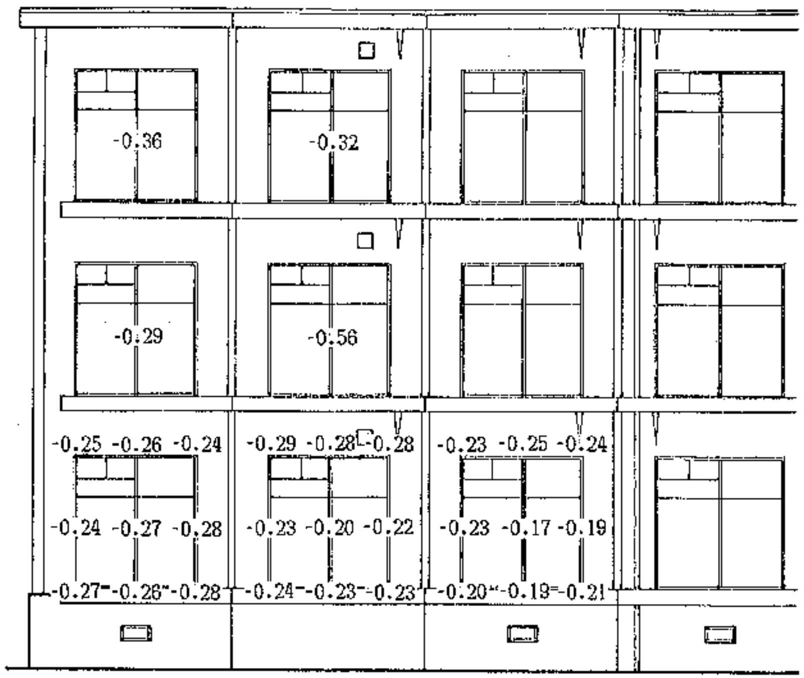


図5-26　風圧係数実験結果・南西風時

N



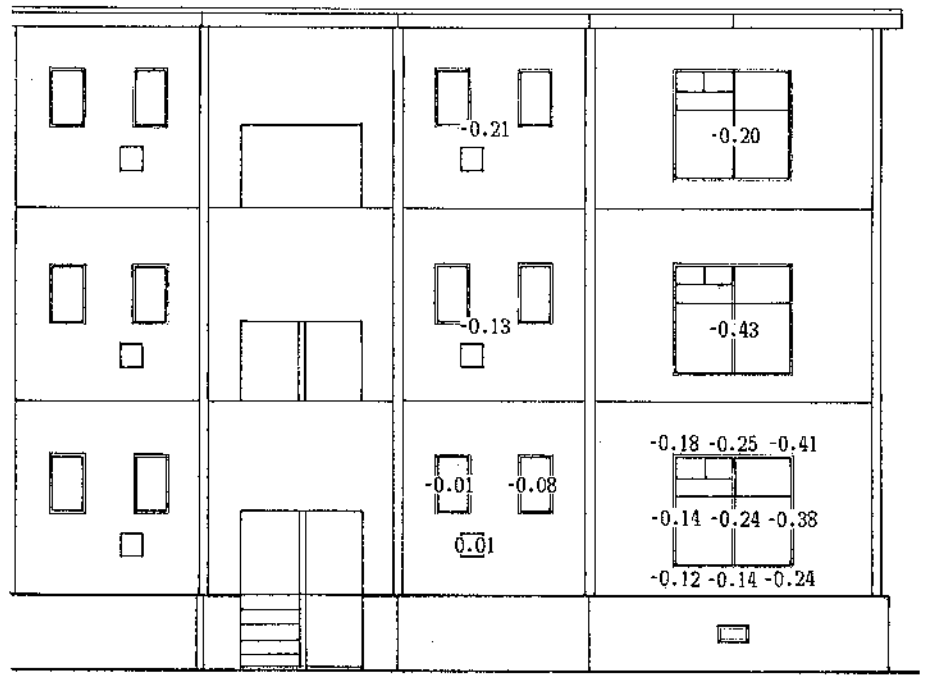


図5-27　風圧係数実験結果・北風時

図5-28　風圧係数実験結果・北北東風時

図5-29　風圧係数実験結果・北東風時

1月21日

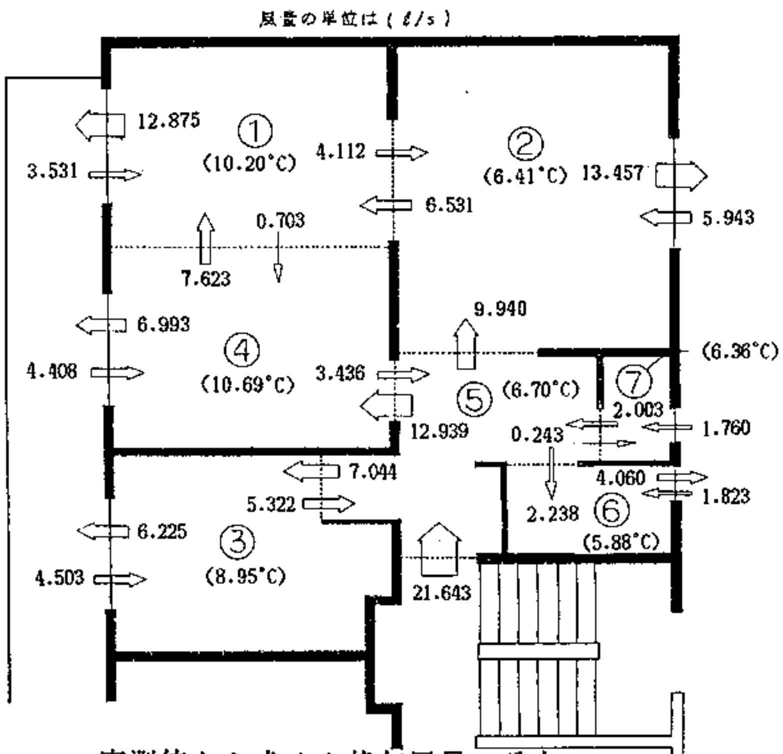
風　　向	北東
風　　速	4～5m（平均値4.58m）
換気回数	1.65回/h
外 気 温	9.00℃
平均室温	8.29℃
温 度 差	-0.71℃
総換気風量	157.0m^3/hr

各室の容積

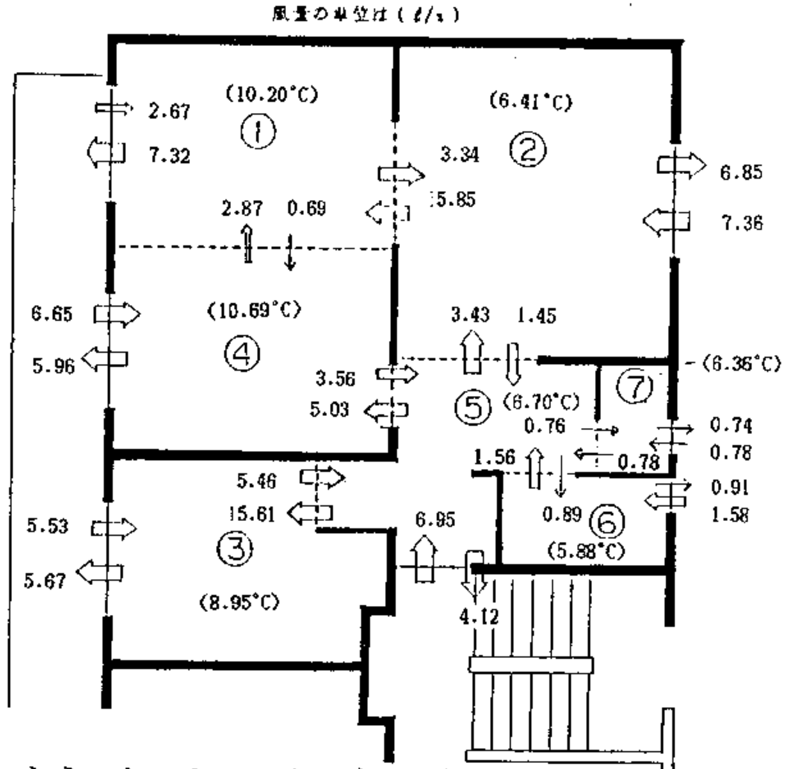
① 17.80m^3	⑤ 11.90m^3
② 26.10m^3	⑥ 5.00m^3
③ 14.60m^3	⑦ 2.40m^3
④ 17.20m^3	
	計 95.00m^3

換気回数　1.20回/h
総換気風量　113.7m^3/h

測定時間　10:10～16:40



実測値から求めた換気風量の分布



シミュレーションから求めた換気風量の分布

図5-30　実測値と計算値の比較·鳥山アパート·1985年1月21日

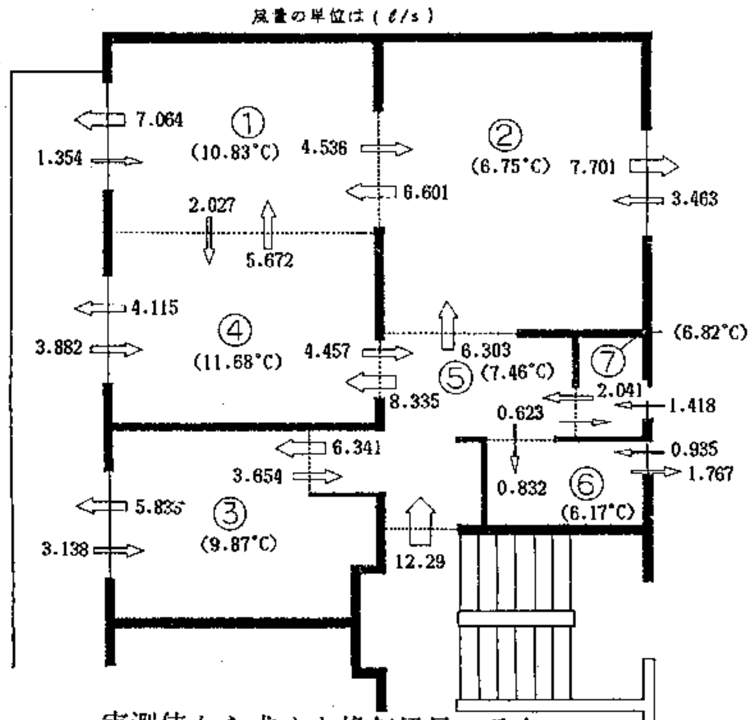
1月23日	
風　向	北～北東
風　速	3～5m（平均値3.65m）
換気回数	1.00回/h
外 気 温	11.27°C
平均室温	8.95°C
温 度 差	-2.32°C
総換気風量	95.4m^3/hr

各室の容積

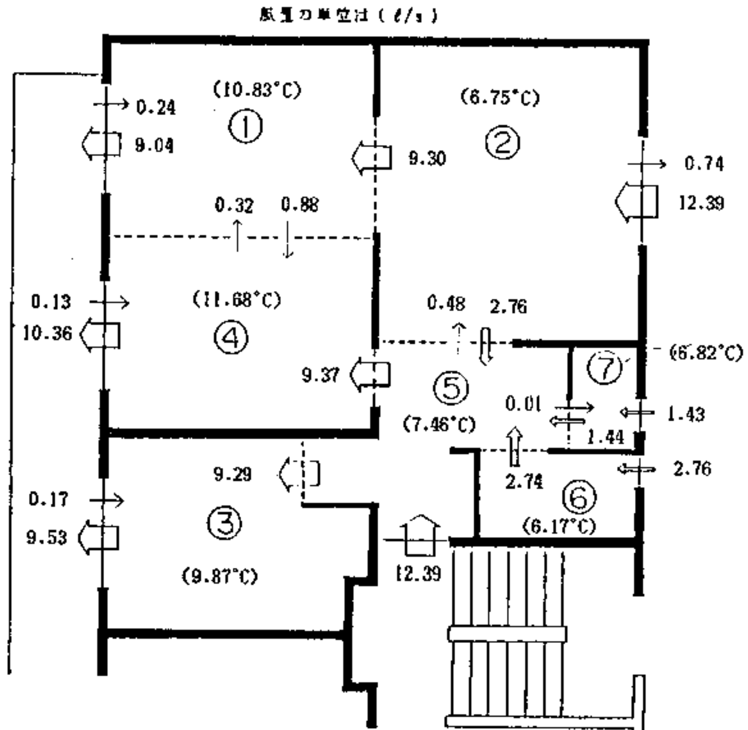
① 17.80m^3	⑤ 11.90m^3
② 26.10m^3	⑥ 5.00m^3
③ 14.60m^3	⑦ 2.40m^3
④ 17.20m^3	
	計 95.00m^3

測定時間　11:45～17:10

換気回数	1.12回/h
総換気風量	106.8m^3/h



実測値から求めた換気風量の分布



シミュレーションから求めた換気風量の分布

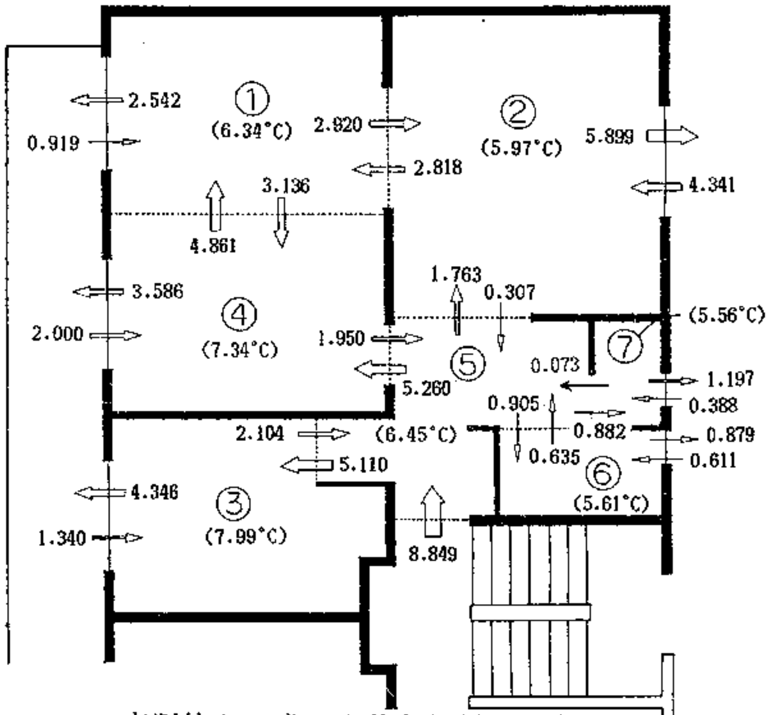
図5-31　実測値と計算値の比較・烏山アパート・1985年1月23日

1月24日

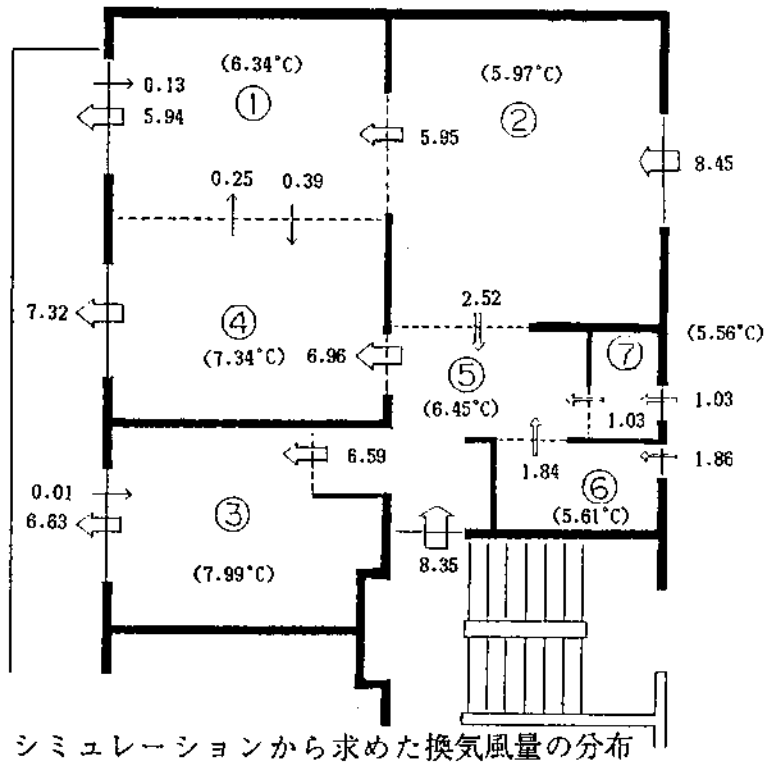
風　　向	北北東～東北東	各室の容積		
風　　速	2～4m（平均値2.56m）	① 17.80m^3	⑤ 11.90m^3	
換気回数	0.70回/h	② 26.10m^3	⑥ 5.00m^3	
外 気 温	5.11°C	③ 14.60m^3	⑦ 2.40m^3	
平均室温	6.63°C	④ 17.20m^3		
温 度 差	1.52°C		計 95.00m^3	
総換気風量	66.2m^3/hr			

測定時間　9:20～16:00

換気回数　0.75回/h
総換気風量　71.6m^3/h



実測値から求めた換気風量の分布

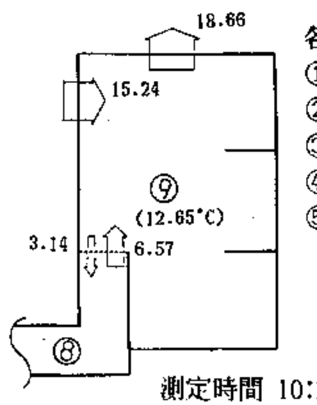


シミュレーションから求めた換気風量の分布

図5-32　実測値と計算値の比較·烏山アパート·1985年1月24日

11月29日

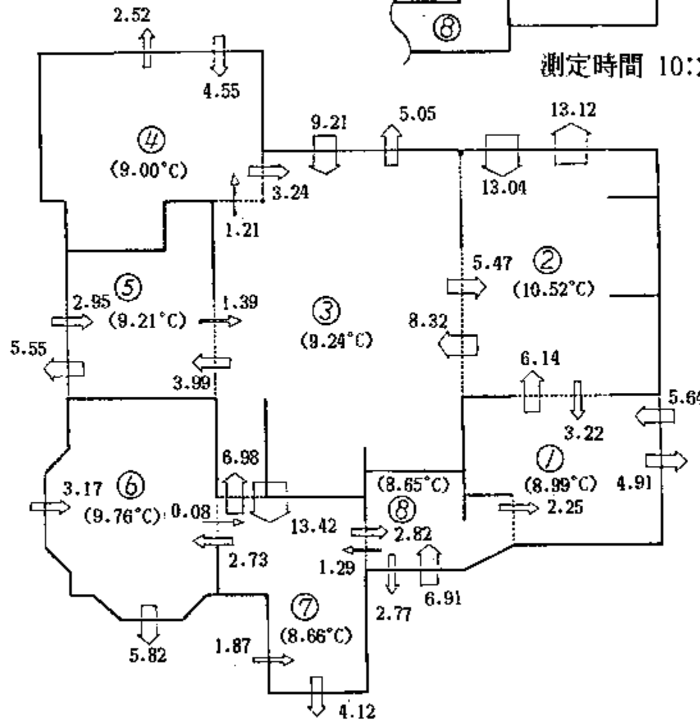
風　　向	北～北東，東～南東
風　　速	0～2m（平均値1.07）
換気回数	0.78回/h
外 気 温	10.06°C
平均室温	9.89°C
温 度 差	-0.17°C
総換気風量	225.29m³/hr



各室の容積

①22.29m³	⑥25.45m³
②42.37m³	⑦17.14m³
③66.12m³	⑧16.43m³
④31.86m³	⑨46.15m³
⑤20.79m³	
	計289.00m³

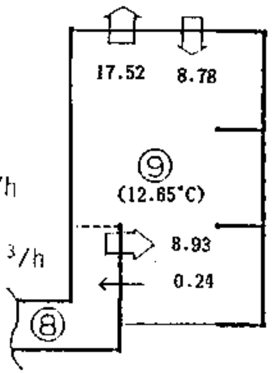
測定時間 10:25～18:45

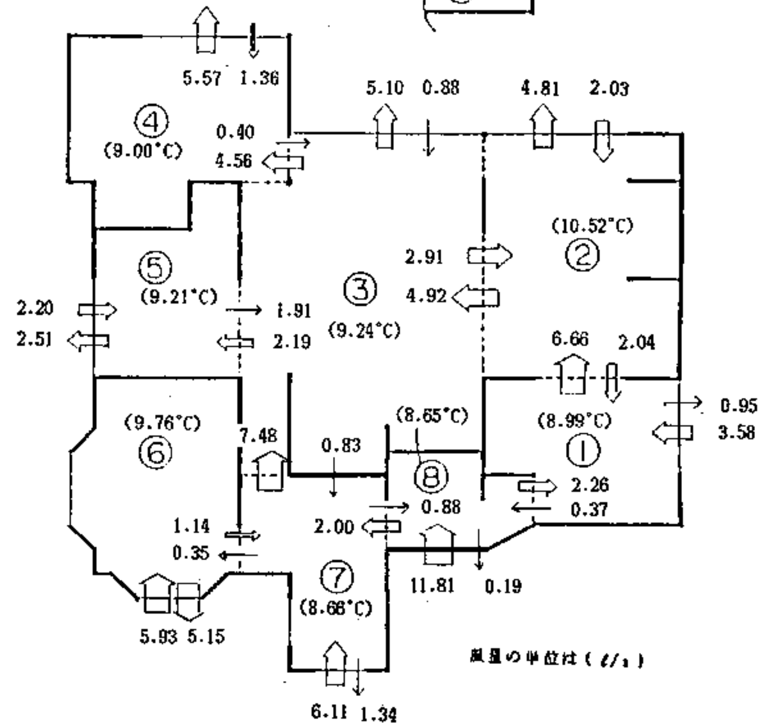


実測値から求めた換気風量の分布

換気回数　0.54回/h

総換気風量　155.3m³/h





シミュレーションから求めた換気風量の分布

図5-33　実測値と計算値の比較・奥沢の住宅・1984年11月29日

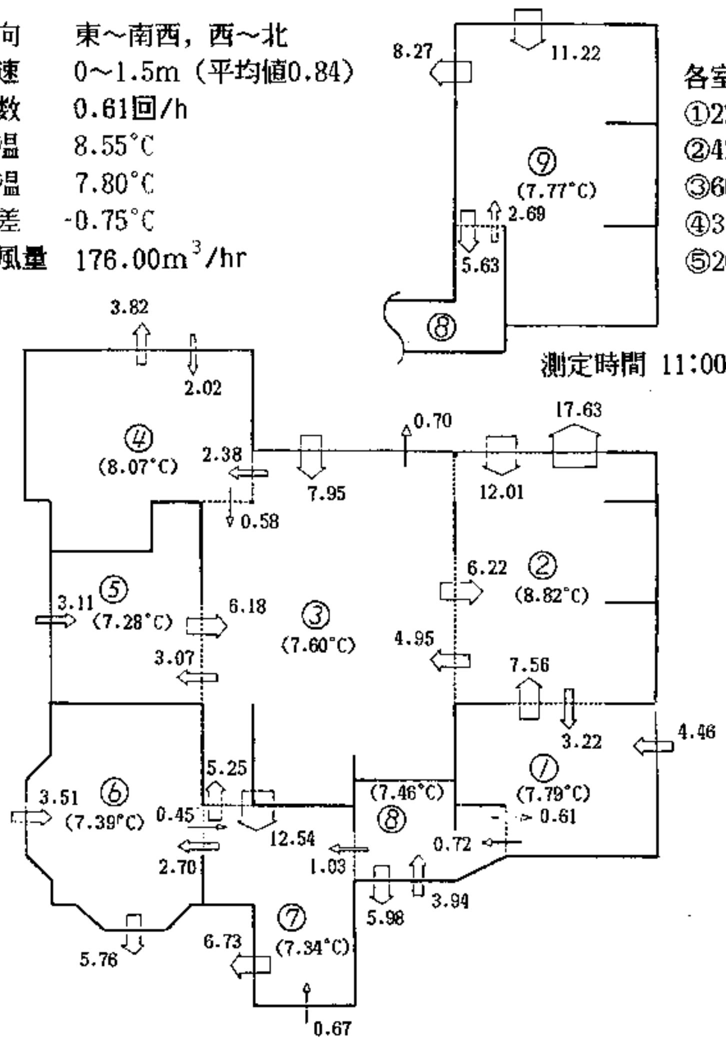
12月1日

風　　向　東～南西，西～北
風　　速　0～1.5m（平均値0.84）
換気回数　0.61回/h
外 気 温　8.55°C
平均室温　7.80°C
温 度 差　-0.75°C
総換気風量　176.00m^3/hr

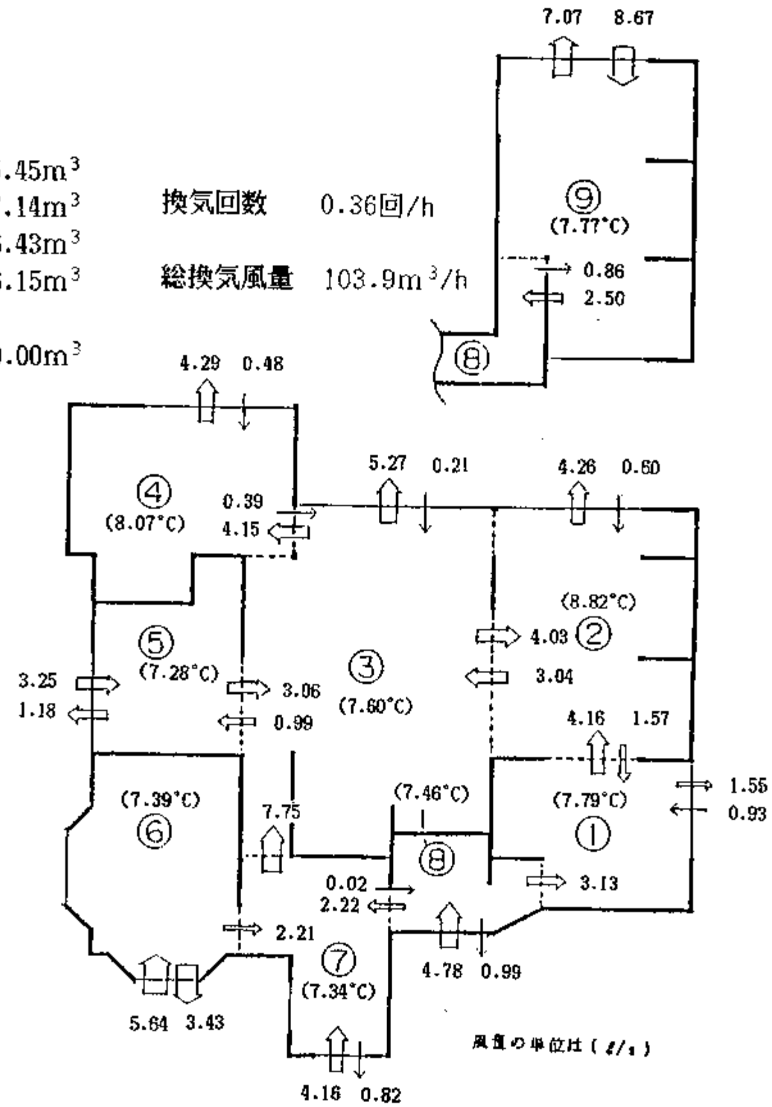
各室の容積
①22.29m^3　⑥25.45m^3
②42.37m^3　⑦17.14m^3
③66.12m^3　⑧16.43m^3
④31.86m^3　⑨46.15m^3
⑤20.79m^3
計289.00m^3

測定時間 11:00～18:30

換気回数　0.36回/h
総換気風量　103.9m^3/h



実測値から求めた換気風量の分布



シミュレーションから求めた換気風量の分布

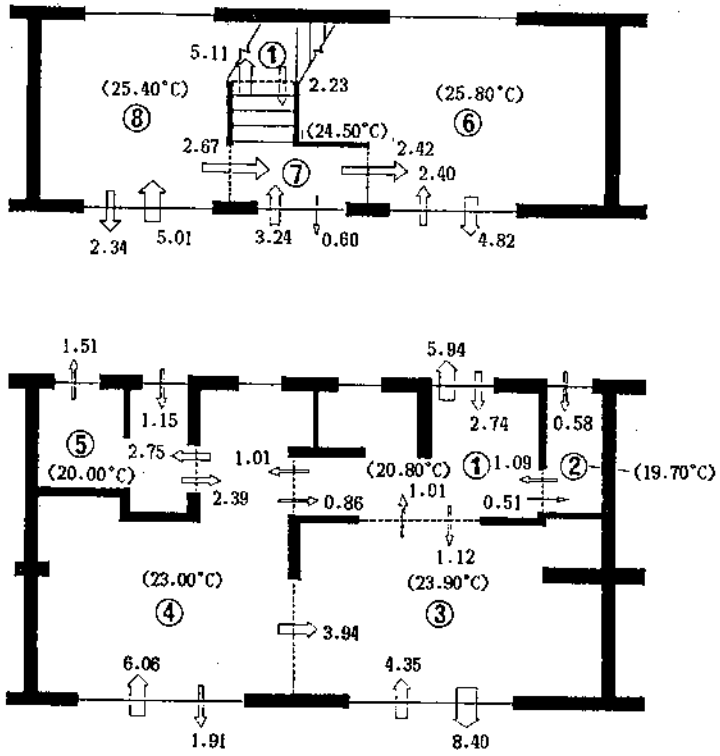
図5-34　実測値と計算値の比較·奥沢の住宅·1984年2月1日

10月3日

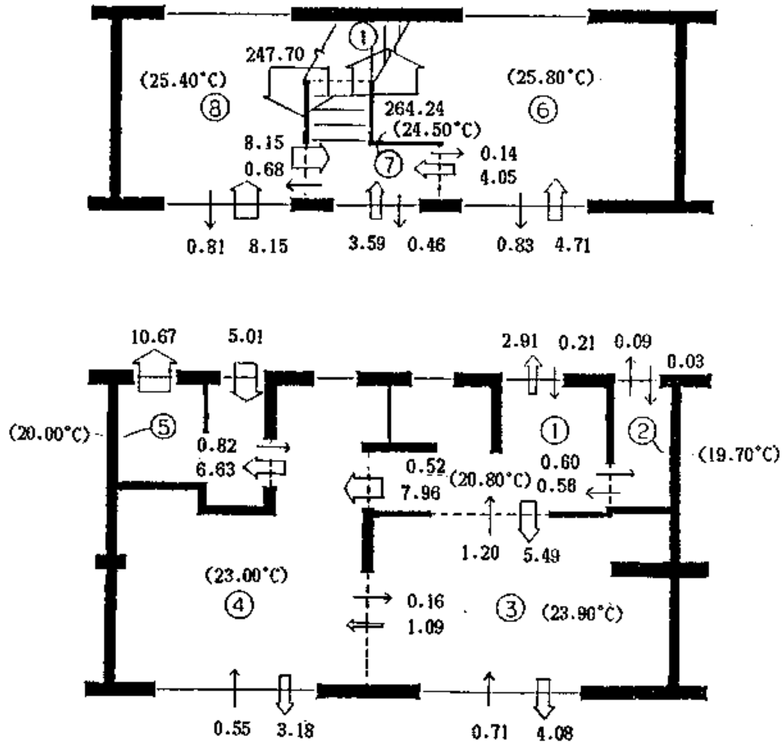
風　　向	東南東～南南東	各室の容積	
風　　速	0.1～0.9m（平均値0.4m）	①15.89m³	⑥23.07m³
換気回数	0.78回/h	② 3.48m³	⑦ 4.86m³
外 気 温	22.00°C	③23.52m³	⑧16.47m³
平均室温	23.50°C	④21.89m³	
温 度 差	1.50°C	⑤ 8.92m³	
総換気風量	91.91m³/hr		計118.10m³

測定時間 10:20～18:10

換気回数　0.70回/h
総換気風量　82.9m³/h



実測値から求めた換気風量の分布



シミュレーションから求めた換気風量の分布

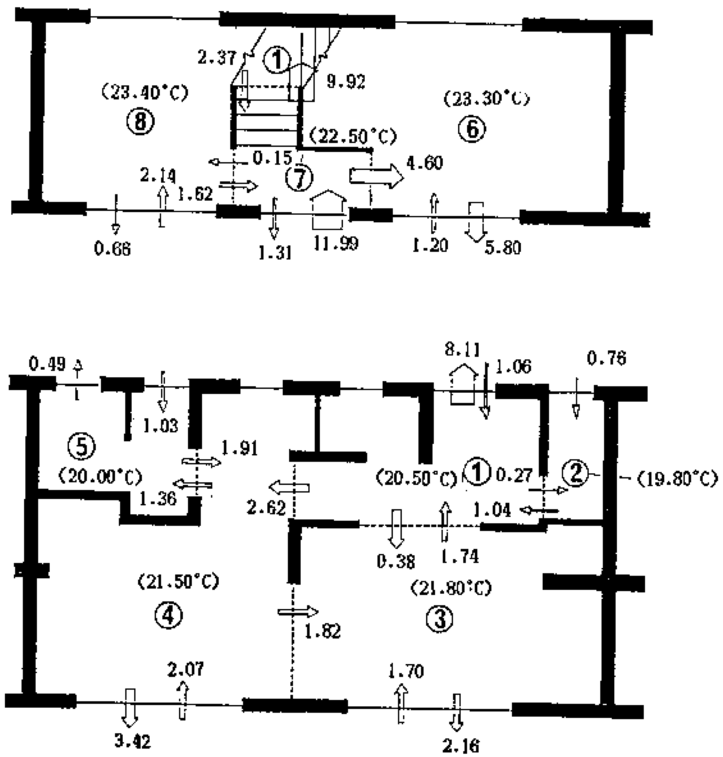
図5-35　実測値と計算値の比較・東海村長堀住宅・1985年10月3日

10月4日

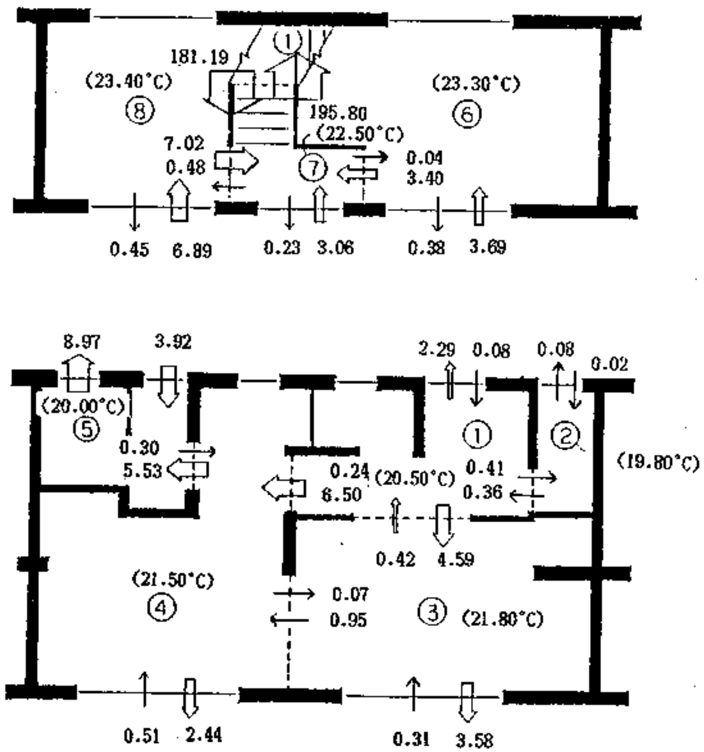
風　向	南南東～南西	各室の容積		
風　速	0.1～0.6m（平均値0.2m）	①15.89m³	⑥23.07m³	
換気回数	0.67回/h	② 3.48m³	⑦ 4.86m³	
外気温	21.60°C	③23.52m³	⑧16.47m³	
平均室温	21.92°C	④21.89m³		
温度差	0.32°C	⑤ 8.92m³		
総換気風量	79.02m³/h		計118.10m³	

測定時間 8:40～18:10

換気回数　0.56回/h
総換気風量　66.3m³/h



実測値から求めた換気風量の分布



シミュレーションから求めた換気風量の分布

図5-36　実測値と計算値の比較・東海村長堀住宅・1985年10月4日

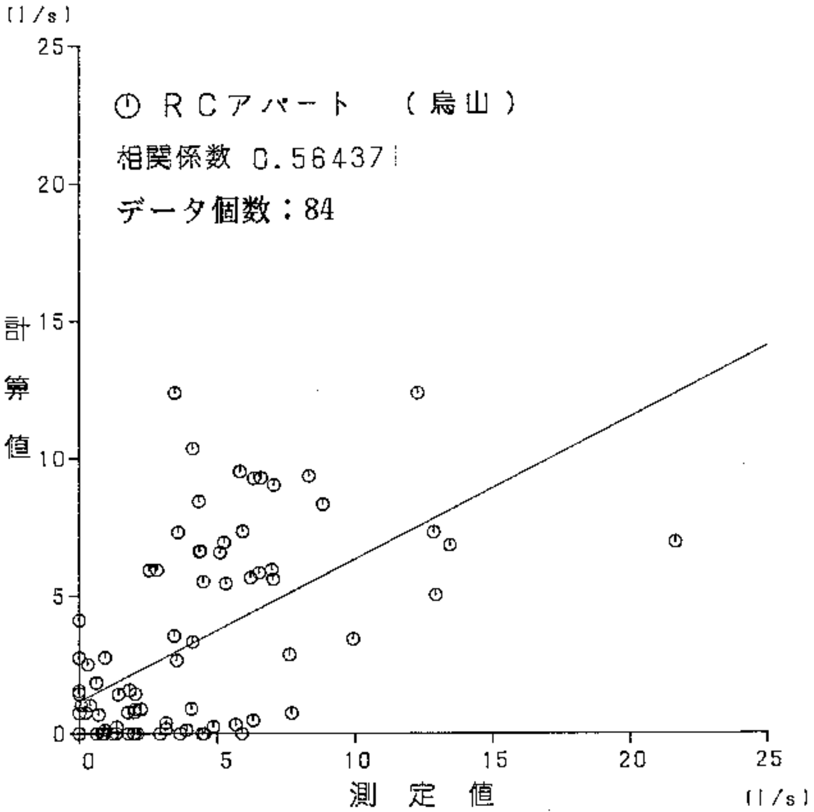


図5-37-A　実測値と計算値の相関図(風量ごと，烏山)

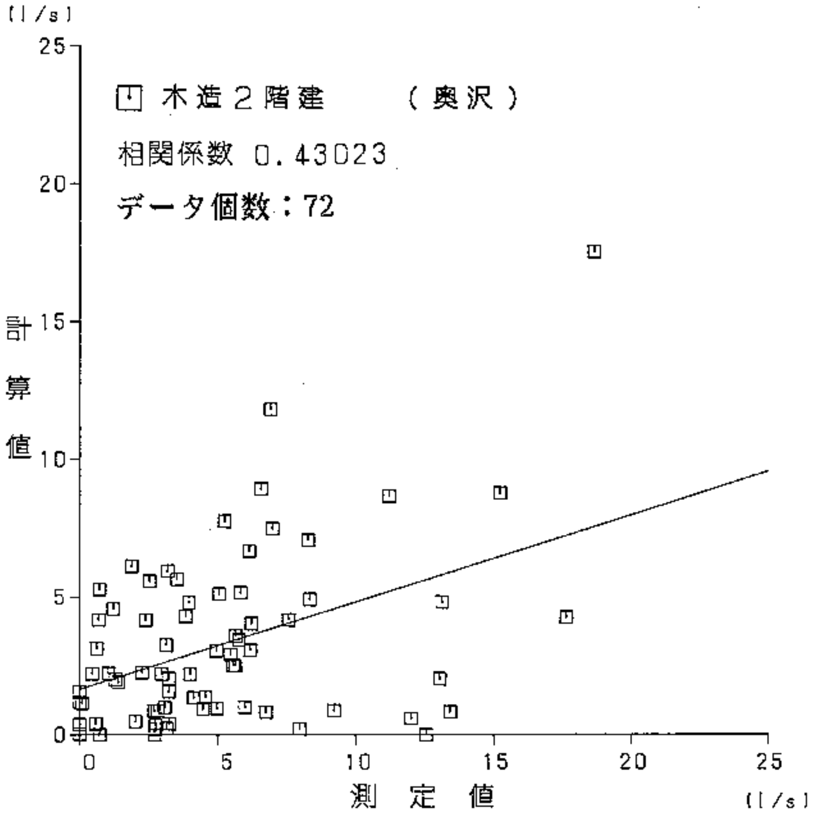


図5-37-B　実測値と計算値の相関図(風量ごと，奥沢)

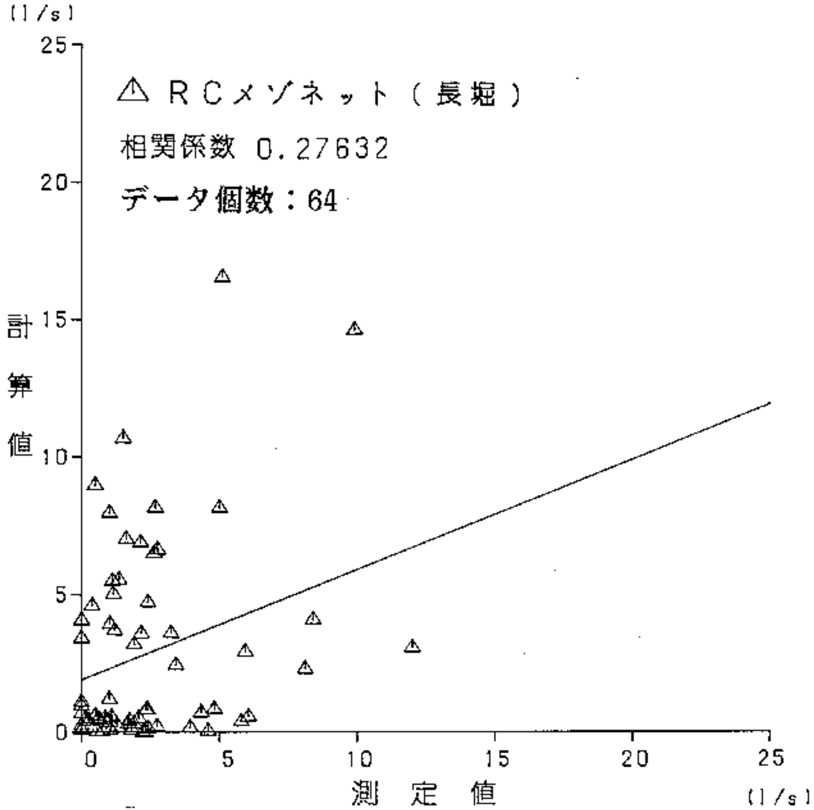


図5-37-C　実測値と計算値の相関図(風量ごと，長堀)

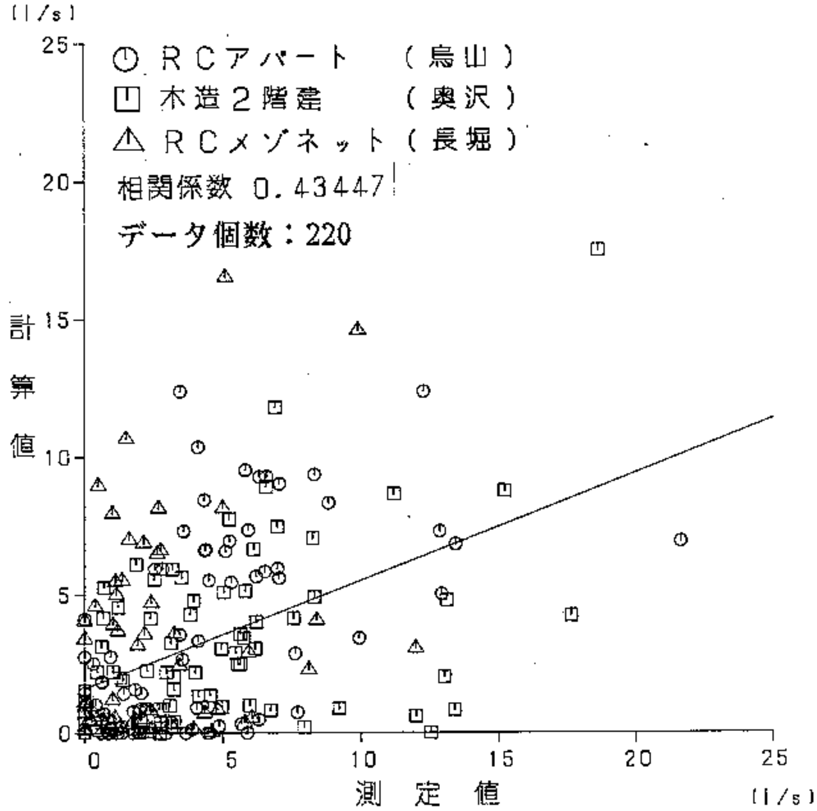


図5-37-D　実測値と計算値の相関図(風量ごと，鳥山・奥沢・長堀)

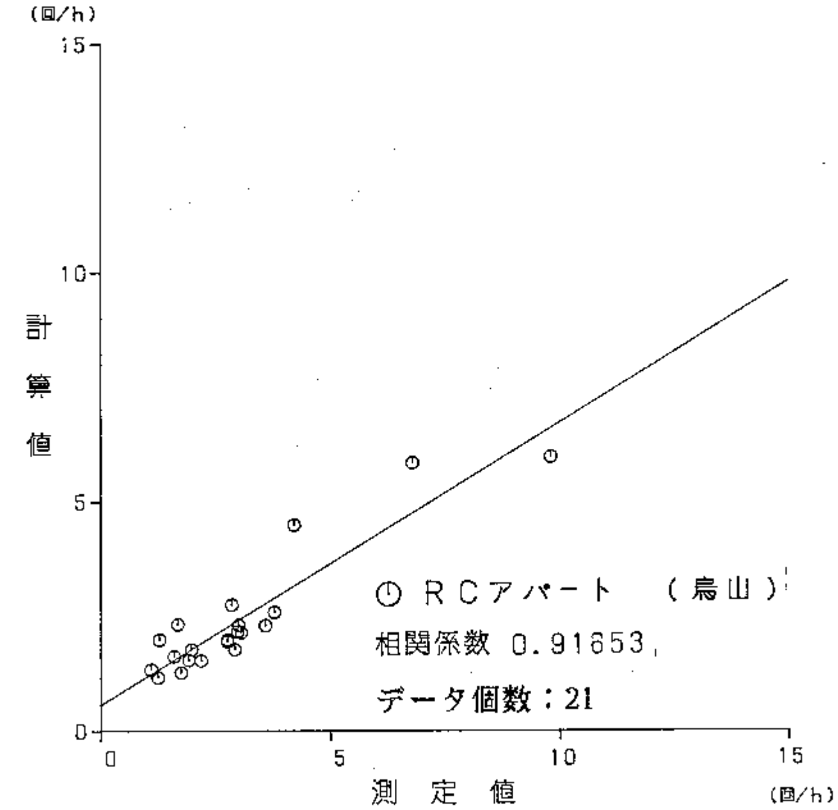


図5-37·E　実測値と計算値の相関図(室ごとの換気回数, 烏山)

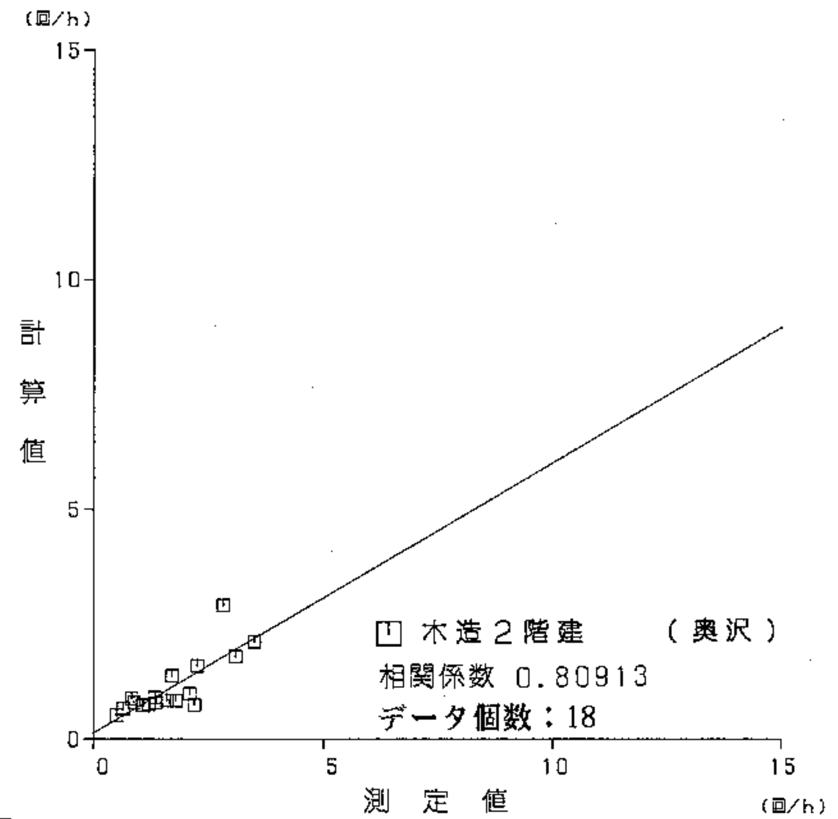


図5-37·F　実測値と計算値の相関図(室ごとの換気回数, 奥沢)

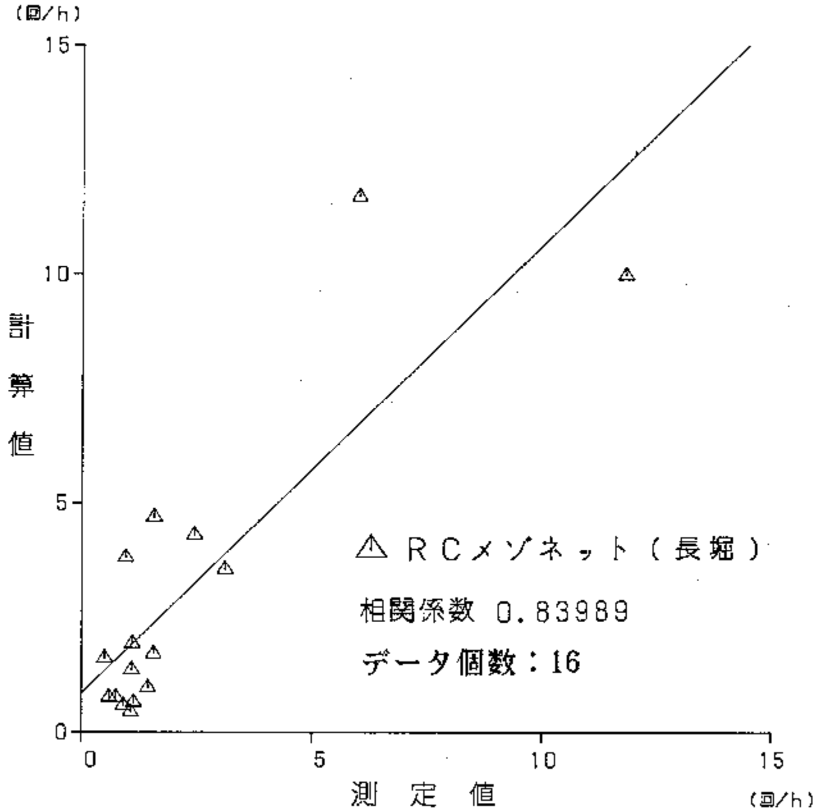


図5-37·G　実測値と計算値の相関図(室ごとの換気回数, 長堀)

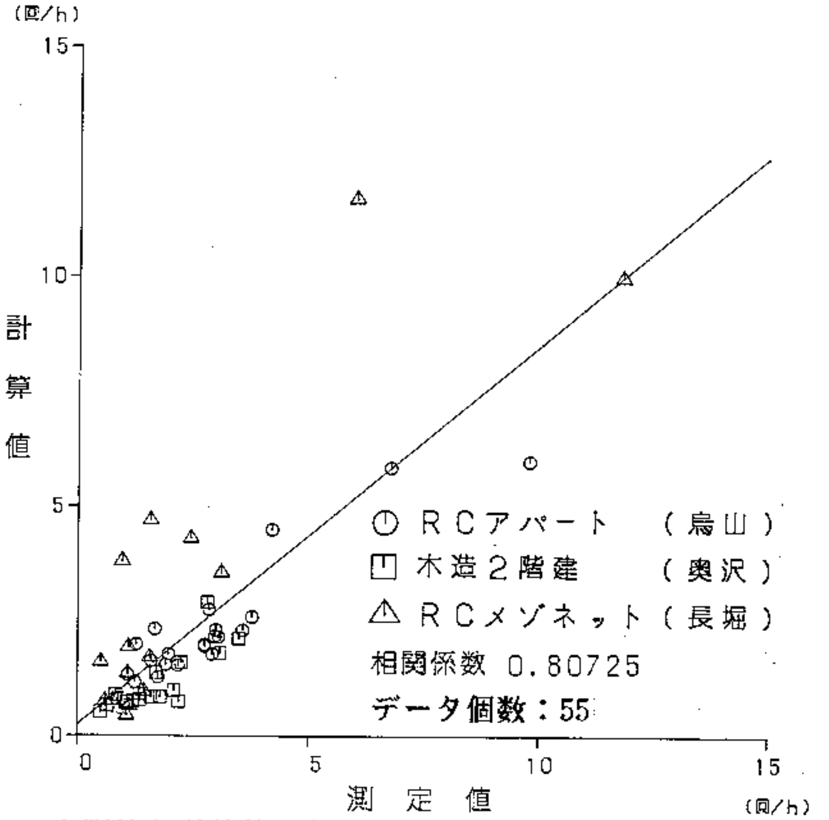


図5-37·H　実測値と計算値の相関図(室ごとの換気回数, 烏山・奥沢・長堀)

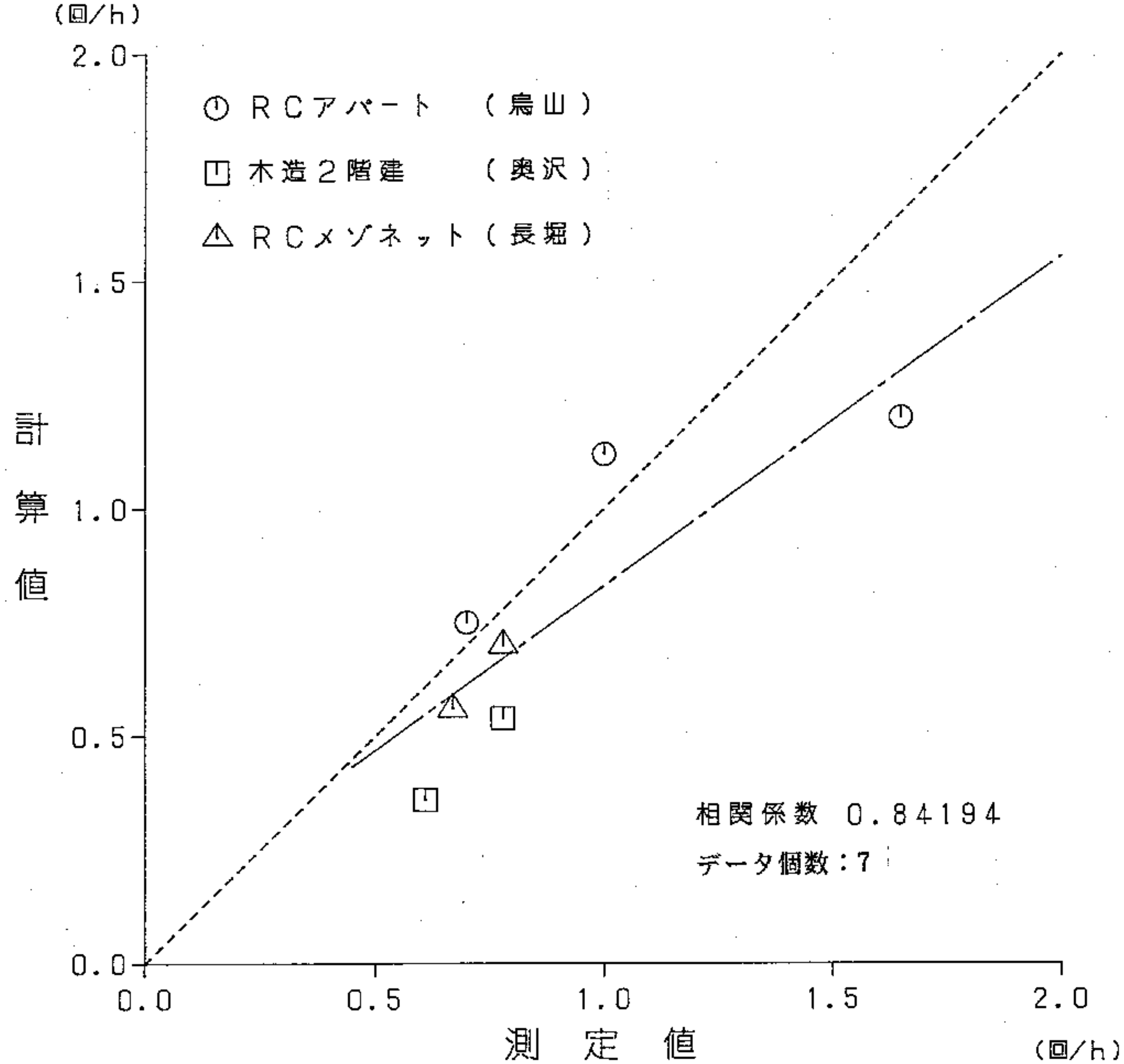


図5-37-I　実測値と計算値の相関図(一戸全体の換気回数, 烏山・奥沢・長堀)

5.5 事務所建物での適用例

某自動車メーカーの事務所建物は中庭を持つ口の字形の平面計画をしている．地上は最上階の機械室を除いて7階，地下は1階である．中庭の上部は覆いなどは無いために外気に開放されている．こうした中庭を利用し，中間期や夏期に，自然換気を行おうとする．地階は食堂に利用されるが，計画案の平面図を図5-38に示す．西側はピロティー状になっており地面レベルからやや降りて中庭に抜けられる．従って中庭のレベルから見れば建物は8階である．1階の平面図を図5-39に示す．主な出入口はこの階に設けられているが，この階から中庭には出られない．1階は大部分が会議室に用いられる．2階以上は事務スペースに使われ，どの階も同様な平面計画をしている．例えば3階の平面図は図5-40に示す．南立面図は図5-41に示す．この南面の地下1階のところは食堂の窓である．南北の断面図を図5-42に示す．また東西の断面図を図5-43に示す．これらの断面図と2階の平面図からわかるように，事務スペースは南側と北側の大きなスペースに振分けられ，ともに中庭に面して広い面積の窓を持つ．自然換気はこれらの窓をある程度開くことによって行う．

問題となるのは2階以上の事務スペースにおいてどの程度の換気が行われるかということである．各階は中庭の吹抜けや階段室を通して圧力的に関連しあっており，1つの階だけ取り出して換気シミュレーションを行うことは適当ではない．建物全体の換気モデルをつくりシミュレーションを行う必要がある．またこのような窓を開けた自然換気状態では，冷暖房は大部分停止されているから，室温がどうなるかも同時に解かなければならない．一般に室温が外気温より高ければ高い程，自然換気量は増える傾向にあり，逆に換気風量が増えれば増える程，室温と外気温の差は小さくなる．こうした意味で熱系と換気系は相互影響を持つ．シミュレーション上もこの相互影響を考慮する．

このための換気回路網モデルをつくるときに最も不確かなのは風圧係数である．一方，開いた窓の通気抵抗などについては既存の文献から得られる．そこで風圧係数は建物の1/150の模型を製作し，前述した回流式境界層風洞を用いて実験的に求めた．この模型を写真5-3に示す．周辺の建物も模型化されている．後方に見えるたくさんの立方体は垂直方向の風速分布をつくるためのラフネスである．風速分布は1/4の指数法則に従うようにした．風圧は模型建物の壁面に内径$1mm$の測定孔を設け，これらの孔からビニールチューブで圧力変換器に導いて測定した．現実の場面で通風のために開けるのは，もっぱら南北面の窓であり，東西面の窓は常に閉めている．従って風圧測定孔は，これらの各階の窓のほかに中庭に面する窓にも設けた．ターンテーブルを回すことにより風向きを変えるが，図5-44に示すように45°きざみの8方向について測定し，さらに当建物の立地する名古屋において秋に出現頻度の高いN~NWの風向を補うためNNWの風向きについても測定した．図5-45と図5-46にはNの風向における風圧係数の結果を示す．図5-47と図5-48にはNWのものを示す．地下1階の南側には傾斜している植栽があるため，この面だけ外気に面しており，風圧係数が必要である．建物の北隣には別の建物がある．一般に隣接物の影響を受けない建物の風上側の風圧係数は正となり，風下側は負となる傾向があるが，これらのN, NWの風向の場合は隣接建物の影響により，この傾向が明確ではなくなっている．一方，中庭に面するところはどのような風向であっても負の風圧係数となっている．つまり室内から中庭に向けて吸い出されるような力が働いている．

換気回路網のモデルは全部で78個の全圧節点と281個の通気路を持つものとした．これに対し熱回路網モデルは149個の節点を持つものとした．熱系では外壁表面での日射受熱のための節点も加わるために換気のものより多くなる．ただし定常状態を計算するところから，壁や床の内部に細かく節点を設ける必要はない．

換気回路網における通気抵抗の値は文献資料[83]によった．抵抗係数をζ，指数をηとすると，窓やドアの開いた状態では$\zeta=2.2$，$\eta=2.0$，閉じた状態の隙間として片開きサッシュ気密機構付きでは，$\zeta=3.1\times10^{7}$，$\eta=1.5$，開きサッシュ気密機構付きでは$\zeta=1.9\times10^{7}$，$\eta=1.3$とした．ドアなどに付いているガラリは$\zeta=5.7$，$\eta=2.0$とした．中庭の吹抜け空間も上下に分割したため，これらのセルの上下方向の通気抵抗も与える必要がある．これは断面積のきわめて広い長方形ダクトと見なし，$\zeta=0.01$,$\eta=2.0$とした．

計算モデルに与える条件は気象条件などの自然的なものと照明や人体発熱などの人為的なものとがある．自然通風をはかるのは主に中間期なので，設計用資料から秋季設計値の気象条件を与えた．これらは正午のもので，法線面直達日射量が$762Kcal/m^2{\cdot}h$，水平面天空日射量が$58Kcal/m^2{\cdot}h$，外気温は24.4℃である，また地中温度は6m下で15.1℃，$3m$下で18.0℃とした．風向は，名古屋において秋に出現頻度の高いNあるいはNWとした．風速は$3m/s$の場合と無風状態の2通りを与えた．前者の風速は観測値による平均値である．内部発熱としては人体発熱と照明発熱を考え，それぞれ単位面積当り，$9.8Kcal/h{\cdot}m^2$，$17.2Kcal/h{\cdot}m^2$とした．これらは人体発熱については0.2人$/m^2$で$49Kcal/h{\cdot}$人，照明発熱については$20W/m^2$として計算したものである．窓やドアの開口について，様々な開け方を行った．窓については全開の場合，半開の場合，全く閉めた場合について行った．ただし，全開といっても引違いのため窓面積全体の50%しか実際にはない．ドアについては，地階の食堂に入るドアを開いた状態と閉めた状態を，また1階の北側の2ヵ所のポーチを開閉した状態を行った．

計算結果の一部を図5-49から図5-52に示す．これは日射量と内部発熱だけによって換気が行われている無風状態の場合である．窓は半開している．地下1階の食堂のドアは開いて，1階の北側のポーチは閉じている．図5-49から図5-52はそれぞれ，地下1階，1階，4階と南北の断面を東から見た図である．例えば図5-49において，矢印は風量(m^3/s)を表わす．斜体の数字は空気温度を表わす．また図5-52においても同様であるが比較的大きな数字は換気回数を表わす．この断面図からわかるように煙突効果で空気は中庭の吹抜けに集り上昇していく．建物全体の換気回数は5.0回$/h$である．事務スペースは平均して29.3℃であり外気温より4.9℃高くなっている．さらに同様にして北風$3m/s$で窓が全開の場合については図5-53から図5-56に示す．この場合は建物全体の換気回数が9.6回$/h$となっている．また事務スペースの平均室温は27.1℃であり外気温より2.7℃高くなる．

以上のようにして，さまざまな設計例について計算を行い，建物全体の換気回数に対する変化をまとめると図5-57から図5-60となる．図5-57は地下1階の食堂のドアも，1階の北側ポーチのドアも閉じた状態である．これに対し図5-58は食堂のドアが開いた場合である．この1つのドアの開閉による全体の換気回数への影響は0.1~0.2回$/h$程度である．このドアの面積が比較的小さいにしては大きな影響である．これは高層建物の1階部のドアの通過風速は大きくなる場合があることを示している．さらに図5-59と図5-60は建物の周囲状況が異なっている場合である．図5-

59は当建物の周囲に同一の建物が約15mの間隔で整然と立ちならんでいる場合であり，図5-60は全く隣接する建物がなく単独で立っているとした場合のものである．従ってこれらの場合はもとの場合と比べて風圧係数の分布が異なっている．

これらの結果から次のようなことがわかる．吹きぬけの中庭を持つ高い建物においては，中庭に空気流が集り上へ抜けていくような傾向を持つ．これは煙突効果だけでなく，中庭の周壁の風圧係数が風向によらず常に負になる特性にも起因すると考えられる．

次に換気回数への風向風速による影響は，建物が単独で立っている場合に最も大きくなる．この場合，風向による換気回数は，北風，北西風，無風の順で大きい．これは通風に寄与する主な開口が南北に面していることと，風がこれらの開口に直角に当るか斜めに当るかの違いによると考えられる．これに対し，周辺に何等かの建物が立っている場合には風向による換気回数の違いは明確ではない．さらに風があることによる換気回数の増加も比較的に少ない．これは周辺の建物により，風の流れが複雑になり風圧係数分布も単純ではなくなるためと考えられる．一方，文献資料の風圧係数は，建物が単独に立っている場合のものである．しかし多くの場合は隣接建物の影響がある．従ってより正確に換気量を予測するためには風洞実験をするのが望ましいと言える．

さらに，窓の開度と外気風速の影響について考える．換気の駆動力は煙突効果と風圧である．煙突効果だけによる換気は無風時の結果に表われている．図5-57と図5-58をみると，無風時であって窓やドアは閉じていても約1.2回/hの換気が隙間から行われる．このように窓やドアが閉じている状態で3m/sの風速が加わっても換気回数の増加は0.1回/h程度であるが，窓が全開されている時の増加は3回/h程度と大きくなる．これらの風圧だけによる換気回数が全体の換気回数に占める割合は，それぞれ8%と30%である．つまり窓が閉じている場合は，開いている場合より，相対的に風圧の影響が少ない．これはこの建物が高いため，煙突効果が大きいからであると考えられる．窓が閉じていれば，室温が高くなり煙突効果が支配的になるが，窓が開けば室内と外気の温度差が小さくなり風圧の効果が大きくなってくる．

いずれにせよ，この計画案は自然通風には適したものになっているといえる．中庭を口字形に囲む平面計画を持つ高層建物の場合は煙突効果はもちろん，風圧効果によっても，中庭に空気流が集り上昇して抜けていくような特性を持たせることができる．

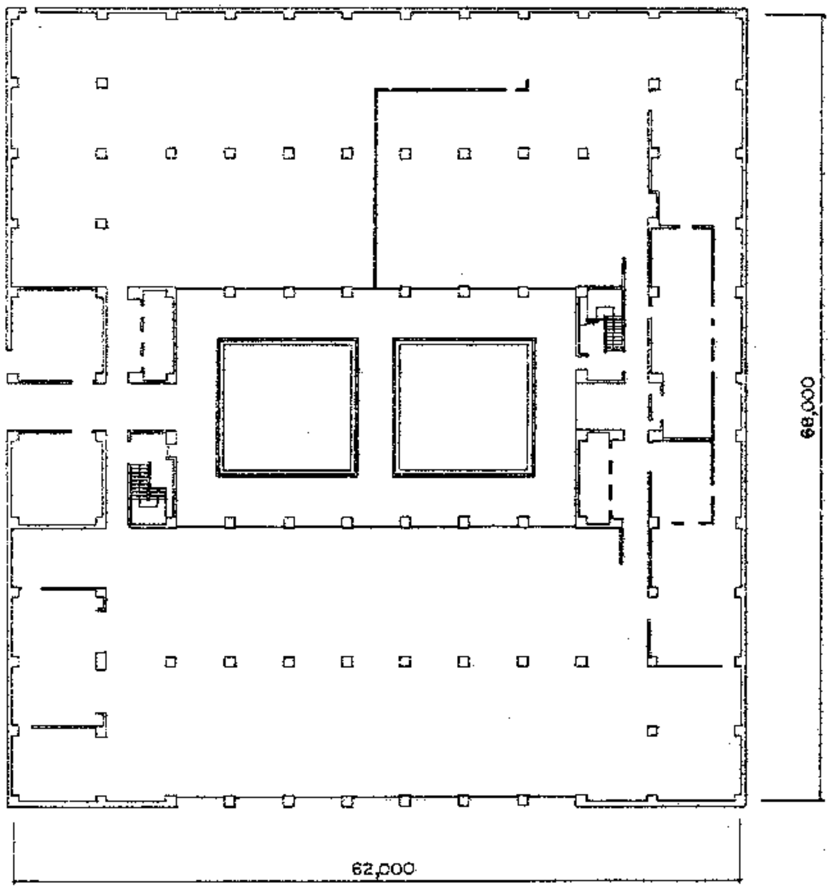


図5-38　地下1階平面図

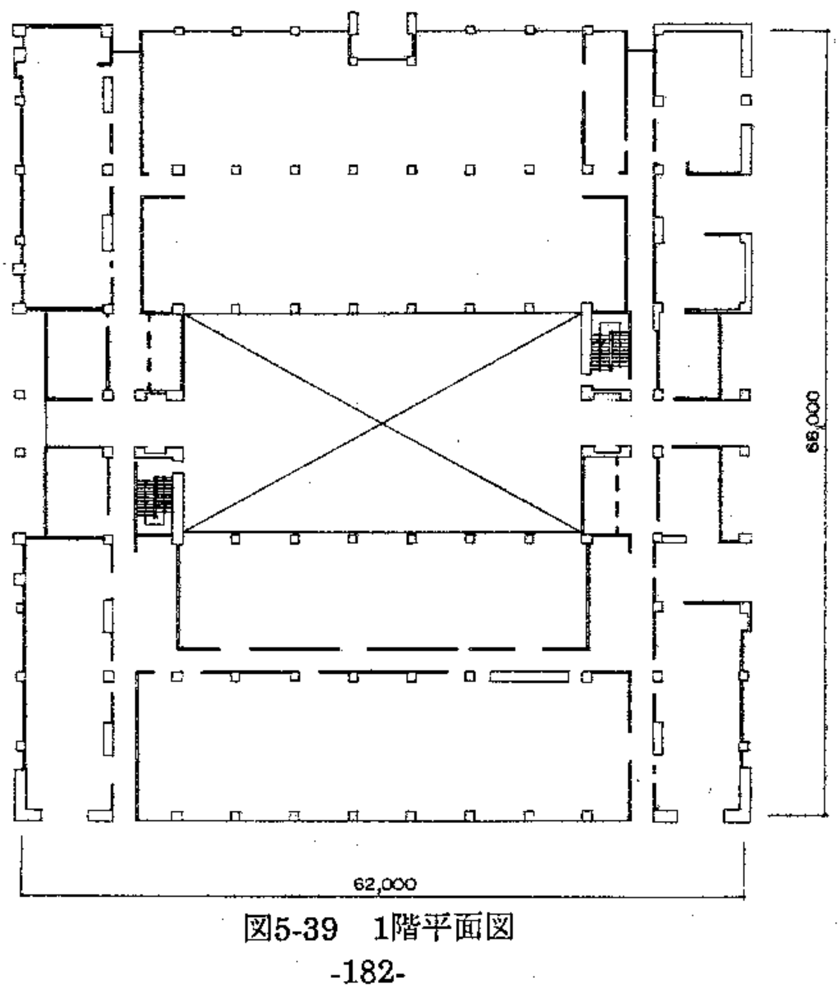


図5-39　1階平面図

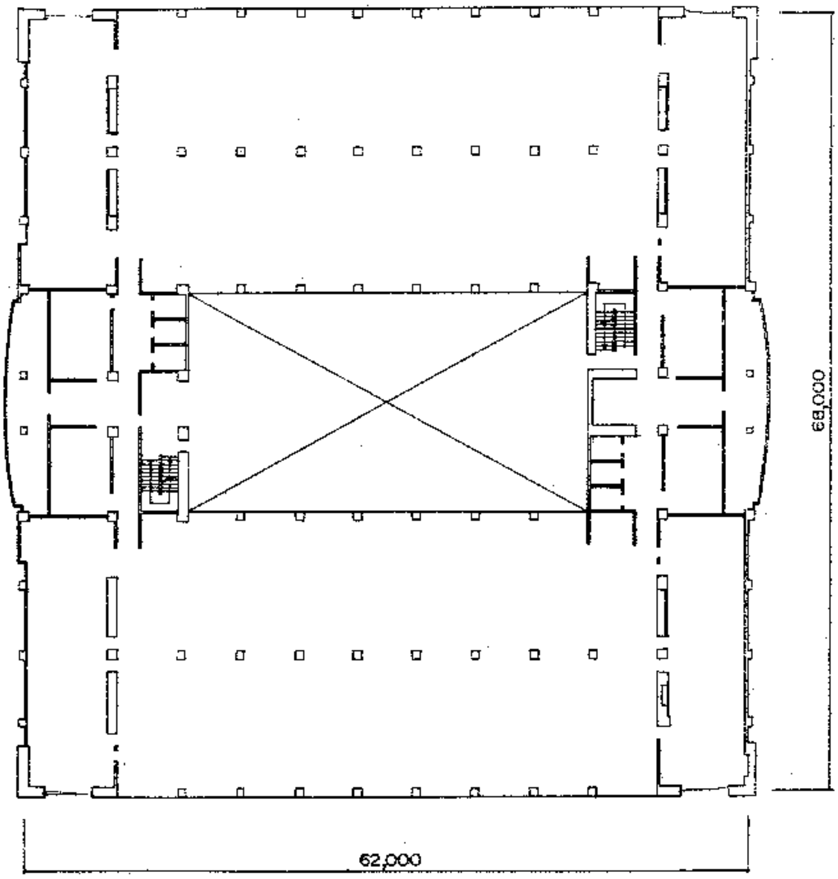


図5-40　3階平面図

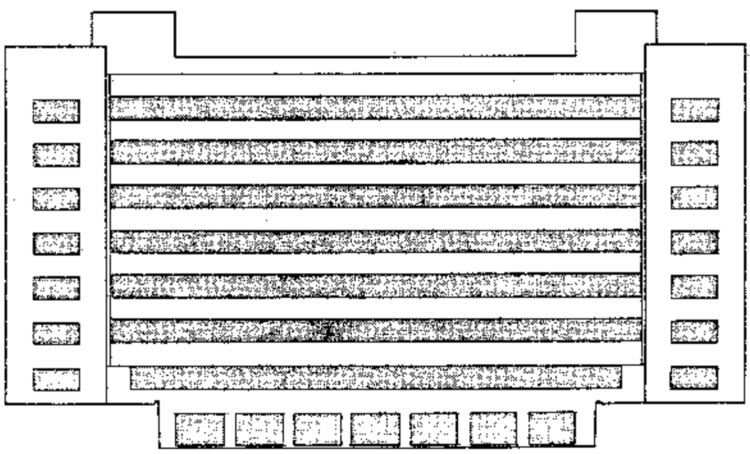


図5-41　南立面図

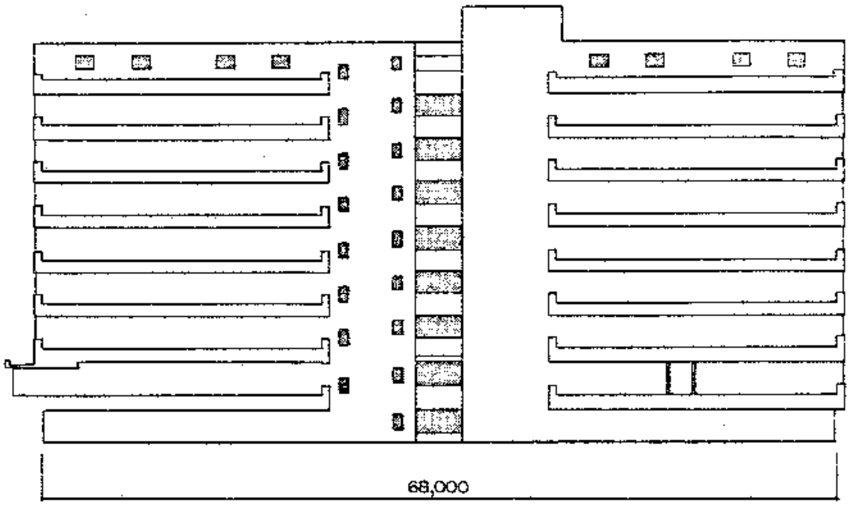


図5-42　南北断面図(右手が北)

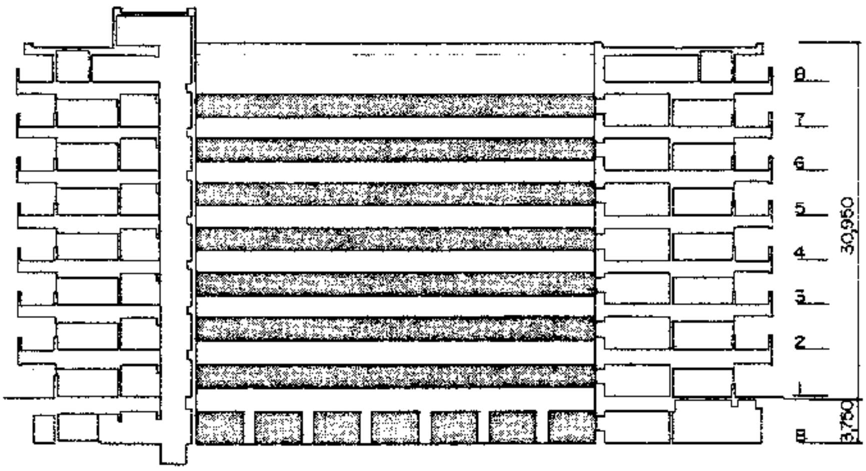


図5-43　東西断面図(右手が東)

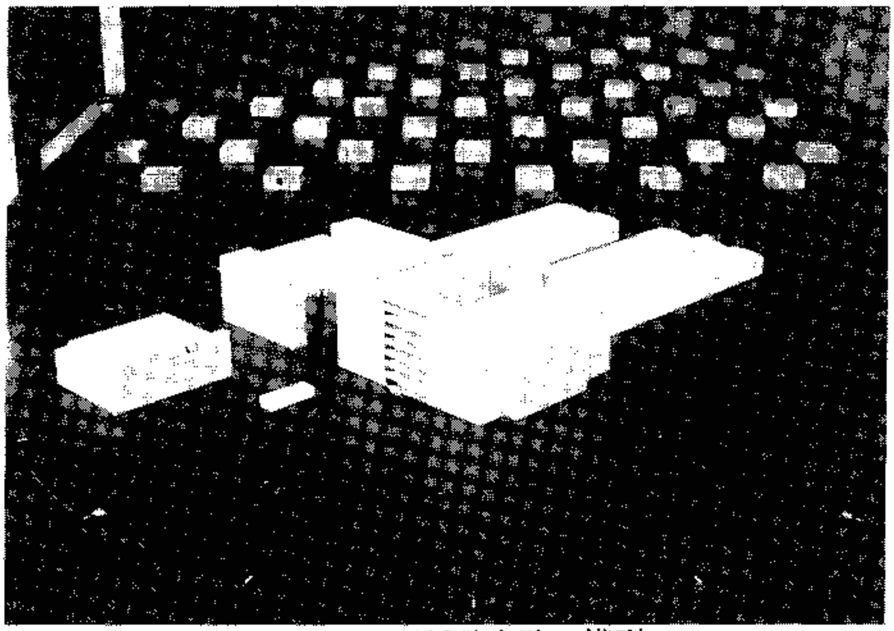


写真5-3　風圧係数実験の模型

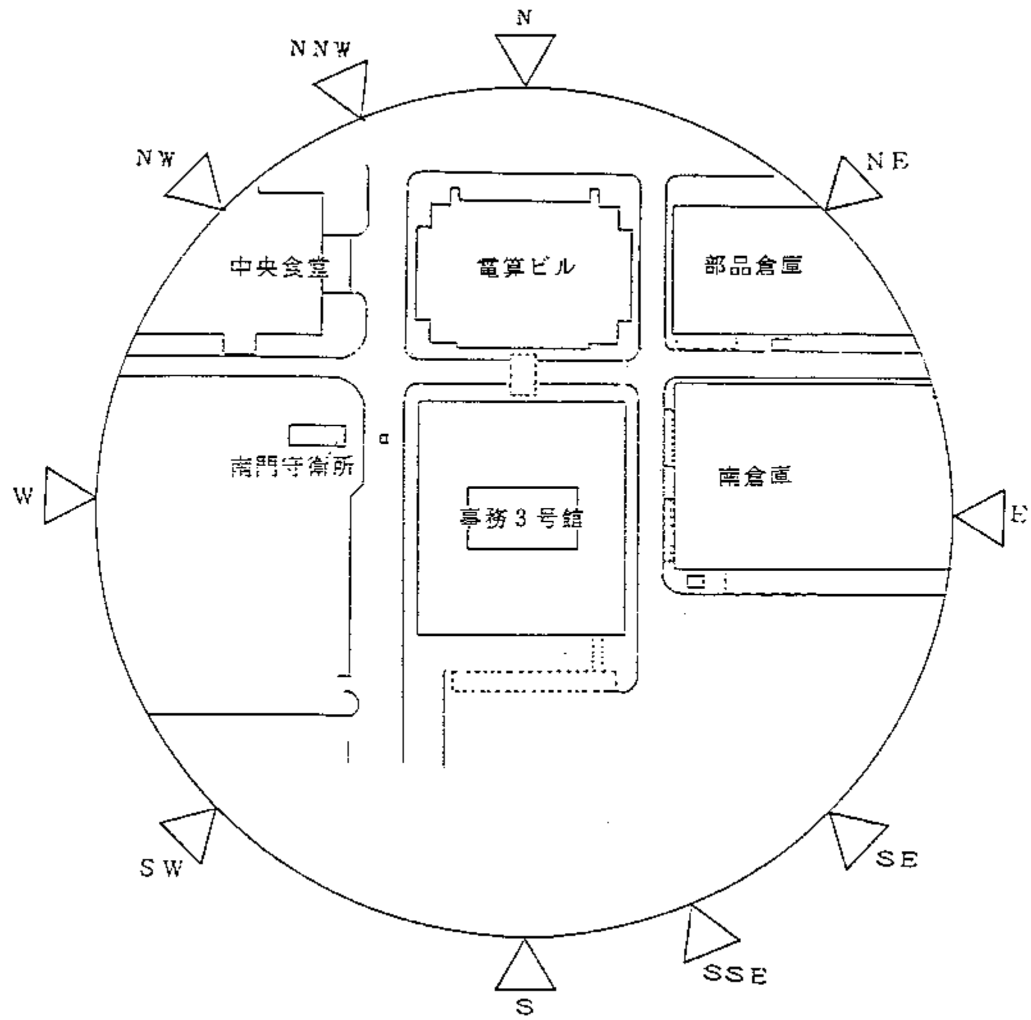


図5-44　風圧係数実験の風向

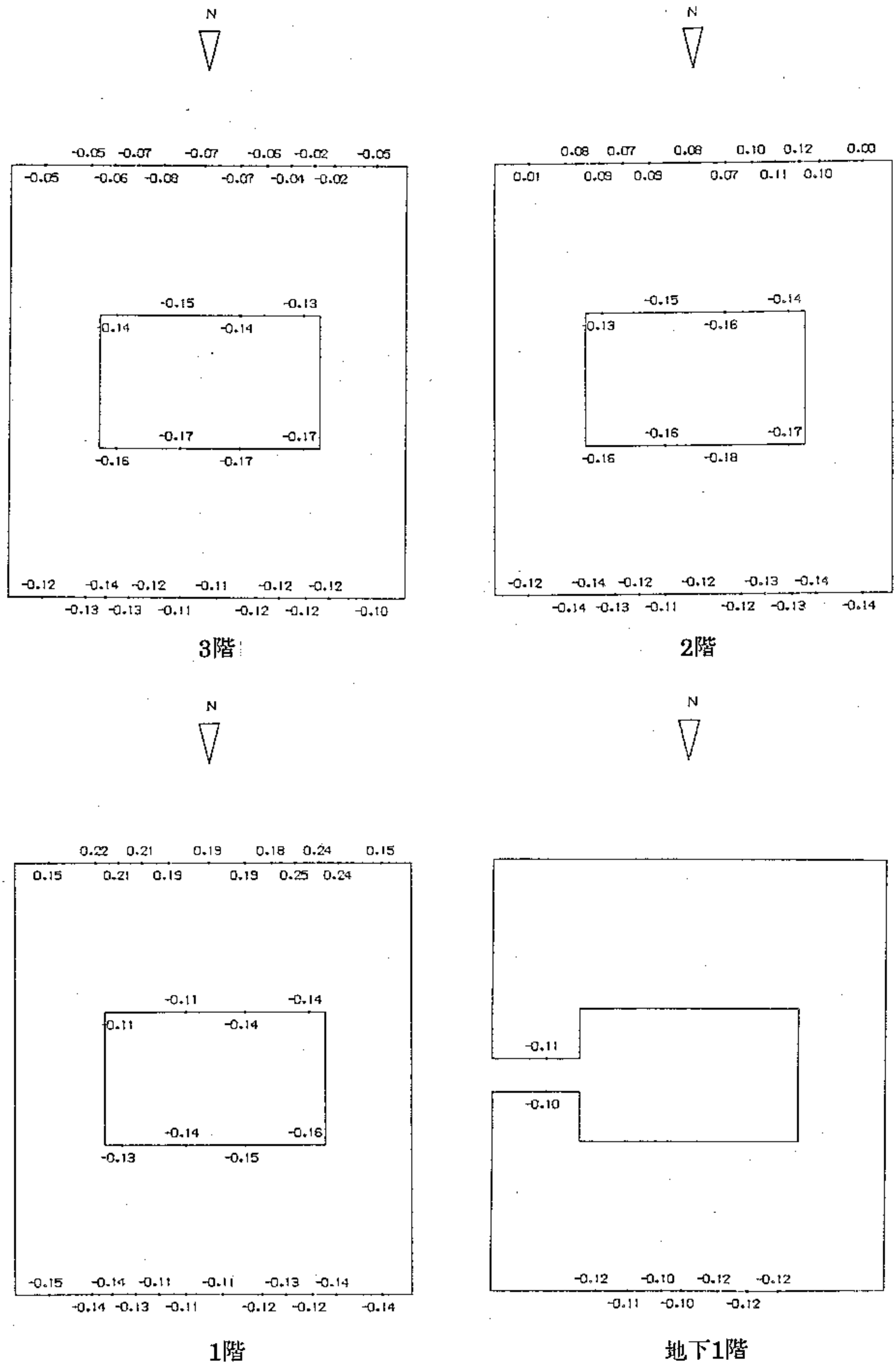


図5-45　風圧係数実験結果・北風時

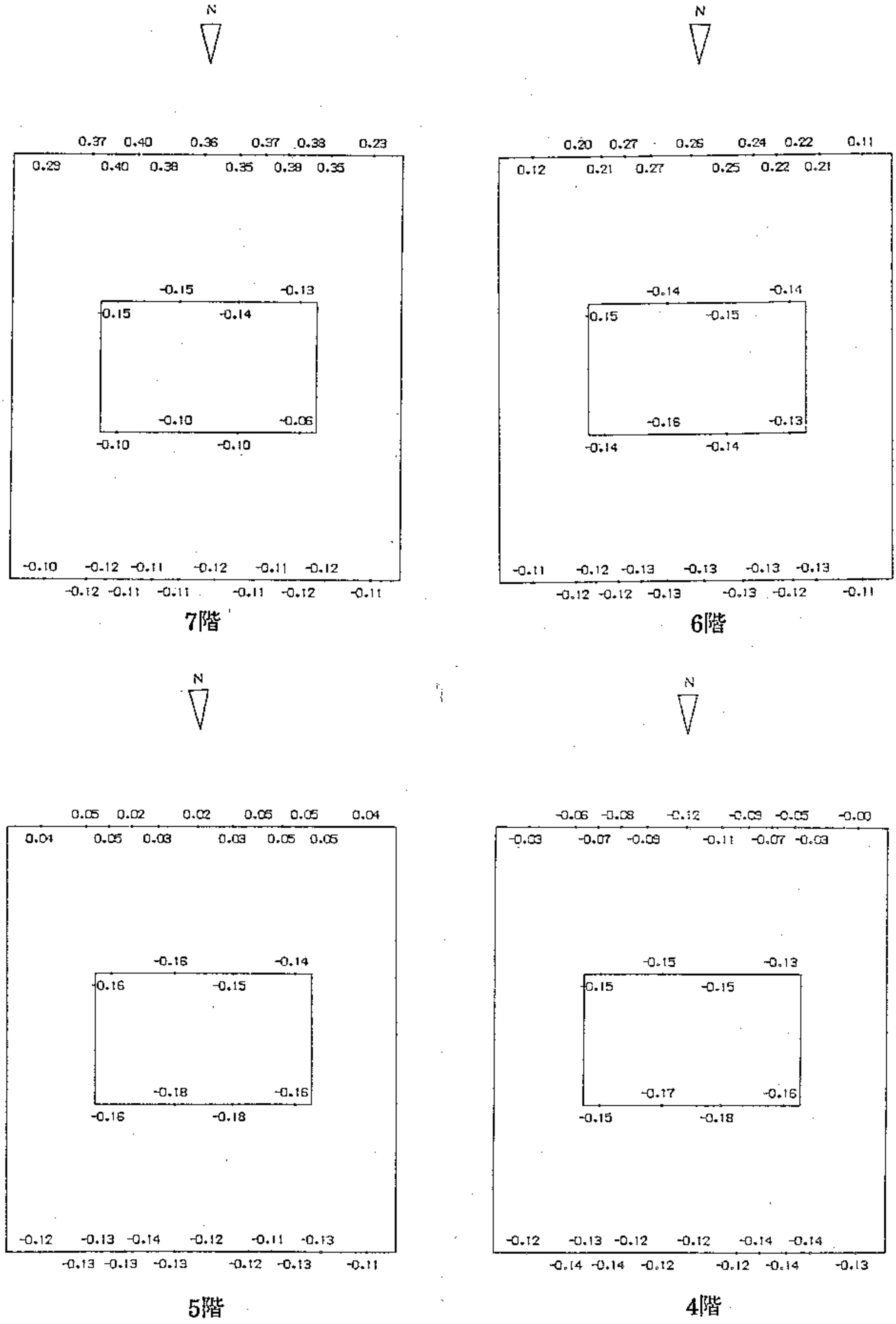


図5-46　風圧係数実験結果・北風時

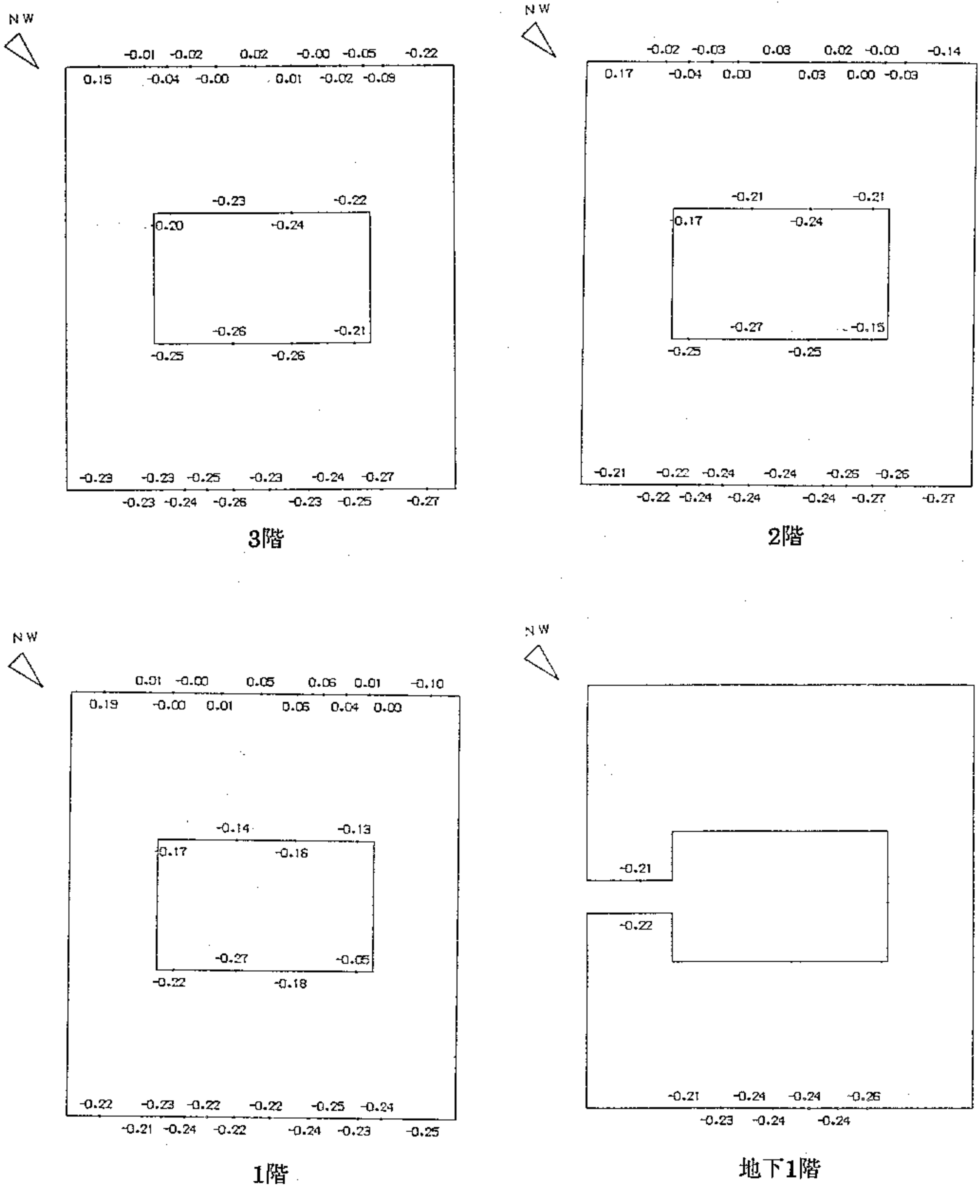
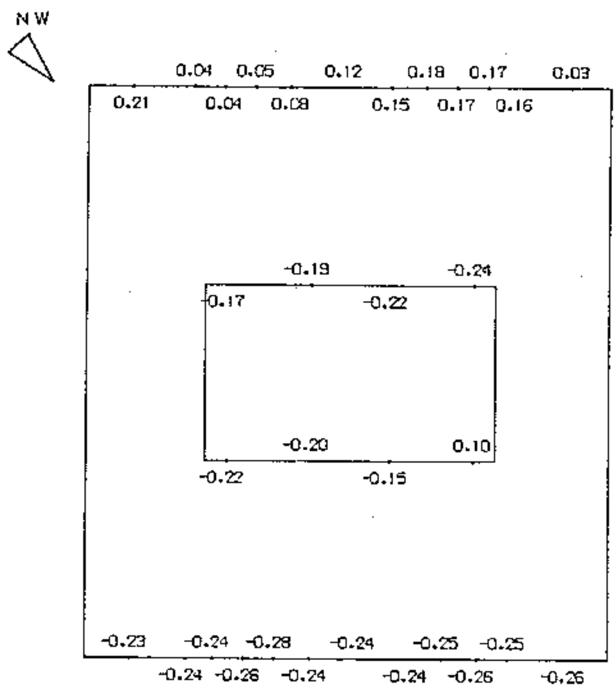
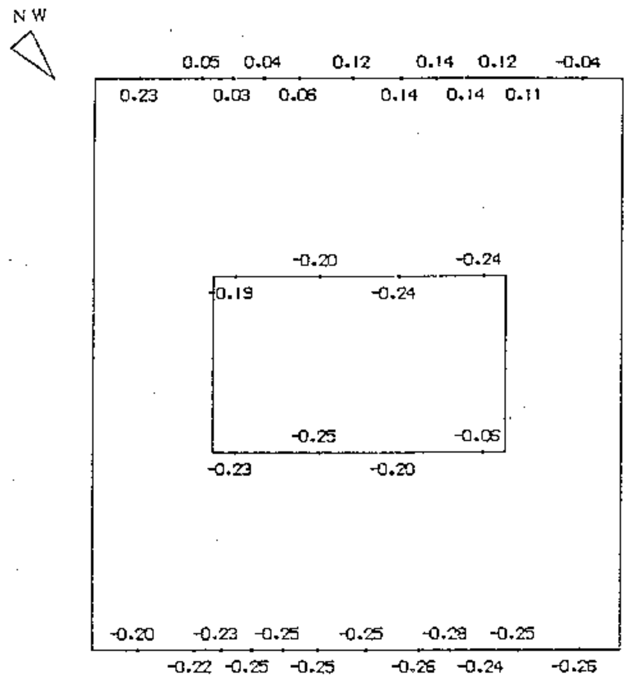


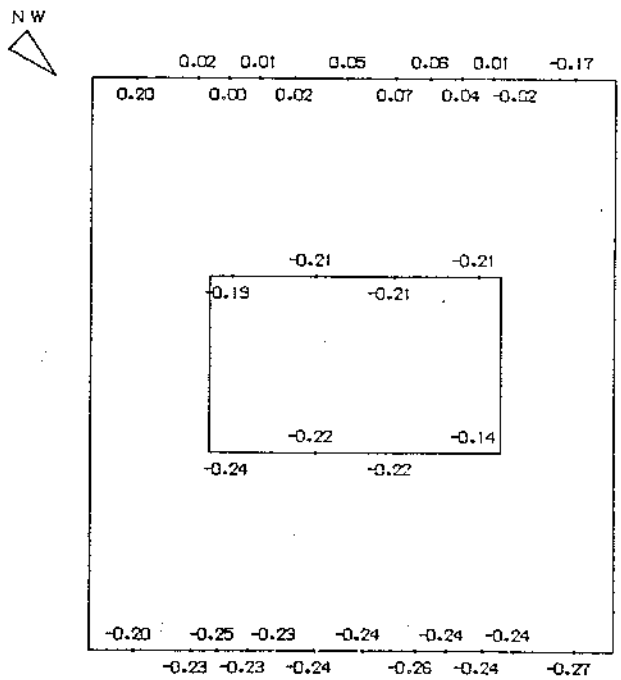
図5-47　風圧係数実験結果・北西風時



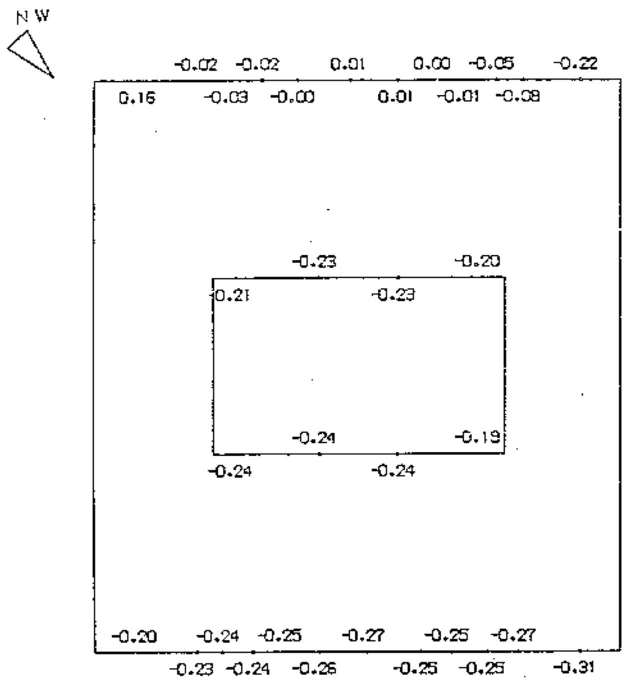
7階



6階



5階



4階

図5-48　風圧係数実験結果・北西風時

タイプⅢ　計画案　　　　　　無風状態　開口率　50%

北側ポーチ　閉

食堂ドア　開

10／24　12：00

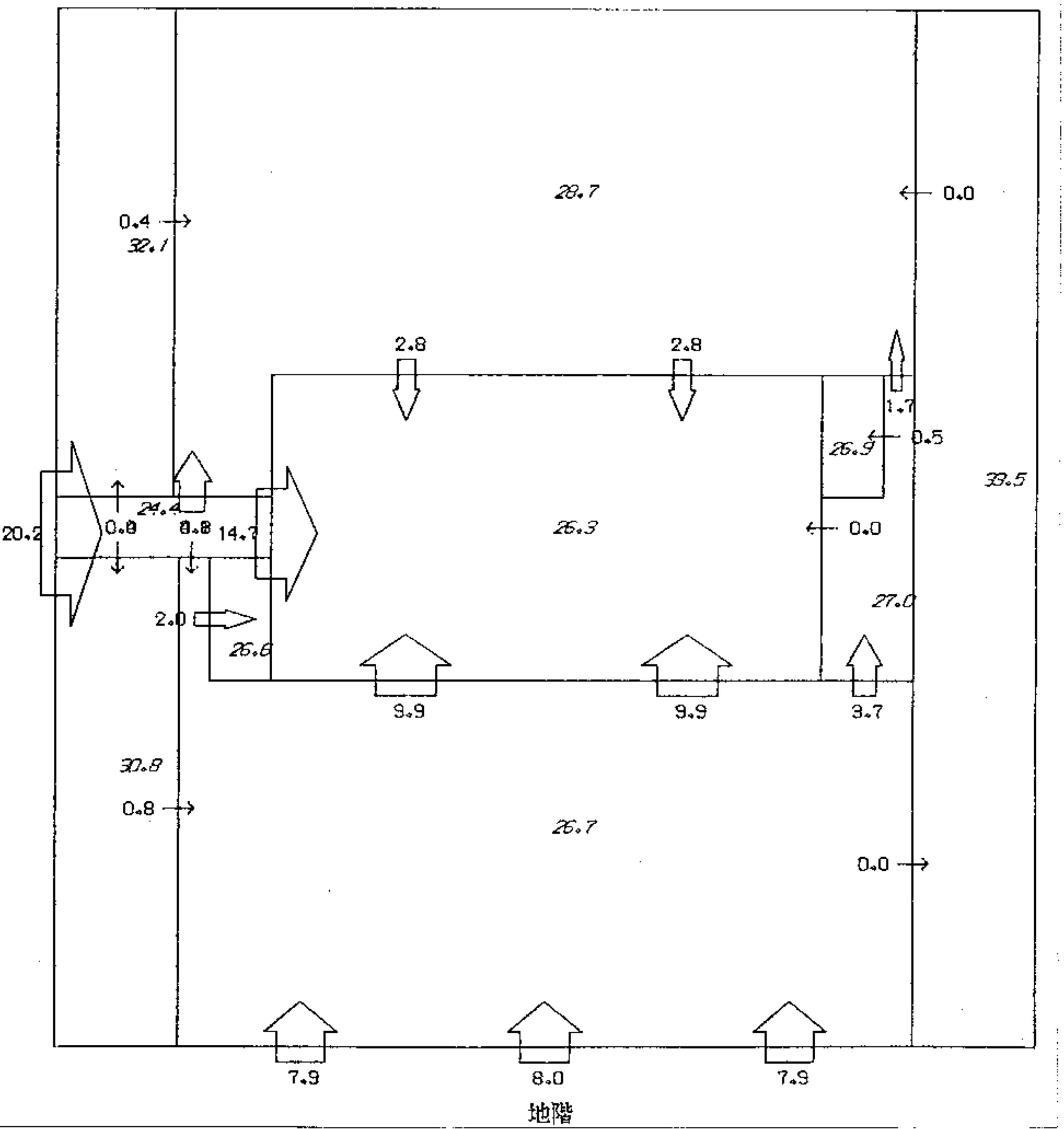


図5-49　風量および温度分布・地下1階(無風)

タイプⅢ　計画案　無風状態　開口率 50%

北側ポーチ　閉
食堂ドア　開
10／24　12：00

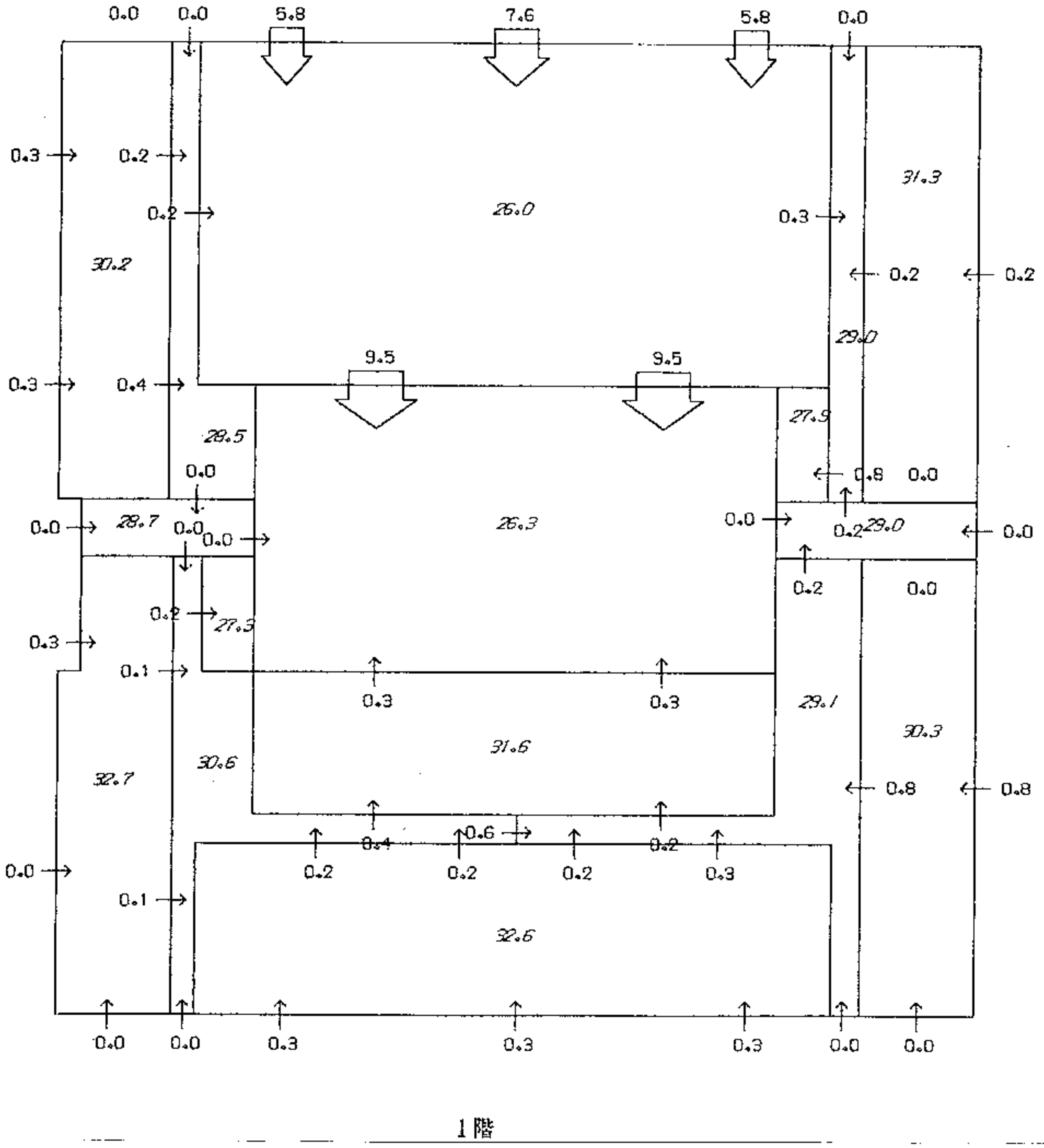


図5-50　風量および温度分布・1階(無風)

タイプⅢ　計画案　　無風状態　開口率　50%

北側ポーチ　開

食堂ドア　開

10／24　12：00

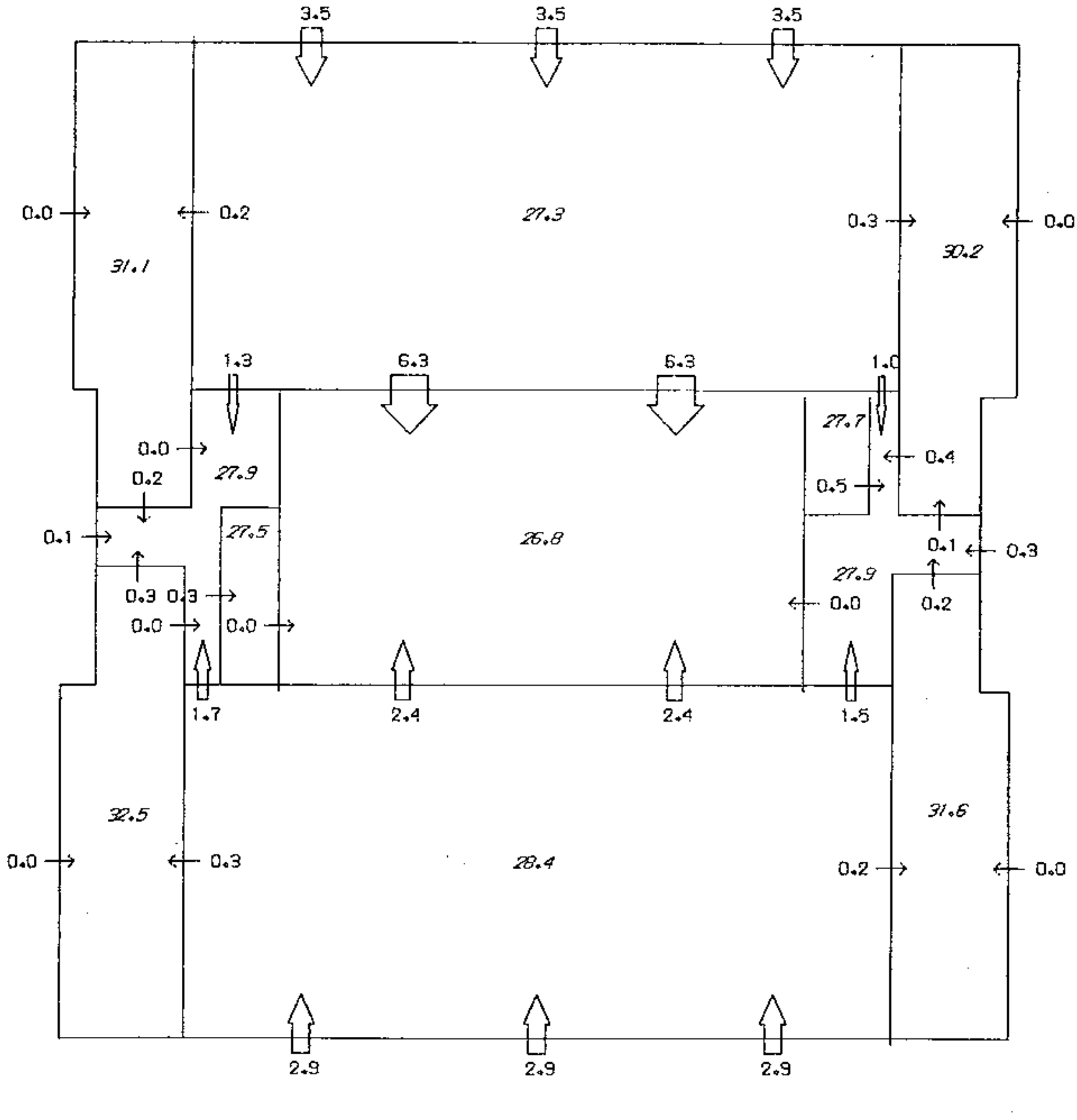
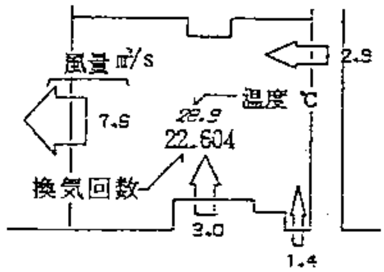


図5-51　風量および温度分布・4階(無風)

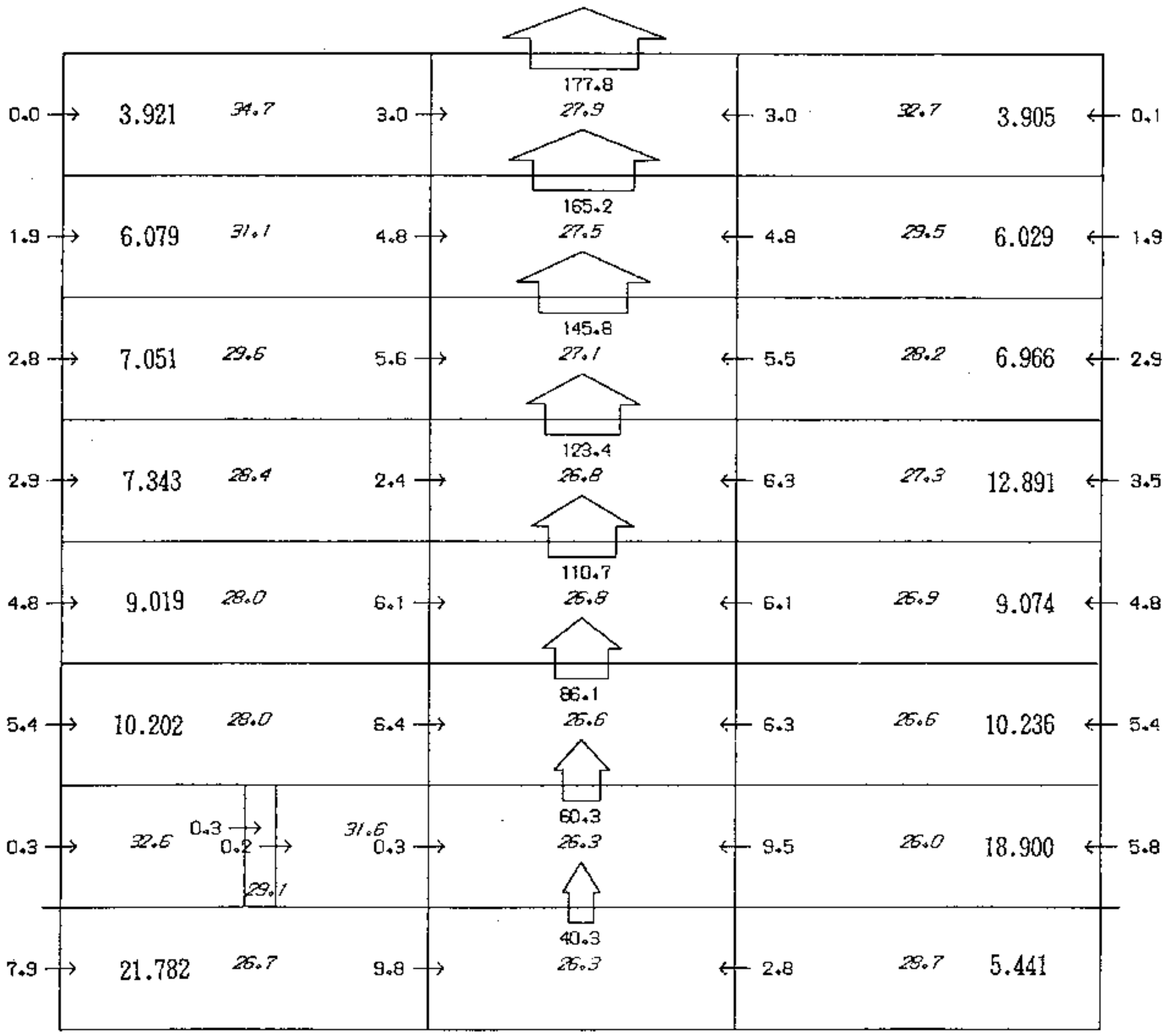
タイプⅢ　計画案　　無風状態　開口率　50%



北側ポーチ　閉

食堂ドア　閉

10／24　12：00



断面Ⅰ

図5-52　風量および温度分布・南北断面西向き(無風)

タイプⅢ　計画案　　　　北風3.0m／s　　開口率 100%

北側ポーチ　閉

食堂ドア　開

10／24　12：00

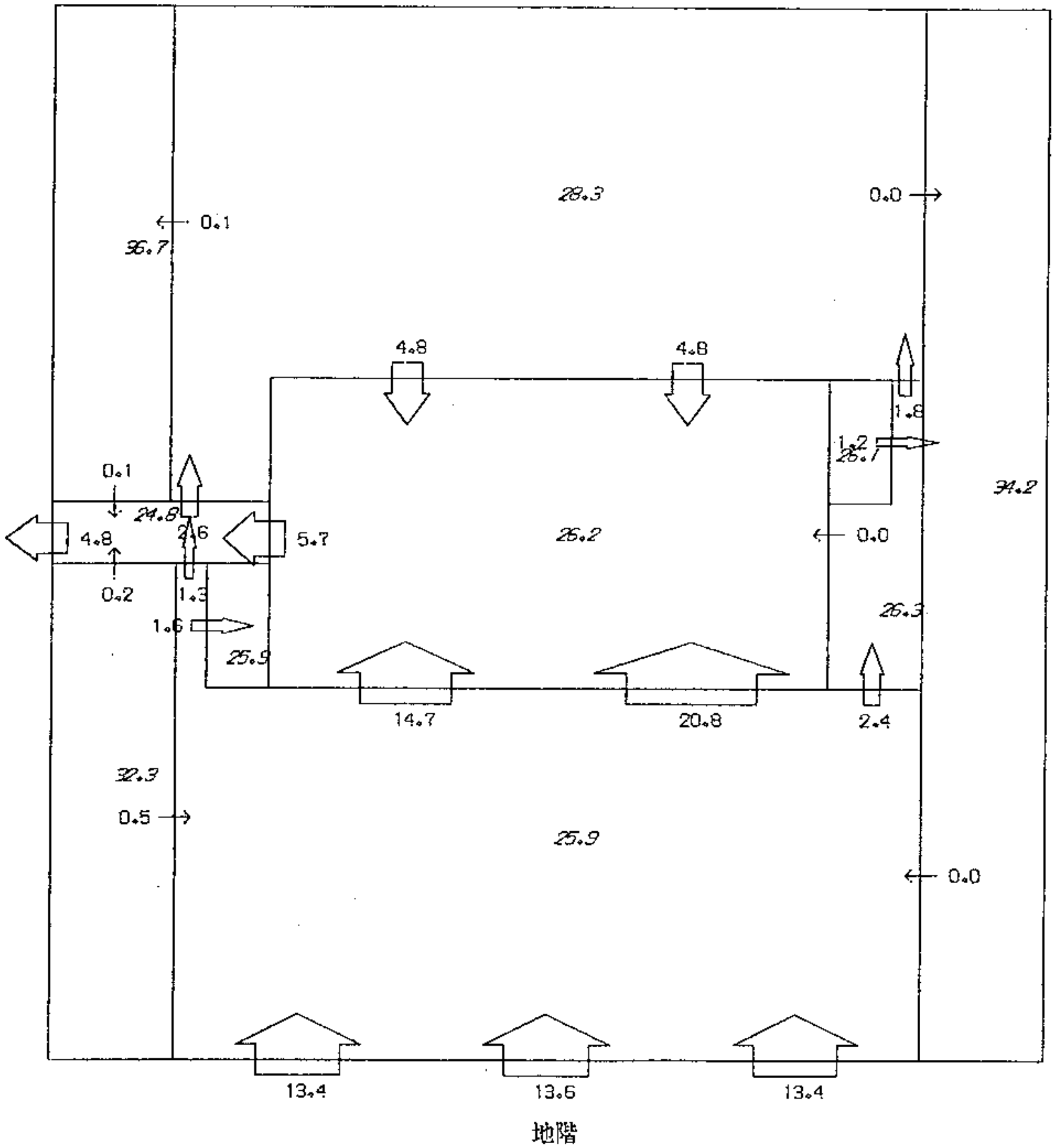


図5-53　風量および温度分布・地下1階(北風 3.0m/s)

タイプⅢ　計画案　北風3.0m／s　開口率 100%

北側ポーチ　閉
食堂ドア　開
10／24　12：00

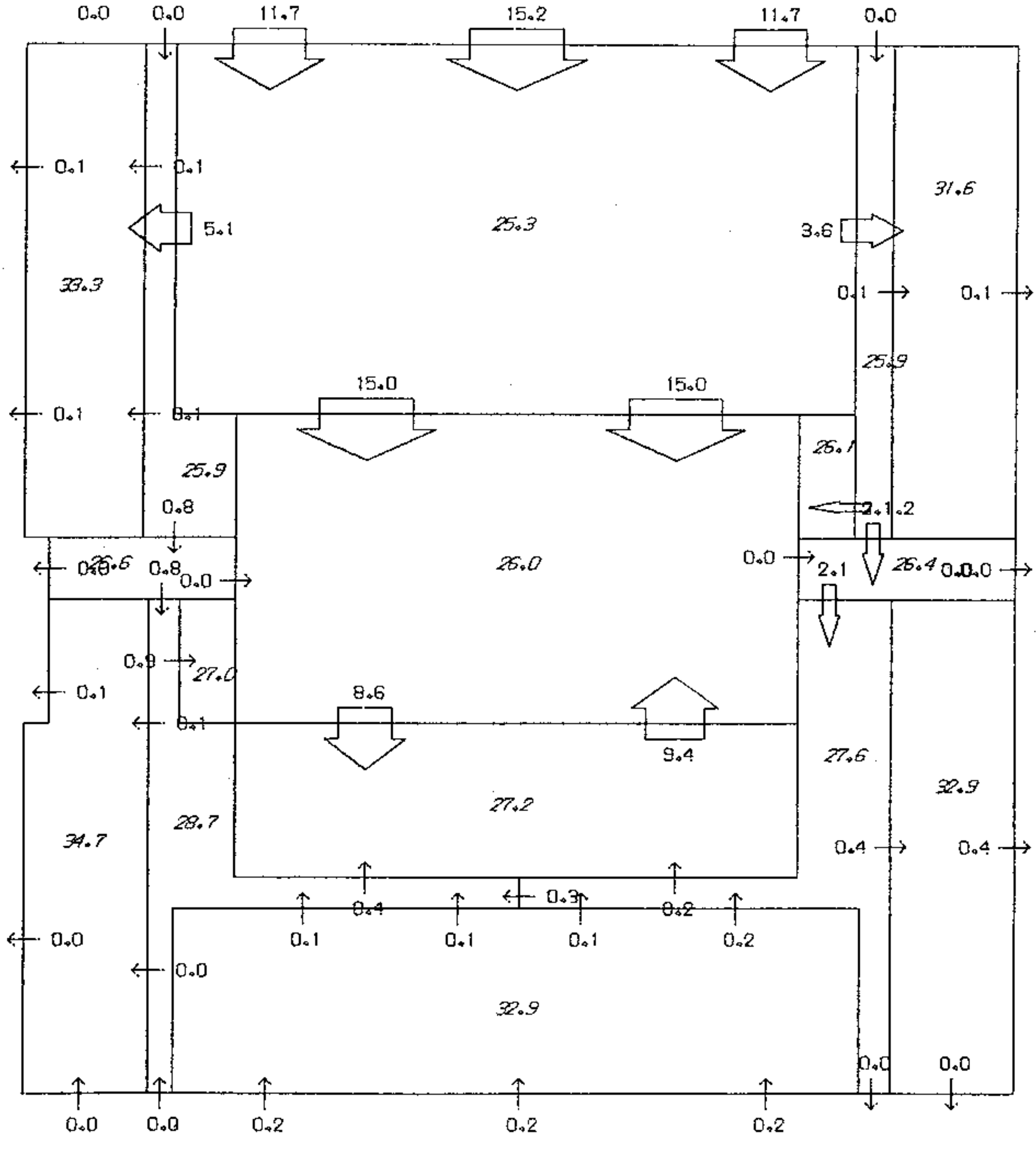


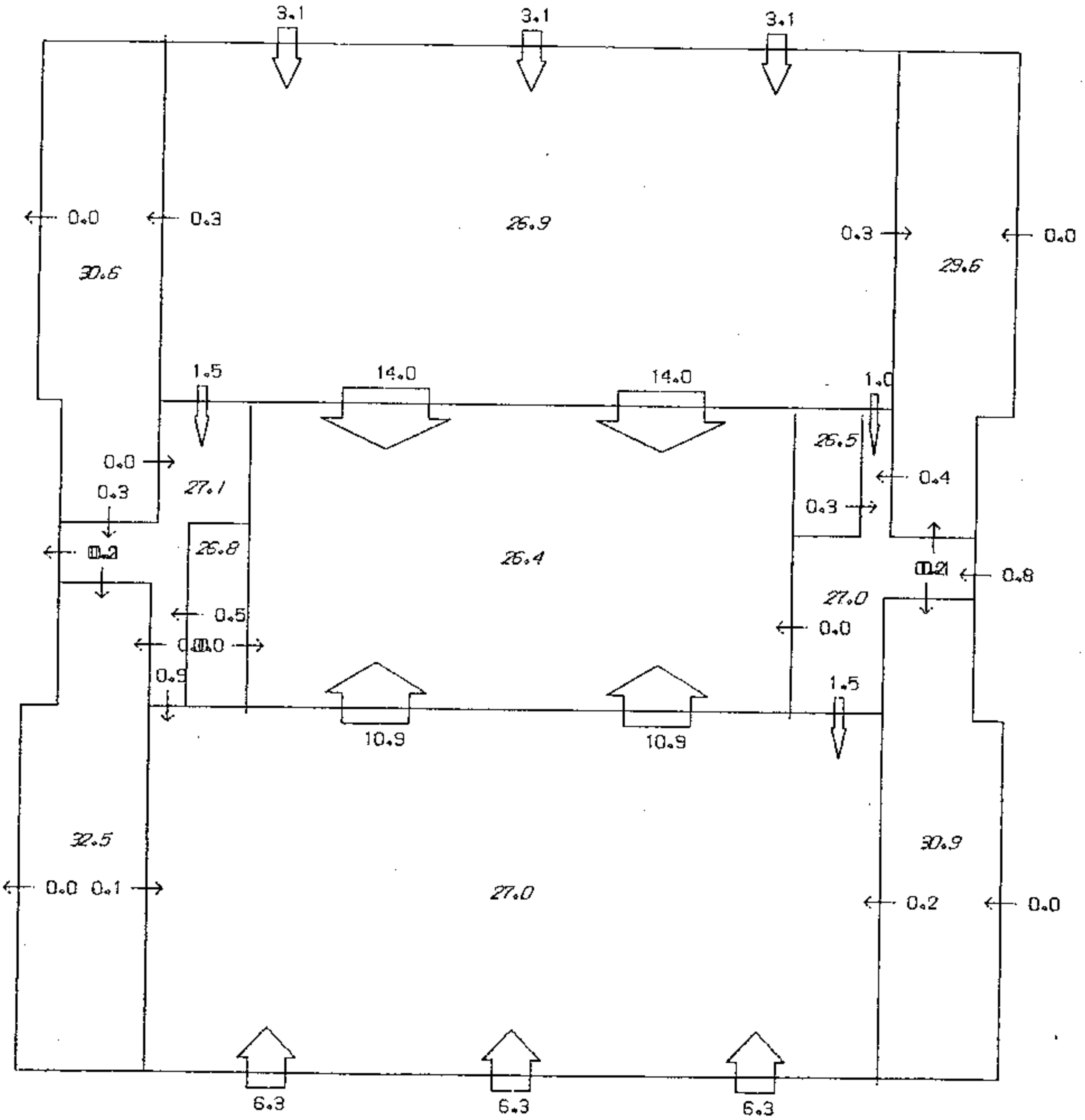
図5-54　風量および温度分布・1階(北風 3.0m/s)

タイプⅢ　計画案　　　　　　　　　北風3.0m／s　開口率 100%

北側ポーチ　開

食堂ドア　開

10／24　12：00



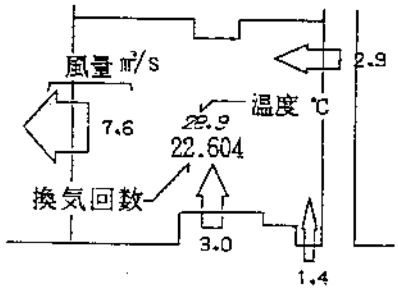
4階

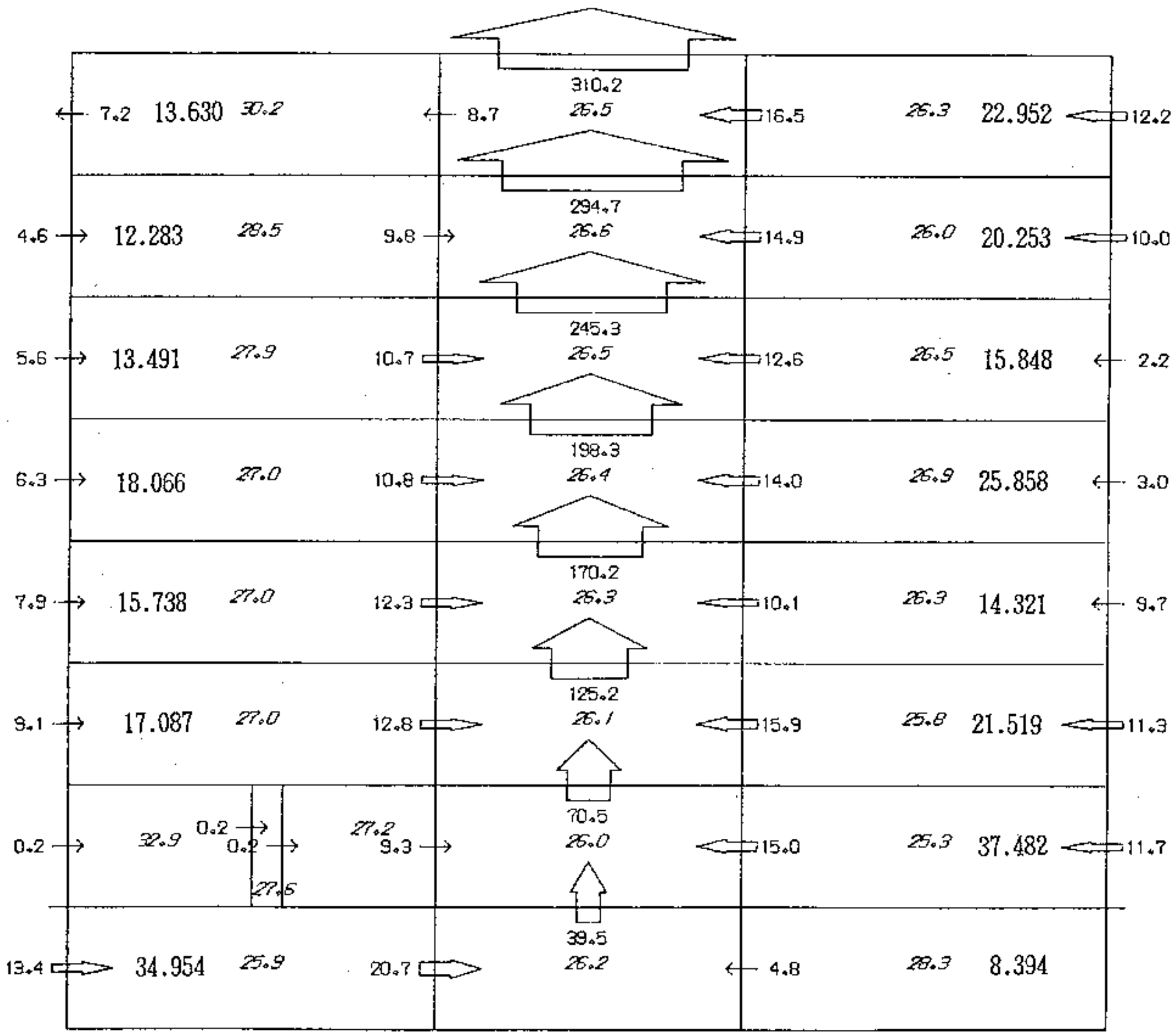
図5-55　風量および温度分布・4階(北風 3.0m/s)

タイプⅢ　計画案　　北風3.0m／s　開口率 100%

北側ポーチ　閉
食堂ドア　閉

10／24　12：00





断面Ⅰ

図5-56　風量および温度分布・南北断面西向き(北風 3.0m/s)

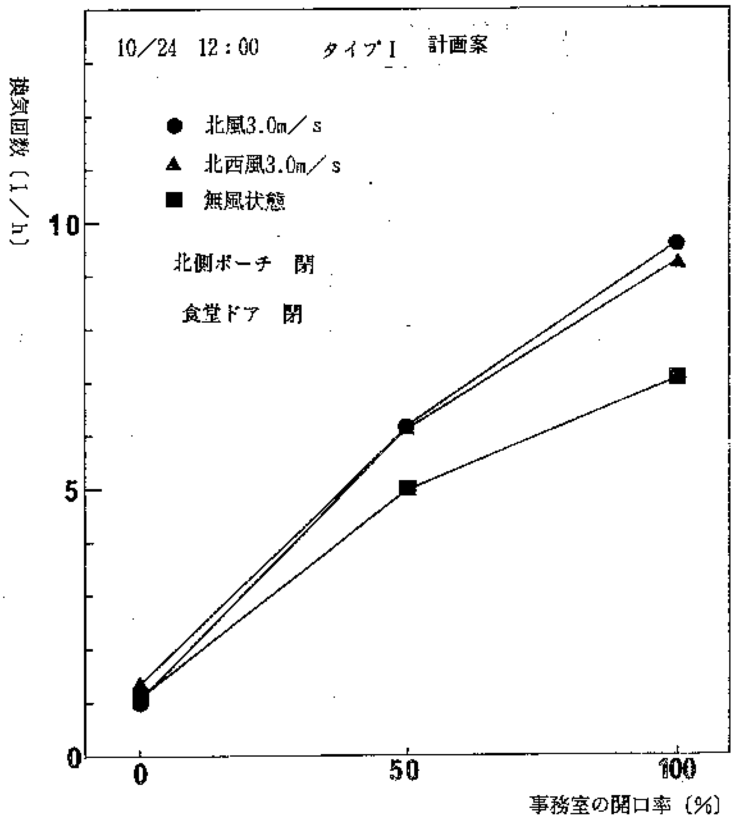


図5-57　建物全体の換気回数・現状の周辺状況(食堂ドア閉)

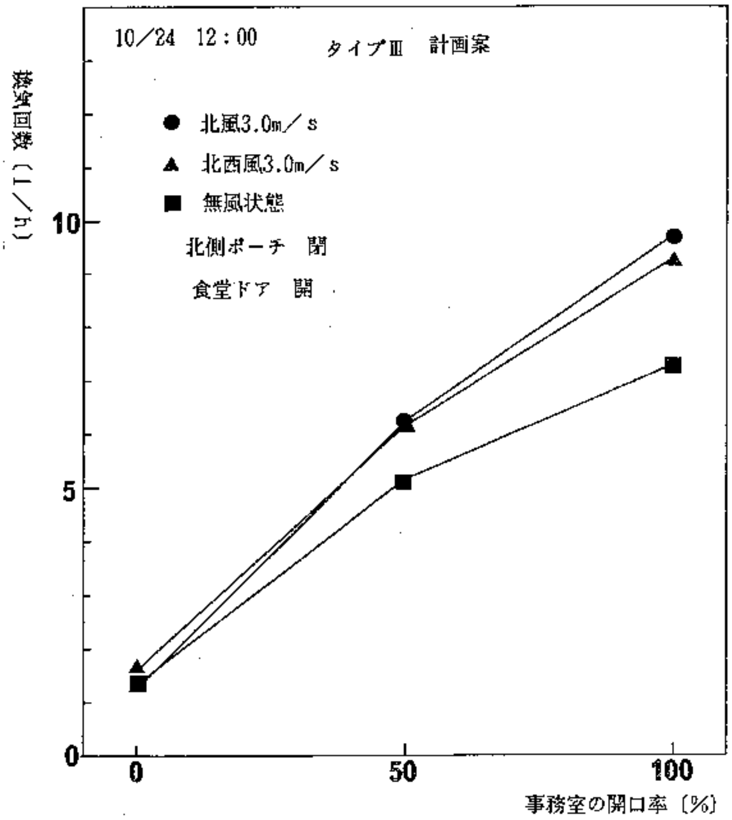


図5-58　建物全体の換気回数・現状の周辺状況(食堂ドア開)

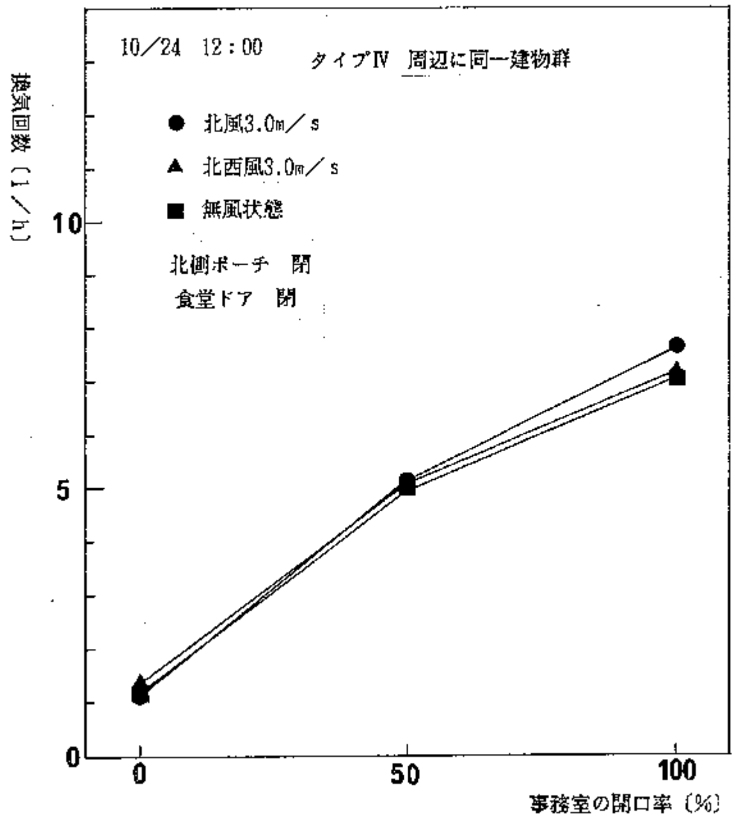


図5-59　建物全体の換気回数・周辺に同一の建物が並んだ場合

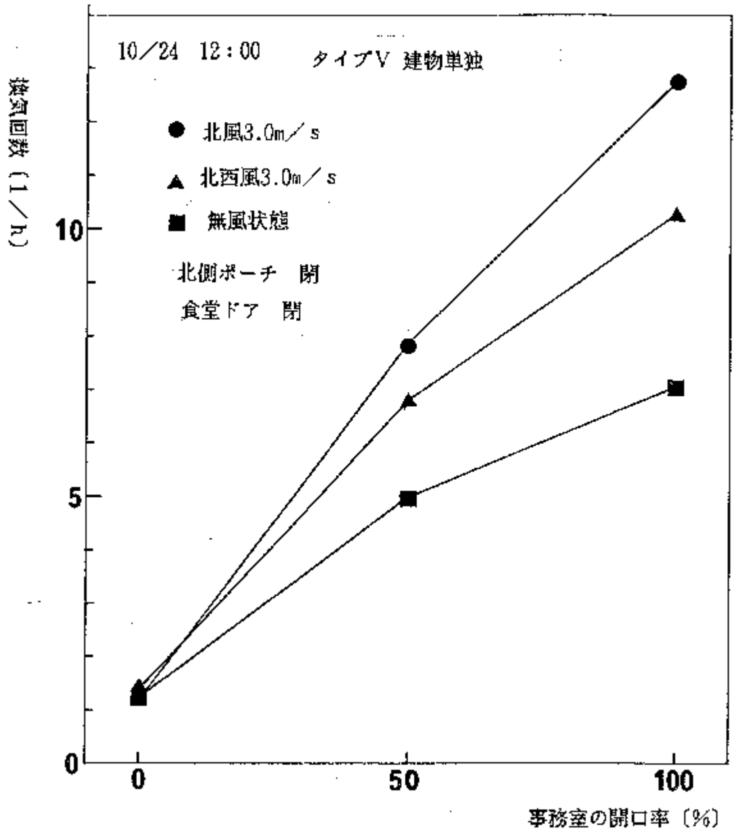


図5-60　建物全体の換気回数・この建物だけ単独に立った場合

5.6　まとめ

この章では換気回路網の計算モデル化とその解法をアルゴリズムに直結した形で述べた．また実測値との比較や煙突効果のような熱系と換気系が相互影響する場合について計算例を示した．

換気系は室内圧に関する非線型系としてとらえられる．熱系のように単純な線型方程式系では表現できない．この解法として，本論文では建築換気系の特徴を考慮した圧力仮定法をとった．これは仮定された室内圧によって風量残差を計算し，これを0にするように室内圧に修正量を施していくものである．こうした計算を汎用性を持ちながらも単純なアルゴリズムで行えるようにデータ構造に工夫をした．また修正ニュートンラプソン法を示した．これは初期値のとり方，ヤコビアンマトリクスの作り方，及び数値的振動の防止法などである．さらにこの非線形連立方程式を解くためには，普通のニュートンラプソン法に修正を加えなければならない理由について論述した．

機械換気系も含めて一般的にモデル化するために全圧節点系の概念について論じた．室内と空調ダクトの中を比較すると，室内は動圧が無視でき，静圧が支配的であるが，ダクト中では動圧が顕在化してくる．従来からダクト系設計においては統一的に全圧で扱う方法の便利さが良く知られているが，ここでは建物の室の底面にも静圧を全圧として持つ節点を設けて，その方法を拡張し，換気系全体は全圧を持つセル(室)と通気路だけの集まりのモデルとしてとらえられるようにした．またこの通気路の集中定数化の概念についても論じた．そしてこのモデルを全圧節点系と呼ぶことにした．

換気系と熱系の連成をするための方法についても論じた．熱回路網で表示される熱容量節点系と，換気回路網で表示される全圧節点系は空気温度と密度の関係で結ばれている．そこで，両系の節点番号の対応関数を定義することによってこれをアルゴリズム上明確なものにした．

特に把握が困難とされる隙間風の換気量を，このシミュレーション法によって予測した場合の精度について，実測値と比較することにより検討した．換気の実測をしたのはRC(鉄筋コンクリート造)烏山アパート，RCメゾネット長堀アパートと奥沢木造住宅の3種類である．RC烏山アパートの換気モデルで用いる諸係数について，隙間の通気抵抗は加圧箱試験で，風圧係数は風洞実験で比較的に確かなものにしたにもかかわらず，換気回数で最大30%の違いを生じた．あとの2種の建物では文献資料にもとずいてモデルの諸係数を与えた．このうちRCメゾネットでは同様に約20%の違いであったが，隙間の所在や形状が不明確であった木造ではそれが40%にも達した．これらの検討により，低層で風圧換気が支配的な住宅においては，隙間風換気を換気シミュレーションによって正確に予測することは困難であり，傾向を把握できる程度であるといえる．また予測誤差の主な原因は，外部風の動的な乱れを考慮できない現状の風圧係数の扱い方と，隙間の形状の不確定さであると考えられる．

次に吹き抜けの中庭を持つ8層の事務所建物について，自然通風効果の検討に熱と換気の連成シミュレーションを適用した．この建物も風圧係数について，周辺状況や風向をさまざまに変えて風洞実験をした．シミュレーション結果として，無風状態はもちろん，どのような風向の外部風であっても，中庭に空気流が集り上へ抜けていく傾向を持つことがわかった．これは煙突効果に加え，中庭の周壁の風圧係数が風向によらず常に負になる特性に起因すると考えられる．また

周辺に建物が立っている普通の状況では風圧換気の寄与分は相対的に小さく煙突効果が支配的であるが，周りに建物がない状況では風圧換気が大きくなってくることが確認された．

第6章　状態方程式のシステムパラメータ同定

6.1　同定理論

ここでは，回路網の概念によって骨組みが構成される状態方程式のシステムパラメータを，観測過程を経て，同定する理論について述べる．従って前章までの熱回路網によるシミュレーションとは全く逆の問題を考えることになる．予測計算においてはパラメータを何らかの演えき的方法を用いて得た後に，これらによって構成されるモデルを動かして状態値を予測する．逆にこの同定においては，状態値と入力値の観測データから帰納的にパラメータを推定する．しかし，どちらもモデルの骨組みに関しては熱回路網の概念を用いる．

同定という術語は，状態方程式やシステムパラメータと同様に，システム理論的な意味を持つ．こうした新しい背景思想と，回路網の概念により，建築環境工学において問題とされてきた，多数室間の隙間風的な相互換気風量の測定や，外気温と日射量の不規則な変動が作用している状態での建物の熱的性能の現場測定などについて，より見通しのよい実用的な解決法を示すことが可能となる．ところで，これらの問題に対する，建築環境工学でのアプローチ法については序論で述べたとおりである．そこでまず，システム理論的方法の導入が最も進んでいる制御工学での現状と問題点について述べておくことにする．

まず最も重要な実用的観点から，制御工学における問題点を考える．それはモデルの構造に関することである．この問題は割合に無視されていた，または注意をひかなかったこととしてあげられる．すなわちこの問題はとばし，抽象的な数学モデルを仮定したあとの問題が主に議論されてきた．しかし，このような同定の問題にしてもコンピューターを用いずに解くことは不可能である以上，そのモデリングの方法や，これにもとずく同定の方法は具体的にアルゴリズムに直結し，かつどのような形態の系にも汎用的に対応できることが要求される．このようなアルゴリズムが出来てはじめて同定理論は実用的なものになると言える．そこでここでは，一般的な拡散システムを空間的に離散化した近似モデルに対して，その汎用的な構成法と同定法を直ちにプログラミング可能な具体的定式化法で提示するものであるが，これが本回路網の概念とその定式化法に基づくものなのである．

制御工学でも同定を専門に扱っている著者は少ないが，例えば古田博士の「線型システムの観測と同定」の著書[86]に述べられていることから引用すれば，さらに次のような問題点があげられる．

2つめは，これまで単変数に関する同定法が中心であり，多変数系に関する有効な同定法がないことである．すなわち単変数で系の入出力関係を表すには伝達関数あるいは荷重関数モデルを用いることになるが，この場合その数学モデルが同定されても結局ブラックボックスが得られるに過ぎない．しかし，より一般的には演えき的手法により得られる数学モデルと同質なモデル中のパラメータが同定されること，つまり，グレイボックス中のパラメータ同定が望ましい．ここでは，多変数系を演えき的モデルに即した多次の状態方程式でグレイボックスとして表し，そのパラメータ同定を行う方法について論じる．

3つめは同定結果の評価をどう定めるかについては未解決なことである．すなわち，ただ推定値の測定ノイズによる共分散マトリクスが与えられているのが現状である．そこで，同定されて

得られた数学モデルがどの程度の信頼性を持つのかを統計的な定量的指標として定めておくのが望ましい．ここでは，統計における重回帰分析法で定めている，いくつかの有意性検定指標を参考に，多次元の多変数系にも適用できるように拡張し，定義する．

4つめには同定のために定義する方程式誤差の評価関数をどのように定式化するかである．現状では入力と出力の観測値を離散時間的に得ていくたびにこれらの要素によって構成されるベクトルとマトリクスの行を増していく方法をとっているのが普通である．このような定式化であると，観測データを蓄積しておいて，あとから同定する場合に，コンピューターの必要記憶領域が過大になったり，離散的観測間隔内における観測値の変動が評価関数に反映されない場合が出てくる．そこでここでは，観測方程式誤差の二次形式を時間積分した量を評価関数の基礎式とする．すなわち，マトリクスの行を離散的に増していくのではなく，時間軸方向に連続的に積分していく定式化をとる．

5つめには，同定結果が観測ノイズに影響されずに不偏性(unbiasedness)，一致性(consistency)や有効性(efficiency)などの良い性質[92]を持つようにするために，重み付き最小二乗法においてマルコフ推定を適用すればよいことは論じられているが，扱われている数学モデルに具体性が欠けるため，それに用いる重みマトリクスの作り方が述べられているものがないことである．重みマトリクスには観測方程式誤差の共分散マトリクスの逆マトリクスをとればよいが，本論文で扱う系においては回路網の定式化法によって観測ノイズから観測方程式誤差への誤差伝播構造を具体的に定式化できることから，その重みマトリクスを計算することができる．さらにrobust性を持たせるためTukeyのBiweight法[87]を多次元に拡張したものを付加する．

6つめには可同定性の考察のためにパラメータのベクトルに関して入力を持つ離散時間システムを構成して議論している例がないことである．ここでは，その推移マトリクスの漸近安定性を考察することから可同定性をより明快に論じる．

6.1.1 観測方程式

システムパラメータを同定するための状態値と入力値の観測値から構成される観測方程式について述べる．ここで状態値と入力値として具体的な物理量を特定しないのは，この同定法を適用する拡散系に多くの種類がありえるからである．例えば，多数室換気測定においては各室でのトレーサーガス濃度が状態値に相当し，ガスの注入流量が入力値に相当する．また，建物の熱的性能実験においては建物の各部分の温度が状態値であり，外気温や日射量あるいは電熱ヒーターの熱量が入力値となる．しかし，どのような拡散系になろうとも，また形状がどうであろうと，用いる同定の計算プログラム本体は同じもので間に合う．このことを可能にしているのが第2章で述べた回路網の概念と拡張コンダクタンスの考え方である．その完全システムの節点方程式は一般に次式で表される．

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot x_j = \sum_{j=1}^{n+n_o} c_{ij}\cdot x_j - \sum_{j=1}^{n+n_o} c_{ji}\cdot x_i + \sum_{j=1}^{ng} r_{ij}\cdot g_j \qquad (6\text{-}1)$$

この式で用いる記号は第2章で述べた通りである．そして全体での状態方程式は次のようになる．

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{C}_o\cdot\mathbf{x}_o+\mathbf{R}\cdot\mathbf{g} \tag{6-2}$$

この式での記号も第2章と同様である.

同定しようとするシステムパラメータは直接観測することができないという前提がある.しかし状態ベクトル$\mathbf{x}$および入力$\mathbf{x}_0$, $\mathbf{g}$は観測できるという前提を設ける.これらのベクトルとシステムパラメータは(6-2)式によって関係づけられているから,これらのベクトルの観測によって,システムパラメータは間接的に推定できると考えられる.そこでシステムパラメータの観測方程式として(6-2)式を変形したものを用いる.

今,いくつかのシステムパラメータは既知とする.このことを実現象で例えれば,

1) トレーサーガス拡散系:各室にかくはん機があるか,またはその容積が比較的小さく,一様な濃度を持つと考えられる容積が室の容積と等しくm_{ij}が既知の場合,
2) トレーサーガス拡散系:各室へのガス注入流量が測定されており,またその注入ガス濃度がわかっているためr_{ij}が既知の場合,
3) 熱拡散系:電熱変換効率は1であるため,r_{ij}が既知の場合,
4) 熱拡散系:ある部分に流量が既知な流体が流れ込んでおり,従って物質移動による拡張熱コンダクタンスc_{ij}が既知の場合,
5) 熱拡散系:有限要素法で離散化する際に支配方程式の$\partial\theta/\partial t$の項の係数を1にしたために,マトリクス$\mathbf{M}$の要素$m_{ij}$が全く幾何学的形状だけによって決定されることにより既知となる場合,ただし,この場合に同定されるc_{ij}, r_{ij}は異なった単位を持つことになる,

などがあげられる.

そこで(6-2)式において,既知のシステムパラメータによってできる項は左に移し,ベクトル$\mathbf{y}$とする.これらのパラメータには必ず,$\dot{\mathbf{x}}_i$, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{g}_i$の変数のいずれかが乗じられているから,$\mathbf{y}(\dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{g}_i)$と書ける.そして,この移項のアルゴリズムは付録6の(a)のようにして行える.

そこで,左辺の$\mathbf{y}$へ既知パラメータが,$\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{R}$から移項していってできるマトリクスをそれぞれ$\widetilde{\mathbf{M}}$, $\widetilde{\mathbf{C}}$, $\widetilde{\mathbf{C}}_0$, $\widetilde{\mathbf{R}}$と表せば,(6-2)式は次のようになる.

$$\mathbf{y}=-\widetilde{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{x}+\widetilde{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{x}+\widetilde{\mathbf{C}}_o\cdot\mathbf{x}_o+\widetilde{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{g} \tag{6-3}$$

右辺に残っているパラメータは全て同定しようとするものだけである.

そこでまず,$\widetilde{\mathbf{M}}$の中にn_m個の被同定パラメータm_{ij}があるとし,これらを任意の要素順番で持つベクトルを$\mathbf{m}(n_m)$とする.同様に$\widetilde{\mathbf{C}}$と$\widetilde{\mathbf{C}}_0$の中のc_{ij}のベクトルを$\mathbf{c}(n_c)$,さらに同様に$\widetilde{\mathbf{R}}$の中のr_{ij}を$\mathbf{r}(n_r)$とする.これらの被同定パラメータは系の物理的空間構成から現実に存在し得る必要最小限のものにとどめる.

次に(6-3)式右辺を$\mathbf{m}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{r}$について明らかな形に変形する.そのために,それぞれのパラメータを含む3つの項にまとめる.第1項においてはベクトル$\mathbf{m}$が右に出されるが,そのときその要素m_{ij}の持つ添字数iとjに応じて付録6の(b)に述べるアルゴリズムによって,状態値の微分$\dot{x}_i$($i=1,2,\cdots,n$)を要素に持つマトリクス$\mathbf{D}(\dot{x}_i)$が自動的かつ一般的に構成できる.同様に第2項からは$\mathbf{c}$に対して状態値x_i($i=1,2,\cdots,n+n_0$)を持つマトリクス$\mathbf{X}(x_i)$が付録6のアルゴリズム(c)によって,第3項から$\mathbf{r}$に対して,入力値g_i($i=1,2,\cdots,n_g$)を持つマトリクス$\mathbf{G}(g_i)$が,同じくアルゴリズム(d)に

よって構成される．

$$\mathbf{y}=-\widetilde{\mathbf{M}}\cdot\dot{\mathbf{x}}+[\widetilde{\mathbf{C}},\widetilde{\mathbf{C}}_o]\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}_o\end{bmatrix}+\widetilde{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{g}$$

$$=\mathbf{D}(\dot{x}_i)\cdot\mathbf{m}+\mathbf{X}(x_i)\cdot\mathbf{c}+\mathbf{G}(g_i)\cdot\mathbf{r} \tag{6-4}$$

ここにマトリクス$\mathbf{D}(\dot{x}_i)$, $\mathbf{X}(x_i)$, $\mathbf{G}(g_i)$のサイズはそれぞれ$(n\times n_m)$, $(n\times n_c)$, $(n\times n_r)$である．

同定されるc_{ij}には重要な条件が成立しなければならない．それは質量保存則の次式である．

$$\sum_{j=1}^{n+n_o} c_{ij}=\sum_{j=1}^{n+n_o} c_{ji} \tag{6-5}$$

これは第2章で述べたように，固有値の性質など，拡散系の必須の基本特性の元となるものである．同定されるc_{ij}は，あくまでも誤差を含んだ観測値をもとにして推定されるものであるから，厳密には(6-5)式を満たさない可能性がある．従って，はじめからc内のc_{ij}に(6-5)式の拘束条件を付けておいた方が安全である．また，このような条件を付けることによって推定しようとする実質的なパラメータの総数は減るから同定精度も上がると考えられる．さらに，例えば，1～n内の1つの節点iから，$n+1$～$n+n_o$内の2つの節点j_1, j_2へ$c_{j1,i}$と$c_{j2,i}$が出ているとする．これらの拡張コンダクタンスが$\mathbf{c}$内でk番とl番に位置するとすれば付録6の(c)の$\mathbf{X}(x_i)$の構成アルゴリズムにより，$\mathbf{X}$のk番とl番列ベクトルはi行要素に$-x_i$があり，ほかの要素は0の全く同一のベクトルになることがわかる．すなわち$\mathbf{X}$には線型従属な列ベクトルが存在することになるが，このときは後述する正規方程式にも線型従属なものが存在することになり不可同定となる．このような場合も(6-5)の拘束条件により，1つの節点について1本，全体でn本までは，これらの線型従属な列ベクトルを消去できる．

(6-5)式を$i=1,2,\cdots,n$について立てて，これを$\mathbf{c}$に関する斉次方程式系と見なせば，$\mathbf{c}$を$\mathbf{c}_s(n)$と$\mathbf{c}_m(n_c-n)$に分割し，${}^t\mathbf{c}=({}^t\mathbf{c}_s,\ {}^t\mathbf{c}_m)$と表したとき，$\mathbf{c}_m$によって$\mathbf{c}_s$は(6-6)式，$\mathbf{c}$は(6-7)式のように記述できる．

$$\mathbf{c}_s=\mathbf{S}\cdot\mathbf{c}_m \tag{6-6}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}\\ \mathbf{E}_s\end{bmatrix}\cdot\mathbf{c}_m=\mathbf{L}\cdot\mathbf{c}_m \tag{6-7}$$

ここに，$\mathbf{E}_s$は(n_c-n)次の単位マトリクスである．従属関係$\mathbf{S}$のマトリクスは$n\times(n_c-n)$のサイズである．$\mathbf{S}$は，一般長方マトリクスについて基底列ベクトルによって非基底列ベクトルを表す関係を出力するような標準的数学サブルーチンライブラリにあるもので作られるが，その要素は-1, 0, 1だけで構成されることが容易に示される．(6-7)式のマトリクス$\mathbf{L}$を$\mathbf{c}$の縮小マトリクス，$\mathbf{c}_m$の拡大マトリクスと呼ぶことにする．

以上は，必須の条件を利用して$\mathbf{c}$のサイズを縮小するものであるが，実際には先験的にさらに種々の拘束条件が同定パラメータの間に存在することがわかる場合が多いであろう．例えば，伝導だけの系では$c_{ij}=c_{ji}$の対称性の拘束式や$\mathbf{M}$の容量マトリクスが対称であることから$m_{ij}=m_{ji}$の拘束式などが考えられる．従って，実際はこれらの先験情報によって可能なかぎり同定パラメータベクトルのサイズを減らしておくことが望ましい．さらに，実質的なシステムパラメータの個数を減らすだけでなく，熱物性値のような，より基本的な数個のパラメータの同定に帰着させてしまうことも可能である．

そこで，熱物性値のような基本パラメータを同定する場合について，考察を行っておく．このようなことが適当なのは，有限要素法による離散系であろう．そこで，このような集中定数化の方法と，システムパラメータの関連を論じた第2章の(2-73)式から(2-76)式を見れば，m_{ij}については何種類かの$c_p\cdot\gamma$の線型結合によって，c_{ij}は何種類かのλあるいはαによって，さらにr_{ij}についてはやはり何種類かのαの線型結合によって記述されることがわかる．従って計算対象物がm_1種の材質から出来ているとすれば$c_p\cdot\gamma$のm_1次ベクトル$\boldsymbol{\lambda}_{m1}={}^t(c_{p1}\cdot\gamma_1, c_{p2}\cdot\gamma_2,\cdots\cdots,c_{pm1}\cdot\gamma_{m1})$によって

$$\mathbf{m}=\mathbf{L}_{m1}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{m1} \tag{6-8}$$

と表される．ここに$\mathbf{L}_{m1}$は$(n_m\times m_1)$の定数マトリクスである．このマトリクスは(2-73)式において$c_p\cdot\gamma$を1において計算することにより得られる．さらに伝達率αがm_α種類あるとすれば，$m_2=m_1+m_\alpha$のベクトル$\boldsymbol{\lambda}_{m2}={}^t(\lambda_1, \lambda_2,\cdots\cdots, \lambda_{m1}, \alpha_1, \alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{m\alpha})$によって

$$\mathbf{c}_m=\mathbf{L}_{m2}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{m2} \tag{6-9}$$

と表される．ここに$\mathbf{L}_{m2}$は$((n_c-n)\times m_2)$の定数マトリクスである．$\mathbf{r}$についても同様に$\boldsymbol{\lambda}_{m3}={}^t(a_1, a_2,\cdots\cdots,a_{m3})$とすれば

$$\mathbf{r}=\mathbf{L}_{m3}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{m3} \tag{6-10}$$

と表される．$\mathbf{L}_{m3}$は$(n_r\times m_3)$次の定数マトリクスである．

さて，以下には縮小マトリクスとして(6-7)式の質量保存則によるものだけをとり上げて論をすすめる．例え，パラメータの対称性や，(6-8)式から(6-10)式による縮小を行うにしても，それは単に$\mathbf{D}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{G}$のマトリクスの右方から，これらの縮小マトリクス$\mathbf{L}$を乗じるだけですむからである．(6-4)式は次のようになる．

$$\mathbf{y}=\mathbf{D}(\dot{x}_i)\cdot\mathbf{m}+\mathbf{X}(x_i)\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{c}_m+\mathbf{G}(g_i)\cdot\mathbf{r} \tag{6-11}$$

さらに簡潔のためシステムパラメータをひとまとめにして(6-12)式で表し，従って$\mathbf{D}$, $\mathbf{X}\cdot\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$もひとまとめにして(6-13)式で表す．

$${}^t\mathbf{a}=({}^t\mathbf{m},{}^t\mathbf{c}_m,{}^t\mathbf{r}) \tag{6-12}$$

$$\mathbf{Z}=(\mathbf{D},\mathbf{X}\cdot\mathbf{L},\mathbf{G}) \tag{6-13}$$

ただし$\mathbf{a}$のサイズは$n_a=n_m+n_c-n+n_r$である．こうして(6-11)式は結局次式となる．

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{Z}(t)\cdot\mathbf{a} \tag{6-14}$$

これを$\mathbf{a}$に関する観測方程式と呼ぶことにする．また$Z(t)$は観測マトリクス$(n\times n_a)$, $\mathbf{a}$はシステムパラメータベクトルと呼ぶことにする．

6.1.2 一括同定

同定のための評価関数は観測方程式(6-14)の方程式誤差$\mathbf{e}(t)$の時間積分値を用いる．まず$\mathbf{e}(t)$は，

$$\mathbf{e}(t)=\mathbf{y}(t)-\mathbf{Z}(t)\cdot\mathbf{a} \tag{6-15}$$

と表され，その時間積分値としてスカラー量にするのが最も妥当であるから，評価関数$J_s(\mathbf{a})$は二次形式の積分量として次式のように定める．

$$J_s(\mathbf{a})=\int_0^T {}^t\mathbf{e}(t)\cdot\mathbf{W}(t)\cdot\mathbf{e}(t)dt \tag{6-16}$$

ここに$\mathbf{W}(t)$は重みマトリクス$(n\times n)$と呼ぶことにする．これは精度の良い同定を行うために用いるもので，決め方は次の6.1.3で述べる．すなわち，不偏性，一致性や有効性などの良い性質を持つところの，いわゆるマルコフ推定とするために必要なものである．従って$\mathbf{W}$にただの単位マトリクスを用いたときには，同定結果は単なる最適値であるとしか言えないことになる．またTは同定に要する時間である．

観測されるデータは原則的には不規則なアナログ値が多い．従って(6-16)式の被積分関数の内部の積および積分は厳密にはアナログ計算機でなければ実行できない．しかし，我々が汎用的に使えるのは数値計算機であるので，まず(6-16)式を次の(6-17)式のように，積分区間をp分割し，次に(6-18)式に近似化する．

$$J_s(\mathbf{a})=\sum_{k=1}^{p}\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} {}^t\mathbf{e}(t)\cdot\mathbf{W}(t)\cdot\mathbf{e}(t)dt \tag{6-17}$$

$$J_s(\mathbf{a})\simeq\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\Delta t^2}\cdot\left(\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} {}^t\mathbf{e}(t)dt\right)\cdot\left(\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}\mathbf{W}(t)dt\right)\cdot\left(\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}\mathbf{e}(t)dt\right) \tag{6-18}$$

この近似はΔtが十分小さく，かつΔt内での観測値の変化が緩やかであれば十分な精度を持つと考えられる．この(6-18)式による評価関数を作るため，$\mathbf{Z}(t)$内の状態値と入力値の$((k-1)\cdot\Delta t, k\cdot\Delta t)$区間での積分量を，次の(6-19)式から(6-21)式のように定義する．

$${}_b x_{ik}=\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x_i dt=x_i(k\Delta t)-x_i((k-1)\Delta t) \tag{6-19}$$

$${}_s x_{ik}=\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x_i dt\simeq\frac{\Delta t}{2}\cdot(x_i(k\Delta t)+x_i((k-1)\Delta t)) \tag{6-20}$$

$$ {}_s g_{ik} = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} g_i \, dt \approx \frac{\Delta t}{2} \cdot (g_i(k\Delta t) + g_i((k-1)\Delta t)) \tag{6-21} $$

(6-20), (6-21)式の積分は，このような台形近似ではなく，適当な面積計によって厳密に行っても良い.

これらにより，$((k-1)\cdot\Delta t,\ k\cdot\Delta t)$区間での$\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{y}(t)$の積分である$\mathbf{Z}_k$と$\mathbf{y}_k$は次式のように表示することができる.

$$ \mathbf{Z}_k = [\mathbf{D}({}_b x_{ik}), \mathbf{X}({}_s x_{ik}) \cdot \mathbf{L}, \mathbf{G}({}_s g_{ik})] = [\mathbf{D}_k, \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{L}, \mathbf{G}_k] \tag{6-22} $$

$$ \mathbf{y}_k = \mathbf{y}({}_b x_{ik}, {}_s x_{ik}, {}_s g_{ik}) \tag{6-23} $$

そこで，(6-15)式に対応して次の(6-24)式，(6-17)に対応して(6-25)式の近似評価関数$J(\mathbf{a})$が得られる.

$$ \mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \tag{6-24} $$

$$ J(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\Delta t^2} \cdot {}^t\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{e}_k \tag{6-25} $$

$J(\mathbf{a})$を最小にする$\mathbf{a}$を求めることを最小二乗法と呼ぶ．これはJを$\mathbf{a}$によって微分し，0におくことにより行われる.

$$ \begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\Delta t^2} \cdot {}^t\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\Delta t^2}\, {}^t(\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{W}_k \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\Delta t^2} \cdot (-2 \cdot {}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{y}_k + 2 \cdot {}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{o} \end{aligned} \tag{6-26} $$

これにより$\mathbf{a}$の推定値$\mathbf{a}$は次のように求められる.

$$ \mathbf{a} = \left(\sum_{k=1}^{p} {}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} {}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{y}_k \right) \tag{6-27} $$

もし，アナログ計算機が利用できるならば，次式の連続的最小二乗法が，適用できよう.

$$ \mathbf{a} = \left(\int_o^T {}^t\mathbf{Z}(t) \cdot \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{Z}(t) dt \right)^{-1} \cdot \left(\int_o^T {}^t\mathbf{Z}(t) \cdot \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{y}(t) dt \right) \tag{6-28} $$

(6-27)式が一括同定を行う計算式である．そして，これはまた，逐次同定式を導くための基礎式となる．

6.1.3 重みマトリクスW

Wはマルコフ推定にするために用いるものである．この推定は観測誤差に対して効力を発揮しようとするものである．いま，xi, giの観測値が瞬時観測誤差分散σ_{xi}^2, σ_{gi}^2を持つものとする．すると(6-19), (6-20), (6-21)式における積分量の持つ誤差分散${}_b\sigma_{xi}^2$, ${}_s\sigma_{xi}^2$, ${}_s\sigma_{gi}^2$は誤差伝播則により次のように計算される．

$$ {}_b\sigma_{xi}^{\;2} \simeq 2 \cdot \sigma_{xi}^{\;2} \tag{6-29} $$

$$ {}_s\sigma_{xi}^{\;2} \simeq \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot \sigma_{xi}^{\;2} \tag{6-30} $$

$$ {}_s\sigma_{gi}^{\;2} \simeq \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot \sigma_{gi}^{\;2} \tag{6-31} $$

そこで，実際に同定に用いる観測データのベクトルと，それが持つ誤差分散ベクトルを次のように，それぞれ定義する．

$$ {}_b\mathbf{x}_k = {}^t({}_bx_{1k}, \cdots\cdots, {}_bx_{nk}) \qquad \text{サイズ}\,n \tag{6-32} $$

$$ {}_b\boldsymbol{\sigma}_x = {}^t({}_b\sigma_{x1}, \cdots\cdots, {}_b\sigma_{xn}) \qquad \text{サイズ}\,n \tag{6-33} $$

$$ {}_s\mathbf{x}_k = {}^t({}_sx_{1k}, \cdots\cdots, {}_sx_{n+n_o, k}) \qquad \text{サイズ}\,n+n_o \tag{6-34} $$

$$ {}_s\boldsymbol{\sigma}_x = {}^t({}_s\sigma_{x1}, \cdots\cdots, {}_s\sigma_{x, n+n_o}) \qquad \text{サイズ}\,n+n_o \tag{6-35} $$

$$ {}_s\mathbf{g}_k = {}^t({}_sg_{1k}, \cdots\cdots, {}_sg_{ng, k}) \qquad \text{サイズ}\,ng \tag{6-36} $$

$$ {}_s\boldsymbol{\sigma}_g = {}^t({}_s\sigma_{g1}, \cdots\cdots, {}_s\sigma_{g, ng}) \qquad \text{サイズ}\,ng \tag{6-37} $$

${}_b\mathbf{x}_k$, ${}_s\mathbf{x}_k$, ${}_s\mathbf{g}_k$はそれぞれ，真値のベクトルに誤差ベクトル${}_b\mathbf{s}_{xk}$, ${}_s\mathbf{s}_{xk}$, ${}_s\mathbf{s}_{gk}$が加わったものと見なす．真値のベクトルは状態方程式の誤差を0とすることに注意すれば，観測誤差に起因するその方程式誤差ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}_k$は次式で表される．

$$ \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_k &= -\mathbf{M} \cdot {}_b\mathbf{x}_k + [\mathbf{C}, \mathbf{C}_o] \cdot {}_s\mathbf{x}_k + \mathbf{R} \cdot {}_s\mathbf{g}_k \\ &= -\mathbf{M} \cdot {}_b\mathbf{s}_{xk} + [\mathbf{C}, \mathbf{C}_o] \cdot {}_s\mathbf{s}_{xk} + \mathbf{R} \cdot {}_s\mathbf{s}_{gk} \end{aligned} \tag{6-38} $$

観測誤差による方程式誤差の分散共分散マトリクスを$\Lambda o(n \times n)$とおけばこれは$\boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot {}^t\boldsymbol{\varepsilon} k$の期待値マトリクスである．

$$\Lambda_o = E(\boldsymbol{\varepsilon}_k \cdot {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_k)$$

$$= \mathbf{M} \cdot E({}_b\mathbf{s}_{xk} \cdot {}^t_b\mathbf{s}_{xk}) \cdot {}^t\mathbf{M} + [\,\mathbf{C}, \mathbf{C}_o\,] \cdot E({}_s\mathbf{s}_{xk} \cdot {}^t_s\mathbf{s}_{xk}) \cdot {}^t[\,\mathbf{C}, \mathbf{C}_o\,]$$

$$+ \mathbf{R} \cdot E({}_s\mathbf{s}_{gk} \cdot {}^t_s\mathbf{s}_{gk}) \cdot {}^t\mathbf{R}$$

$$= \mathbf{M} \cdot diag({}_b\boldsymbol{\sigma}_x \cdot {}^t_b\boldsymbol{\sigma}_x) \cdot {}^t\mathbf{M} + [\,\mathbf{C}, \mathbf{C}_o\,] \cdot diag({}_s\boldsymbol{\sigma}_x \cdot {}^t_s\boldsymbol{\sigma}_x) \cdot {}^t[\,\mathbf{C}, \mathbf{C}_o\,]$$

$$+ \mathbf{R} \cdot diag({}_s\boldsymbol{\sigma}_g \cdot {}^t_s\boldsymbol{\sigma}_g) \cdot {}^t\mathbf{R} \tag{6-39}$$

ここで，${}_b\mathbf{s}_{xk}$, ${}_s\mathbf{s}_{xk}$, ${}_s\mathbf{s}_{gk}$間の共分散は0であることと，それらベクトル内の要素間の共分散も0であることを用いた．また$diag$はその(　)の中のマトリクスの対角要素だけによって構成されるマトリクスを表す．

こうして観測誤差から方程式誤差への伝播則が(6-39)式によって定式化された．そこでマルコフ推定の考え方により，重みマトリクスは次式で計算される．

$$\mathbf{W}_k = \Lambda_o^{-1} \tag{6-40}$$

さらに実際的な問題として，観測期間中にたまに発生しうる信頼性のおけない観測値によって，同定結果が誤った方向に引張られてしまわないように，健固性(robustness)を持たせることを考える．その方法の1つに単一の回帰式について定式化されたTukeyのBiweight推定法[87]がある．これを多次元に拡張し，次式の修正重みマトリクスを定める．このW^{adj}は(6-42)式で計算される残差$\mathbf{v}$によって左右される．

$$\mathbf{W}_k^{adj} = {}^t\!\left(\mathbf{E}_n - \frac{1}{c^2} \cdot \Lambda_o^{-\frac{1}{2}} \cdot diag(\mathbf{v}_k \cdot {}^t\mathbf{v}_k) \cdot {}^t\Lambda_o^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \Lambda_o^{-1}$$

$$\cdot \left(\mathbf{E}_n - \frac{1}{c^2} \cdot \Lambda_o^{-\frac{1}{2}} \cdot diag(\mathbf{v}_k \cdot {}^t\mathbf{v}_k) \cdot {}^t\Lambda_o^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{6-41}$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \tag{6-42}$$

ここに$\mathbf{E}_n$は$(n \times n)$の単位マトリクスを表す．またcは，しきい値と呼ばれるもので5~9に設定する．$diag\,(\mathbf{v}_k \cdot {}^t\mathbf{v}_k)$の対角要素の1つでも，$\Lambda o$のそれの$c$倍以上になったときには$\mathbf{W}_k^{adj}$は0マトリクスとする．さらに，$\Lambda o$の右肩の1/2とは，スカラーにおける二乗根の意味に類似しており，マトリクスではこれをコレスキー分解と呼ぶ．正の定符号を持つマトリクスはコレスキー分解が可能であり，その性質は(6-39)式により明らかである．．

ところで，(6-39)式の誤差伝播構造は，$\mathbf{a}$に左右されるものであるから一括同定の場合には収束計算をすることになる．重みマトリクスを単位マトリクスに置いたときには，その評価規範での最適解となる．収束計算の最初はこの最適解を用いて誤差伝播構造を組み立てる．しかし，多くの実際的な適用場面では，方程式残差の原因が，観測誤差であるよりも，状態方程式の次数の過不足や，その構造の不適切さである方が多いであろうと予想される．このような場合には，せっかくの重みマトリクスが，かえって悪影響を及ぼす結果となることも十分に考えられる．そのときには，収束計算などを行わない，$\mathbf{W}$を$\mathbf{E}$に置いた，最適解でもよいであろう．

また次に述べる逐次同定においては，このプロセス途上では$\mathbf{a}$が不確かなものであるから，常に$\mathbf{W}_k$を単位マトリクスに置く．

6.1.4 逐次同定

ここでは，システムパラメータ$\mathbf{a}$の離散時間システムを導く．(6-27)式において，pタイムステップまでの同定式が得られている．いま，pをkに置換え，次式を得る．

$$\mathbf{a}_k=\left(\sum_{j=1}^{k}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{y}_j\right) \tag{6-43}$$

まず次のように記号定義をする．

$$\mathbf{A}_k=\left(\sum_{j=1}^{k}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)^{-1} \tag{6-44}$$

$$\mathbf{u}_k=\sum_{j=1}^{k}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{y}_j \tag{6-45}$$

従って，次のように$\mathbf{A}_k{}^{-1}$と$\mathbf{A}_k$，$\mathbf{u}_{k-1}$と$\mathbf{u}_k$の関係式を記述できる．

$$\mathbf{A}_k^{-1}=\mathbf{A}_{k-1}^{-1}+{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{W}_k\cdot\mathbf{Z}_k \tag{6-46}$$

$$\mathbf{u}_k=\mathbf{u}_{k-1}+{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{W}_k\cdot\mathbf{y}_k \tag{6-47}$$

(6-46)式にWoodburyの逆行列公式[88]を適用し，次式を得る．

$$\mathbf{A}_k=\mathbf{A}_{k-1}-\mathbf{A}_{k-1}\cdot{}^t\mathbf{Z}_k\cdot(\mathbf{W}_k^{-1}+\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{A}_{k-1}\cdot{}^t\mathbf{Z}_k)^{-1}\cdot\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{A}_{k-1} \tag{6-48}$$

そこで(6-44)式から(6-48)式を用いて，(6-43)式を変形する．

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_k&=\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{u}_k=(\mathbf{A}_{k-1}-\mathbf{A}_{k-1}\cdot{}^t\mathbf{Z}_k\cdot(\mathbf{W}_k^{-1}+\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{A}_{k-1}\cdot{}^t\mathbf{Z}_k)^{-1}\cdot\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{A}_{k-1})\\&\qquad\cdot(\mathbf{u}_{k-1}+{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{W}_k\cdot\mathbf{y}_k)\\&=(\mathbf{E}_a-\mathbf{A}_{k-1}\cdot{}^t\mathbf{Z}_k\cdot(\mathbf{W}_k^{-1}+\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{A}_{k-1}\cdot{}^t\mathbf{Z}_k)^{-1}\cdot\mathbf{Z}_k)\cdot\mathbf{a}_{k-1}+\mathbf{A}_k\cdot{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{W}_k\cdot\mathbf{y}_k\end{aligned} \tag{6-49}$$

ここでさらに次のように記号定義する．

$$\mathbf{\Phi}_k=\mathbf{E}_a-\mathbf{A}_{k-1}\cdot{}^t\mathbf{Z}_k\cdot(\mathbf{W}_k^{-1}+\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{A}_{k-1}\cdot{}^t\mathbf{Z}_k)^{-1}\cdot\mathbf{Z}_k \tag{6-50}$$

$$\mathbf{B}_k=\mathbf{A}_k\cdot{}^t\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{W}_k \tag{6-51}$$

すると(6-49)式は次のような漸化式となる．

$$\mathbf{a}_k=\mathbf{\Phi}_k\cdot\mathbf{a}_{k-1}+\mathbf{B}_k\cdot\mathbf{y}_k \tag{6-52}$$

こうして(6-50)式，(6-51)式と(6-52)式による，$\mathbf{a}$に関する離散時間システムを得た．ただし$\mathbf{E}_a$は$(n_a\times n_a)$の単位マトリクスを表す．前述したように$\mathbf{W}_k$は常に$(n\times n)$の単位マトリクスである．また初期の$\mathbf{A}_0$は$\mathbf{E}_a$にとる．このシステムは時変系(Time Varying System)である．次に，この離散システムによる可同定性の考察を行う．すなわち，同定に必要な観測値の変化の程度と観測期間，さらにどのように既知システムパラメータを与えれば，同定が可能かどうかは，この離散時間システムを考えればわかる．$\mathbf{a}_k$を$\mathbf{a}_0$から表すため，kについて順次計算すれば，次のようである．

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{\Phi}_1\cdot\mathbf{a}_0+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{a}_2=\mathbf{\Phi}_2\cdot\mathbf{a}_1+\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{y}_2=\mathbf{\Phi}_2\cdot\mathbf{\Phi}_1\cdot\mathbf{a}_0+\mathbf{\Phi}_2\cdot\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{y}_1+\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{y}_2$$

$$\mathbf{a}_3=\mathbf{\Phi}_3\cdot\mathbf{a}_2+\mathbf{B}_3\cdot\mathbf{y}_3=\mathbf{\Phi}_3\cdot\mathbf{\Phi}_2\cdot\mathbf{\Phi}_1\cdot\mathbf{a}_0+\mathbf{\Phi}_3\cdot\mathbf{\Phi}_2\cdot\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{y}_1+\mathbf{\Phi}_3\cdot\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{y}_2+\mathbf{B}_3\cdot\mathbf{y}_3$$

$$\vdots$$

従って一般的に$\mathbf{a}_k$を$\mathbf{a}_o$で表す次式が記述できる．

$$\mathbf{a}_k=\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{\Phi}_i\right)\cdot\mathbf{a}_0+\sum_{j=1}^{k}\left(\prod_{\substack{i=j+1\\ i\leq k}}^{k}\mathbf{\Phi}_i\right)\cdot\mathbf{B}_i\cdot\mathbf{y}_j \tag{6-53}$$

ただし，積記号Πはiの小さいものを右にしてマトリクスの積をとる．ところで推移マトリクスΦ_jは(6-50)式で表されるから，(6-48)式と見比べることにより，次式のようにも表される．

$$\mathbf{\Phi}_j=\mathbf{A}_j\cdot\mathbf{A}_{j-1}^{-1} \tag{6-54}$$

従って(6-53)式の右辺第1項のマトリクスは次のようになる．

$$\prod_{i=1}^{k}\mathbf{\Phi}_i=(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{A}_{k-1}^{-1})\cdot(\mathbf{A}_{k-1}\cdot\mathbf{A}_{k-2}^{-1})\cdots\cdots(\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_1^{-1})\cdot(\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_0^{-1})=\mathbf{A}_k \tag{6-55}$$

ここで$\mathbf{A}_0$は単位マトリクスであることを用いた．次に(6-53)式の右辺第2項を形成する和のうちj項について次式が成り立つ．

$$\left(\prod_{\substack{i=j+1\\ i\le k}}^{k}\Phi_i\right)\cdot\mathbf{B}_j\cdot\mathbf{y}_j=(\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{A}_{k-1}^{-1})\cdot(\mathbf{A}_{k-1}\cdot\mathbf{A}_{k-2}^{-1})$$

$$\cdots\cdots(\mathbf{A}_{j+1}\cdot\mathbf{A}_j^{-1})\cdot(\mathbf{A}_j\cdot{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{y}_j)$$

$$=\mathbf{A}_k\cdot{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{y}_j \tag{6-56}$$

従って(6-53)式，あるいは(6-52)式は次のように記述される．

$$\mathbf{a}_k=\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{a}_0+\mathbf{A}_k\cdot\sum_{j=1}^{k}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{y}_j \tag{6-57}$$

いまもし$\mathbf{a}$の真値を$\mathbf{a}_s$で表せば，このとき方程式誤差ベクトルは0であり，$\mathbf{y}_j=\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{a}_s$となるから，(6-57)式は次のように変形できる．

$$\mathbf{a}_k=\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{a}_0+\mathbf{A}_k\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)\cdot\mathbf{a}_s=\mathbf{A}_k\cdot\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_s \tag{6-58}$$

ここで(6-44)式を用いた．(6-58)式の，右辺の$\mathbf{a}_s$を左辺に移行し，両辺のノルムをとると次の不等式が成立する．

$$\|\mathbf{a}_k-\mathbf{a}_s\|\leqq\|\mathbf{A}_k\|\cdot\|\mathbf{a}_0\| \tag{6-59}$$

可同定性とは$k\to\infty$のとき，(6-59)の不等式の右辺が0に近づくことと定められる．まずその必要条件は逆行列$\mathbf{A}_k$が存在するために次式が成立することである．

$$rank(\mathbf{A}_k^{-1})=rank\left(\sum_{j=1}^{k}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)=na\qquad\text{フルランク} \tag{6-60}$$

逆に，このとき$\mathbf{A}_k$によって一意的に$\mathbf{a}_k$が決定される．さらに$k\to\infty$のとき$\mathbf{a}_k\to\mathbf{a}_s$となることも付録7の証明過程を経て示される．以上により結局，可同定性の必要十分条件は(6-60)式である．さらに$\mathbf{a}$に関する離散時間システムは，その推移マトリクスについて(6-55)式が成立するから，以上の証明過程により，(6-60)の条件式が成立するときには，そのシステムが漸近安定であることも示された．

次に，どのように既知パラメータを与えれば，十分な観測値が得られるかぎり，(6-60)の可同定の条件式が成立するかについては，その十分条件をあげておくにとどめる．(6-52)式において入力$\mathbf{y}_k$の影響が$\mathbf{a}_k$の全ての要素に及ぶための十分条件は$\mathbf{y}_k$の要素が互いに独立であることである．このことは，それぞれの節点に関して少なくとも1個ずつのシステムパラメータを，合計n個与えればよいことを意味する．

6.1.5 同定結果の評価

ここでは，システムパラメータの同定誤差評価と，同定された状態方程式の適合度の評価方法について論じる．

システムパラメータの同定誤差は，方程式誤差からの伝播としてとらえ，この伝播則を定式化する．**a**は(6-27)式で与えられている．また誤差ベクトル$\mathbf{e}_j$は(6-24)式で定められるが，その期待値は，マルコフ推定の不偏性(unbiasedness)により，$E(\mathbf{e}_j)=0$とみなせる．従って，次式が成立する．

$$\hat{\mathbf{a}}-E(\hat{\mathbf{a}})=\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{y}_j\right)$$

$$-E\left[\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot(\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{a}+\mathbf{e}_j)\right)\right]$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{e}_j\right) \tag{6-61}$$

そこで**a**の誤差の分散共分散マトリクスを$\mathbf{\Lambda}_a(n_a\times n_a)$とすると，これは次式のようになる．

$$\mathbf{\Lambda}_a=E\left[(\hat{\mathbf{a}}-E(\hat{\mathbf{a}}))\cdot{}^t(\hat{\mathbf{a}}-E(\hat{\mathbf{a}}))\right]$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot E(\mathbf{e}_j\cdot{}^t\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)^{-1}. \tag{6-62}$$

ここで，$i\neq j$のとき$E(\mathbf{e}_i\cdot{}^t\mathbf{e}_j)=[0]$を用いた．次に$E(\mathbf{e}_j\cdot{}^t\mathbf{e}_j)$をどうとるかについて考える．

一般に，方程式誤差の原因は二つ考えられる．一つは観測誤差であり，もう一つは実現象を近似した状態方程式そのものの不適合である．もし，観測誤差だけを考えれば，$E(\mathbf{e}_j\cdot{}^t\mathbf{e}_j)$は(6-39)式の$\mathbf{\Lambda}$oであり，このとき，$\mathbf{W}_j$を(6-40)式の$\mathbf{\Lambda}^{-1}{}_0$にとっていれば，$\mathbf{\Lambda}_a$は(6-44)式の$\mathbf{A}_k$そのものになることが明らかである．また方程式の不適合とは，状態方程式の次数や構造の不適切な設定により，状態の計算値が観測値を許容誤差内でトレースできないことである．従って，この影響は結果として(6-42)式で計算される方程式残差$\mathbf{v}_j$に表われる．そこでもし，この不適合も同定パラメータの推定誤差に帰着させるとすれば，それは方程式残差から同定パラメータへの誤差伝播構造によって評価される．これは(6-62)式において$E(\mathbf{e}_j\cdot{}^t\mathbf{e}_j)$を$\mathbf{v}_j\cdot{}^t\mathbf{v}_j$の期待値においたものである．この期待値の不偏推定をするためには総和数pからパラメータ数n_aをひいたものを自由度にとることに注意して次式が定義できる．これを(6-62)式へ代入すればよい．

$$E(\mathbf{e}_j\cdot{}^t\mathbf{e}_j)\approx\frac{1}{p-na}\sum_{j=1}^{p}\mathbf{v}_j\cdot{}^t\mathbf{v}_j \tag{6-63}$$

Λ_aの対角要素にはシステムパラメータの誤差分散が，非対角要素には共分散が位置する．

次に，同定された状態方程式の適合度評価方法について考える．システムパラメータが同定されれば，それによって状態方程式が構成される．この状態方程式によって現象をどの程度説明できるかの評価指標を作っておく．

評価の手がかりとして観測方程式の残差二乗和をとる．それを$s(\mathbf{a})$とおけば，(6-42)式および(6-27)式により，

$$s(\hat{\mathbf{a}})=\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{v}_j$$

$$=\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{y}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{y}_j-\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{y}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{Z}_j\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}{}^t\mathbf{Z}_j\cdot\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{y}_j\right) \tag{6-64}$$

となる．何に対して$s(\mathbf{a})$の比率をとるかによって，この指標は二つ作れる．まず一つは観測誤差だけに対するものである．この残差二乗和をs_0とおけば，(6-39)式を導くときと同様に考えて次式を得る．

$$s_o={}_b{}^t\boldsymbol{\sigma}_x\cdot{}^t\mathbf{M}\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}\mathbf{W}_j\right)\cdot\mathbf{M}\cdot{}_b\boldsymbol{\sigma}_x$$

$$+{}_s{}^t\boldsymbol{\sigma}_x\cdot{}^t[\mathbf{C},\mathbf{C}_o]\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}\mathbf{W}_j\right)\cdot[\mathbf{C},\mathbf{C}_o]\cdot{}_s\boldsymbol{\sigma}_x$$

$$+{}_s{}^t\boldsymbol{\sigma}_g\cdot{}^t\mathbf{R}\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}\mathbf{W}_j\right)\cdot\mathbf{R}\cdot{}_s\boldsymbol{\sigma}_g \tag{6-65}$$

したがって，

$$f_o=\frac{s(\hat{\mathbf{a}})}{s_o} \tag{6-66}$$

を観測誤差に対する残差二乗和比率と呼ぶことにする．もう一つは観測ベクトルの総変動に対するものである．これはいわゆる決定係数(C.O.D)[89]と同様な考え方による．総変動s_yは，まず$\mathbf{y}$の重み付き平均を$\bar{\mathbf{y}}$として

$$\bar{\mathbf{y}}=\left(\sum_{j=1}^{p}\mathbf{W}_j\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{y}_j\right) \tag{6-67}$$

で表すときに次式で計算される．

$$s_y=\sum_{j=1}^{p}{}^t(\mathbf{y}_j-\bar{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{W}_j\cdot(\mathbf{y}_j-\bar{\mathbf{y}})$$

$$= \sum_{j=1}^{p} {}^t\mathbf{y}_j \cdot \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{y}_j - {}^t\overline{\mathbf{y}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{p} \mathbf{W}_j \right) \cdot \overline{\mathbf{y}}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} {}^t\mathbf{y}_j \cdot \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{y}_j - {}^t\left(\sum_{j=1}^{p} \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{y}_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{p} \mathbf{W}_j \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{p} \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{y}_j \right) \tag{6-68}$$

従って決定係数f_vは次式で計算される．ただし$\mathbf{y}$に恒等的に0の要素を持つ場合はこれを定義しない．

$$f_v = 1 - \frac{s(\hat{\mathbf{a}})}{s_y} \tag{6-69}$$

観測誤差分散からみて残差が妥当であるかどうか検定するにはf_0にもとずいてカイ二乗検定が，また残差だけからみて，得られた状態方程式が有意かどうかについてはf_vにもとずいてF検定ができる．ただしf_0については，s_0が同定パラメータに左右されていることと，方程式誤差の原因が観測誤差だけということは現実問題ではほとんどありえないことから，f_vを評価指標する方が良いと思われる．

6.1.6 同定の計算手順

この同定理論は，ほとんどの場合，測定データをもとにして行われる．また，逐次同定はリアルタイムで実行することにより利用価値が高まる．従って，こうした演算処理は，測定現場でパーソナルコンピューターを用いて行う方が，大型コンピュータを利用するよりも，時間的，経済的に有利である．ここでは，このような演算処理装置を使うことを前提にして，実際の同定の計算手順について述べる．

まず一括同定について述べる．この場合は，測定値を何らかの記憶媒体に，時系列データとして記録しておいたものに対して，演算処理を行うことになる．測定値は多くの場合，離散時間的に得られる．従ってその時系列データとは，kを時刻添字として，$k=1,2,\cdots,p$についての，$\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}_{ok}$, $\mathbf{g}_k$を意味する．十分な観測期間を経たあと，一括同定は次のように行われる．まず$\mathbf{a}_0$を0におく．

① もし1回目の同定であれば，重みマトリクス$\mathbf{W}_k$を単位マトリクス$\mathbf{E}_n$におき，2回目以降の同定であれば，前回で得られている同定結果$\mathbf{a}_0$を用いて，(6-39)式と(6-40)式によりΛoと$\mathbf{W}_k$を決めて，(6-27)式から今回の推定値$\mathbf{a}_1$を計算する．

② $\| \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 \| < \varepsilon$ (εは許容誤差)であれば同定完了とする．そうでなければ$\mathbf{a}_0 \leftarrow \mathbf{a}_1$とおき①へもどる．

以上は，マルコフ推定とするためのアルゴリズムである．この場合は収束計算の各回で，全てのデータに対する重みマトリクスは同じである．またロバスト性を実現するために拡張されたBiweight法を適用するときには，方程式残差$\mathbf{v}_k$によって，個々のデータ毎に重みマトリクスが異なってくることになる．ただし，6.1.2の最後に述べたように，測定誤差の性質がよくわからなかったり，状態方程式そのものに不適切さがあると考えられるときには，重みマトリクスは単位マトリクスとして得られる単なる最適解でも十分であろう．

次に逐次同定について述べる．これは，ある時間間隔Δtで観測値を得るごとに，同定を繰り返し続けていくものである．この場合は，(6-52)式の$\mathbf{a}_k$に関する離散時間システムを用いる．ただし重みマトリクス$\mathbf{W}_k$は常に単位マトリクス$\mathbf{E}_n$におく．また初期の$\mathbf{A}_0$は単位マトリクス$\mathbf{E}_a$か，あるいはこれに適当な係数を乗じたものにおく．初期値$\mathbf{a}_0$を与え，$k=1$から次の計算手順を繰り返す．

① kタイムステップの観測値を得て，(6-48)式から$\mathbf{A}_k$を計算する．

② (6-50)，(6-51)式により$\mathbf{\Phi}_k$，$\mathbf{B}_k$を計算する．

③ (6-52)式により$\mathbf{a}_{k-1}$から$\mathbf{a}_k$を計算する．

④ kを1増やし，①へもどる．

この実行のためには，過去の全ての観測データは必要としない．前回のタイムステップでの情報だけを記憶していればよい．測定過程と同時的に逐次同定を行っていく場合には，コンピューターの演算処理性能がボトルネックになってくる．特に，この同定理論は，逆行列計算などのマトリクス演算を高速で行うことを必要とする．とにかく，このようなリアルタイムの逐次同定を行えば，同時にシステムの状態方程式も逐次構成され，最適制御のための数学モデルが得られることになる．

6.2 多数室換気測定システム

従来の換気測定は，JISのA1406に規定されている方法に則って行われている．これはトレーサーガスを注入してガス濃度の変化を測定するのを単室に限定したり，屋内全体を単室と見なして行う方法である．これらの前提や仮定が実現象に矛盾しなければ問題ないが，一般に多数室においては室間に交換換気があったり，各室が同じ濃度で変化しないのが通常の場合でありしばしば誤った結果を持たらすことは教科書的な事実となっている．[60] このようなことから序論で述べたように，国内外の多くの研究者によって多数室扱いの測定法が研究されている．しかしそれらは最も重要な測定データーの解析理論において不十分であると考えられる．本研究ではシステムパラメータの同定という新しい観点からの理論により，実際の測定システムを作製し，実験を行った．

6.2.1 測定システム

本システムは，それぞれの室になるべく異なったトレーサーガス濃度の時間的変化をつくり出す入力制御装置と，そのガス注入流量や各室のガス濃度を連続的に測る測定装置，及び測定データをリアルタイムで解析する装置から成っている．図6-1にこのシステムの構成を示す．マスフローコントローラーとはトレーサーガスの注入流量を制御し同時にそれを測定する装置である．マイクロコンピューターをCPU-1, CPU-2, CPU-3と3台用いているが，それぞれ次のような働きをする．まずCPU-1は，

(a) トレーサーガスを注入する室番号をスケジュールまたは乱数選択によって決めて電磁弁を開閉する，

(b) トレーサーガスの注入流量をスケジュールまたは乱数選択によって決めてマスフローコントローラーを制御する，

(c) ガスサンプリングする室番号をスケジュールによって決めて電磁弁を開閉する，
(d) ガス濃度とその室番号，注入流量とその室番号のデータを採ってCPU-2へ送る，
等を行う．1つの室について分析計で濃度の測定値を得るには，その応答遅れや，チューブ内の前回のガスを抜き去るために要する時間などから約1分かかる．

従ってCPU-2は，
(e) 全室の同時的な濃度データとするために時間的前後の補間計算をする，
(f) これらの濃度と注入流量などのデータを逐次，フロッピーディスクに記録するとともにCPU-3へ送る，等を行う．

そしてCPU-3は，
(g) 逐次に送られてくる観測データに対し，リアルタイムで逐次同定を実行し，解析結果はフロッピーディスクに記録するとともに，適当な時間間隔でプリンターにも出力する，
等を行う．なお，ガス濃度のサンプリングは外気についても室と同様に行う．またトレーサーガスの注入も同様である．

ところで測定する建物は様々な間取りと室数を持つ．実用的な測定システムとなるためには，このような測定対象の多様性に対して容易に対応出来るものでなければならない．これは，本回路網の概念とその定式化法によって実現される．

6.2.2 実施例

2階建の木造住宅において実験を行った．図6-8はその平面図を示す．同定モデル上定義した室番号は○で囲んで示す．特に⑧は2階へ通じる階段室であり，⑩は外気を表わす．測定装置は台所に設置し，接する室①との扉は密閉した．この台所は図から省いている．

測定中は外気に面する窓，戸はもちろん，室間の襖も全て通常の閉めた状態とした．
また押入の戸は取り去った．サンプリングガスは各室内で6ヶ所から均等に吸入し分岐管で混合したものを測定した．トレーサーガス注入のチューブ先端では10×10cm程度のファンで攪はんした．このようにして各室内で，濃度の一様性の仮定が成立するようにした．ガスの注入はスケジュールで行った．トレーサーガスとして用いたのは二酸化炭素ガスであるが，その濃度の分析計には計測範囲がある．この範囲を越えないような注入スケジュールは，一般に経験的に得られている換気回数をラフガイダンスにして定めた．

同定上の既知パラメータとしたのは各室の容積(m_{ij})と注入ガスの濃度(自由入力係数r_{ij})である．従ってg_jは注入流量を意味する．(d)でのデータ採集は1分の間隔で行い，(g)での同定もこれを1タイムステップとして行った．

測定結果について，例えば室③と⑧についてトレーサーガスの注入流量の時間変化はそれぞれ図6-2, 6-3である．またこれらの室のガス濃度変化は図6-4, 6-5である．外気も含め総室数は10室となるので，ガス濃度は10分おきの測定値をもとに，この間は補間することになる．従ってその直線的変化を見ると，その補間部分は実際の変化に十分に合っていないことが推測される．

同定結果について例えば，図6-6と図6-7はそれぞれ室⑥から外気へと，外気から室⑥への風量の逐次同定の結果である．はじめの1時間ほどはグラフの範囲からはずれたりしているが，しだいに収まってくる．言い換えれば，最低この程度の時間で可同定となる．ただし，より室数が少

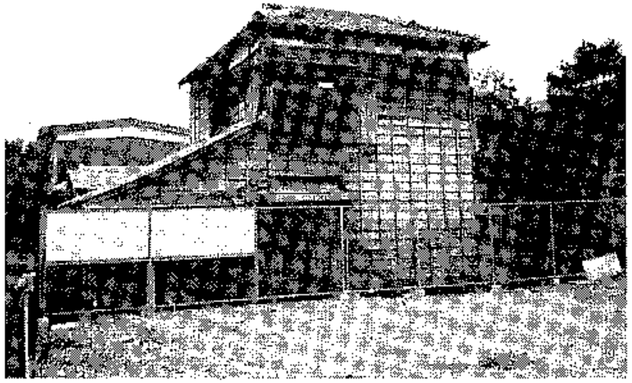


写真6-2　測定した2階建木造住宅

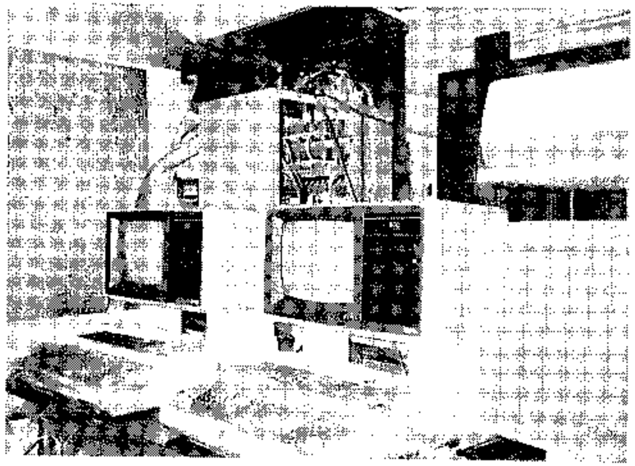


写真6-1　測定装置設置状況

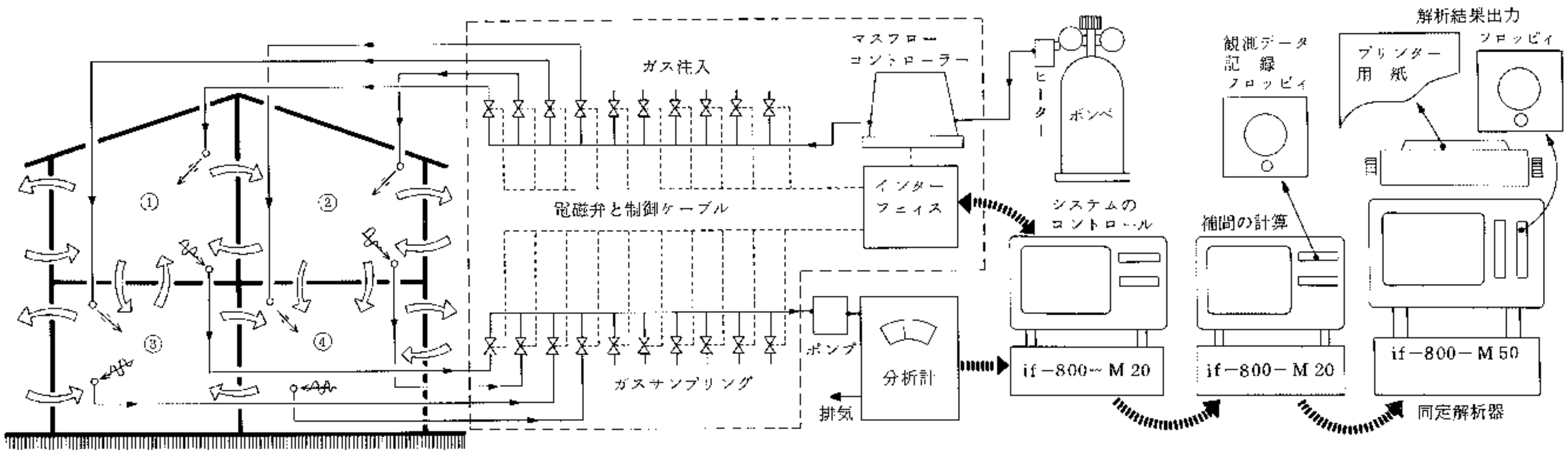


図6-1　多数室換気測定システムの構成

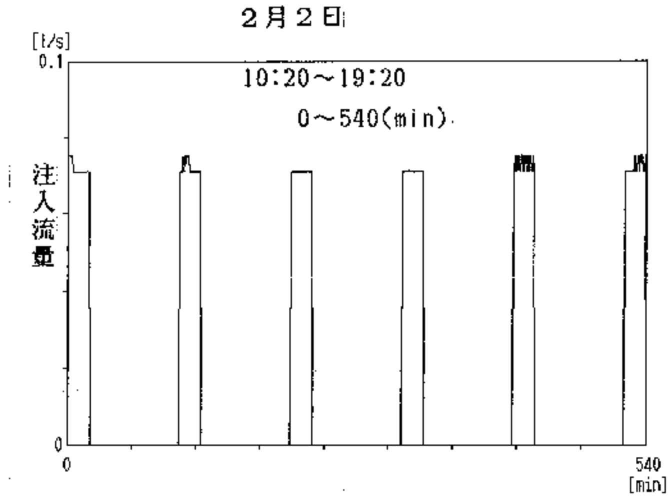


図6-2　室③へのトレーサーガス注入流量

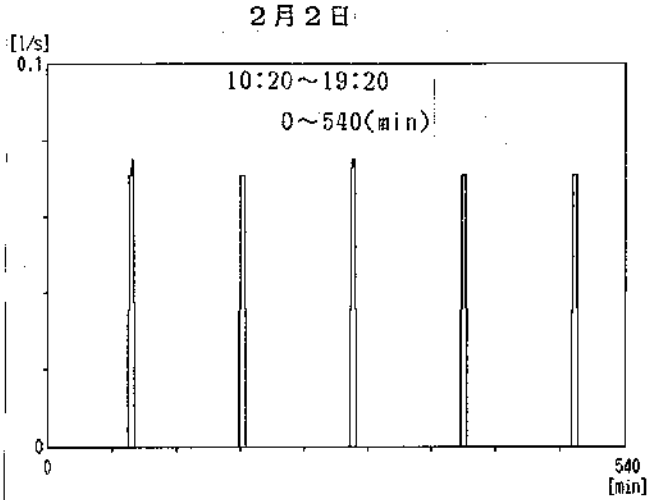


図6-3　室⑧へのトレーサーガス注入流量

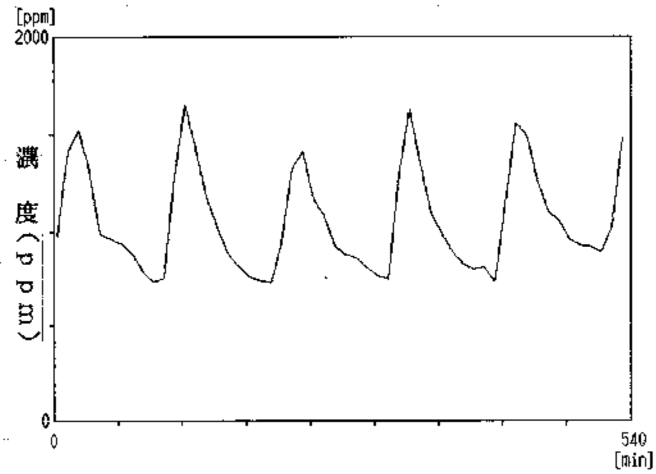


図6-4　室③のガス濃度変化

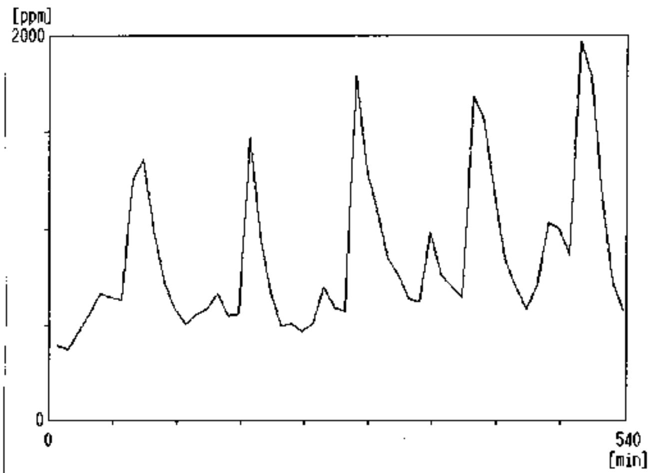


図6-5　室⑧のガス濃度変化

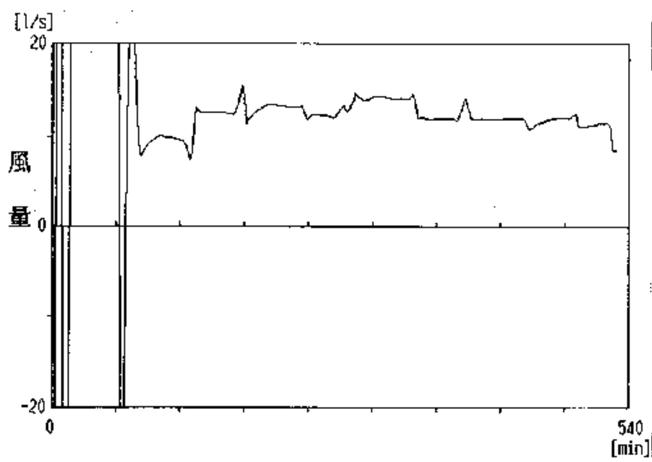


図6-6　C(10, 6)の逐次同定結果

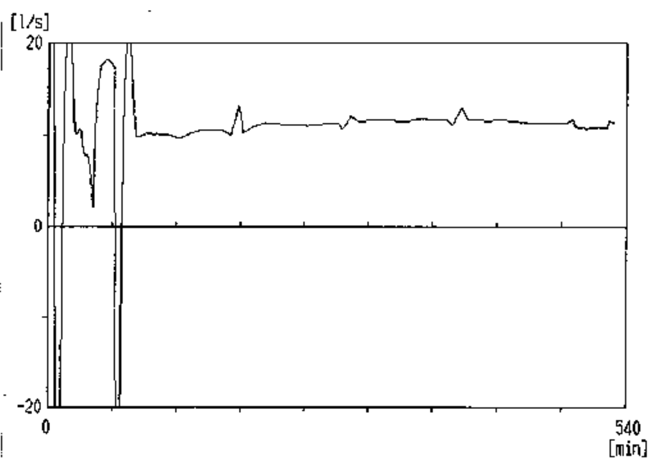


図6-7　C(6, 10)の逐次同定結果

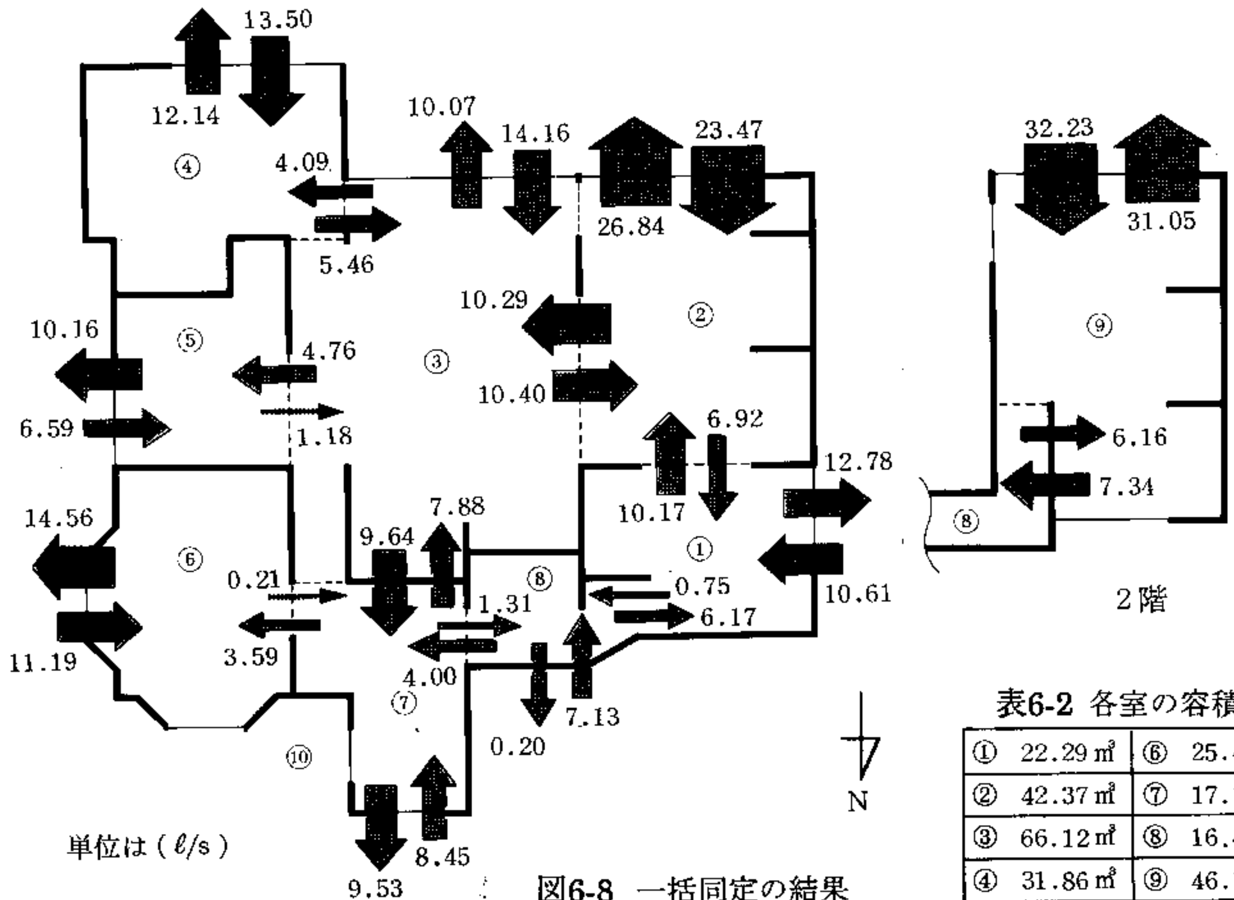


図6-8　一括同定の結果

表6-1　平均室温(℃)

①	6.71
②	7.84
③	7.59
④	7.83
⑤	8.46
⑥	8.54
⑦	6.49
⑧	6.38
⑨	13.08
⑩	8.64

風向：北北東

風速：2.17 m/s

表6-2　各室の容積

①　22.29 m³	⑥　25.45 m³
②　42.37 m³	⑦　17.14 m³
③　66.12 m³	⑧　16.43 m³
④　31.86 m³	⑨　46.15 m³
⑤　20.79 m³	

表6-3　風量の推定誤差分散$\sigma c^2 ij$

風量，i←j	10, 9	10, 2	10, 3	10, 4	10, 5	10, 6	10, 7	10, 8	10, 1	9,10	9, 8	8,10	8, 9	8, 7	8, 1	7,10	7, 8	7, 6
誤差分散	39.18	22.72	18.54	13.33	11.56	17.86	35.25	49.15	24.23	8.83	9.80	8.13	26.78	13.23	7.53	3.86	20.38	14.09
風量，i←j	7, 3	6,10	6, 7	5,10	5, 3	4,10	4, 3	3,10	3, 7	3, 5	3, 4	3, 2	2,10	2, 3	2, 1	1,10	1, 8	1, 2
誤差分散	5.76	2.44	2.67	1.15	1.85	1.94	2.37	4.22	13.18	9.18	9.56	12.60	2.45	2.14	4.55	3.75	11.95	6.57

ない場合や，注入スケジュールをより速く繰り返せばこの時間はさらに短縮される．一方，一括同定の結果は図6-8に示す．これは最初の260タイムステップ全ての測定データをもとにCPU-2とCPU-3でバッチ処理したものである．またこの一括同定において決定係数CODは0.260であった．さらに観測方程式の残差によって風量の推定誤差分散を分析し表6-3に示す．ここに(i, j)は室jから室iへの風量の推定誤差分散を表わす．実際の風量の時間変動はかなり大きいと考えられるから，これはその変動分散とも考えられる．

以上の実験により，本同定理論は多数室換気測定に応用した場合にも十分に実用になる確信を得た．しかしハード面については，濃度測定機能と測定システムの使い易さの点で，今後開発すべきことがあげられる．それらは，(1)濃度の多点同時測定を高速で行えるようにする，(2)現場測定に適したコンパクトで軽量なシステムにする，などである．

6.3　建物の熱的性能の現場測定システム

建物の熱的性能を現場測定により評価する技術は環境実験室などにおける測定評価に比べ，より実態に近い情報が得られ，経済的制約も少ないことなどにより重要である．しかし反面，実際の建物は気象条件などの変動により常に不規則な動的状態にあるから，測定データの解析理論が，問題となってくる．このために本同定理論を用いる．

6.3.1　測定システム

測定システムの概要を図6-9に示す．建物に作用する熱的入力として外気温，方位別日射量，電熱器入力量などと，状態量として各室の温度，部材表面温度や内部温度などを逐次測定する．電熱器は室温に変化を与え，同定を容易にするために用いる．すなわち気象上の入力だけでは可同定に関するランクの上昇が遅いと考えられるので，これを人為的に加速してやるためである．従ってこの入力の制御については特に設計する必要はなくランダムでもよい．このシステムでは暫定的にそれをタイマーで行った．建物の熱系の入力と状態量はある程度のサンプリング時間間隔ごとにデーターロガーで集められ逐次パーソナルコンピューターに送られる．この時間間隔は同定精度上からは短い方が良いと考えられるが，逆にパーソナルコンピューターが逐次同定計算をその間隔内で十分に行える程度には長くなければならない．パーソナルコンピューターはこの計算とともに測定データの記録も行う．同定計算のプログラム言語はFORTRANであり，部分的にデータ取込みルーチン等はアセンブリである．実験期間終了後はフロッピーディスクに記録された測定データをもとに一括同定や誤差分析を行う．

同定分析の計算プログラムは，前述した多数室換気測定システムにおけるものと同じである．たとえガス濃度から温度の拡散系に変っても，さらに拡散が移流だけでなく伝導･伝達や貫流による場合になっても一般的に適用できるのが本同定理論の1つの特長である．同定すべき拡張コンダクタンスのパラメータについては任意のものに対称性$c_{ij}=c_{ji}$の拘束条件を与えることができる．そして可同定性を満たすように既知パラメータを与える限り，容量m_{ij}自由入力係数r_{ij}の任意のパラメータも同定することができる．つまり保温性だけでなく動特性や日射取得性も評価できる．

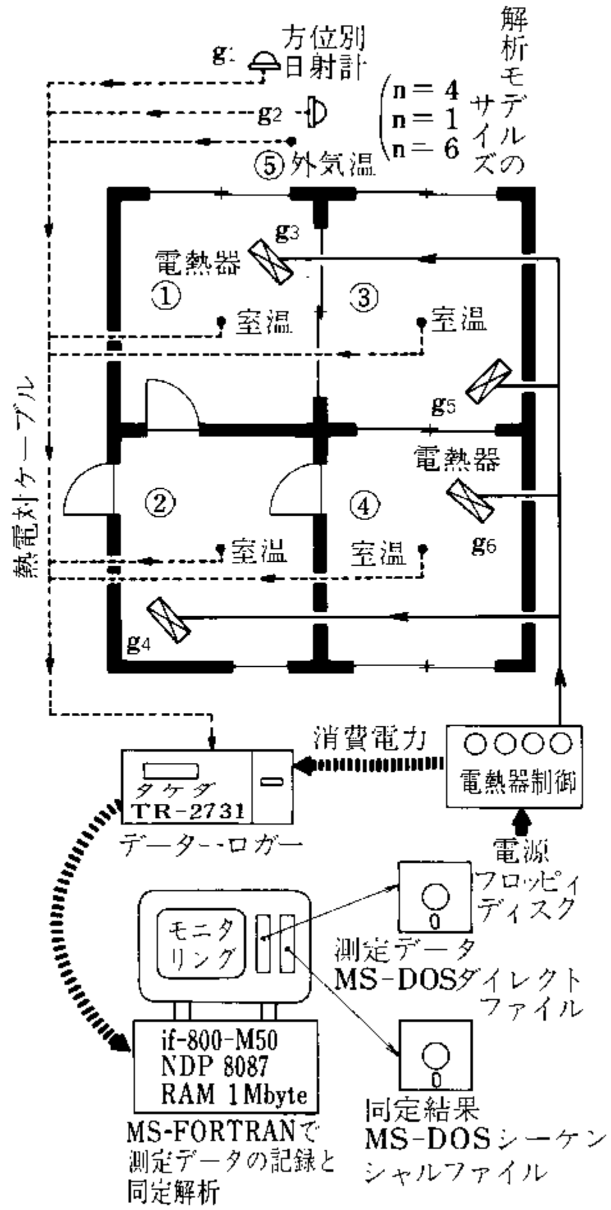


図6-9　測定システム概要図

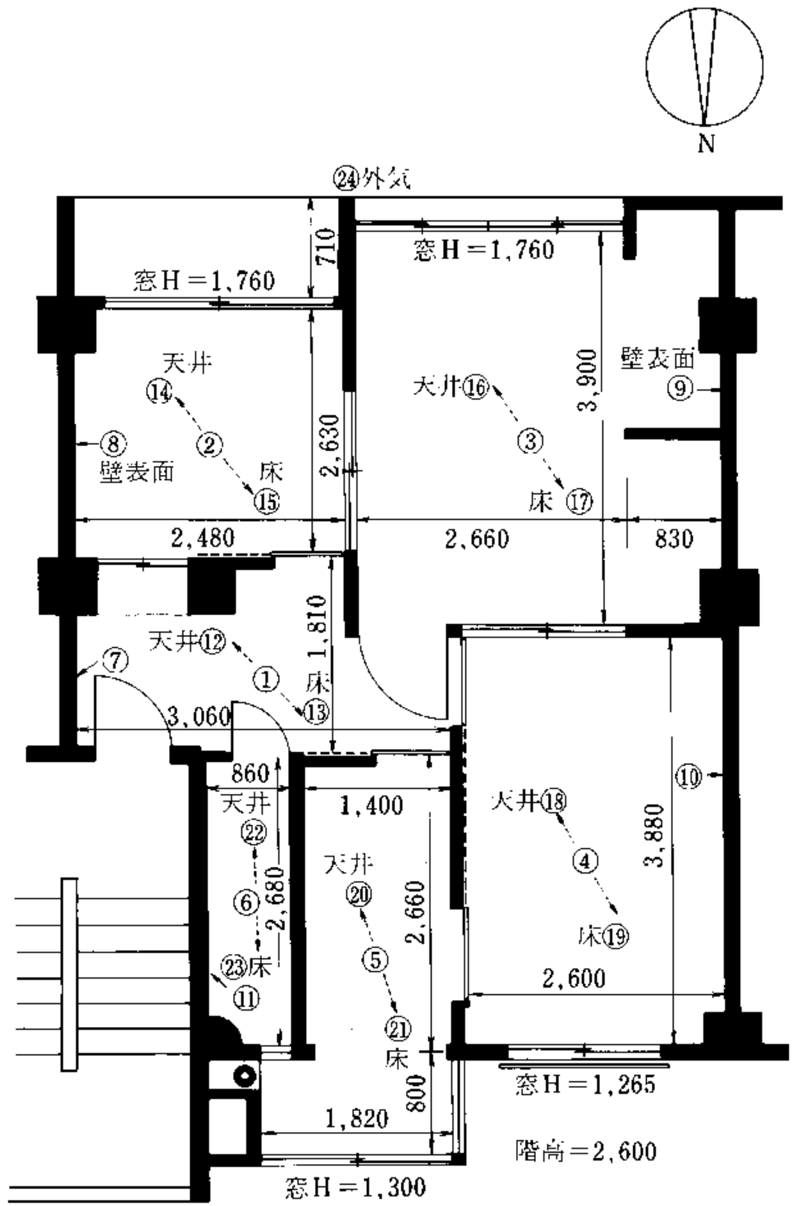


図6-10　測定対象建物の平面図

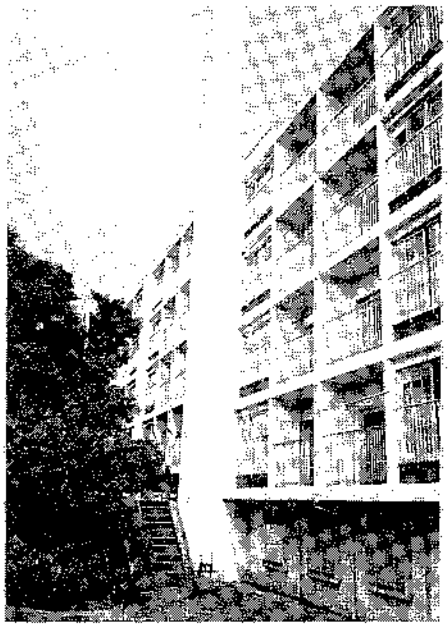


写真6-3　建物の南面

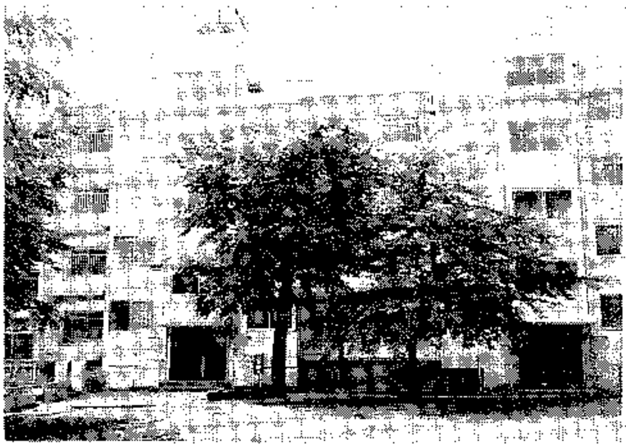
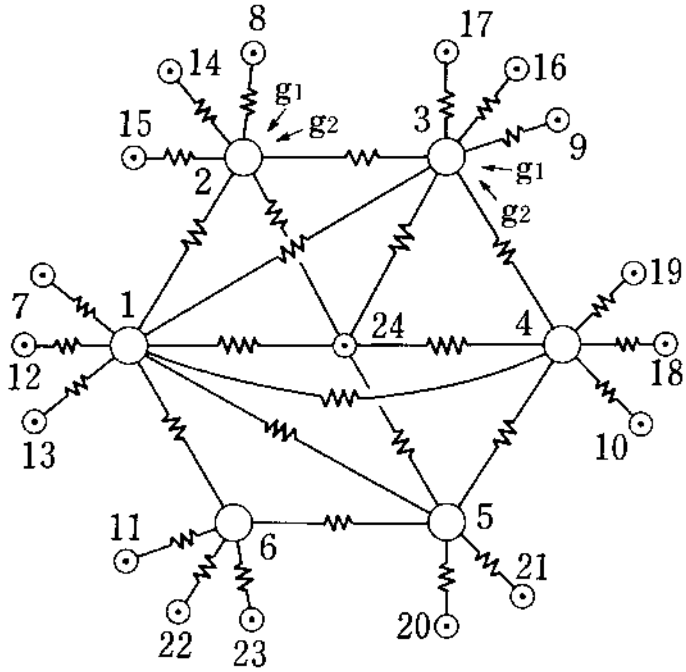


写真6-4　建物の北面



同定モデルのサイズ

g_1 ：水平全天日射	$n = 6$
g_2 ：垂直南面日射	$n_o = 18$
$g_3 \sim g_5$ ：電熱器	$n_g = 5$
⊙ ：規定節点	
○ ：同定熱容量	
← ：同定入力率	
—w— ：同定熱コンダクタンス	

図6-11　同定モデルの回路図表示

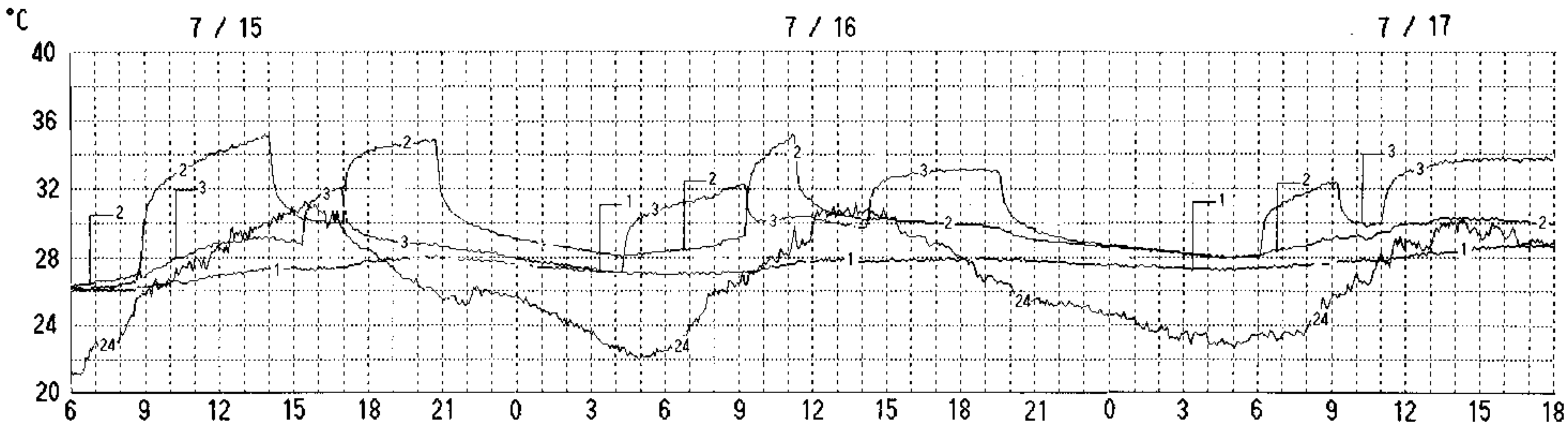


図6-12　温度変化

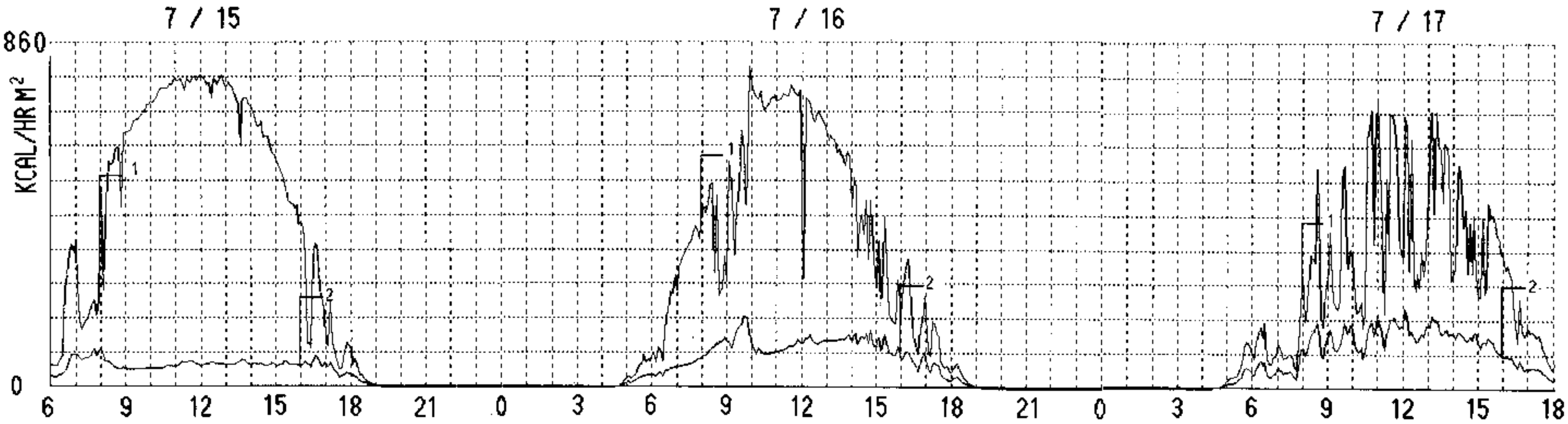


図6-13　日射量

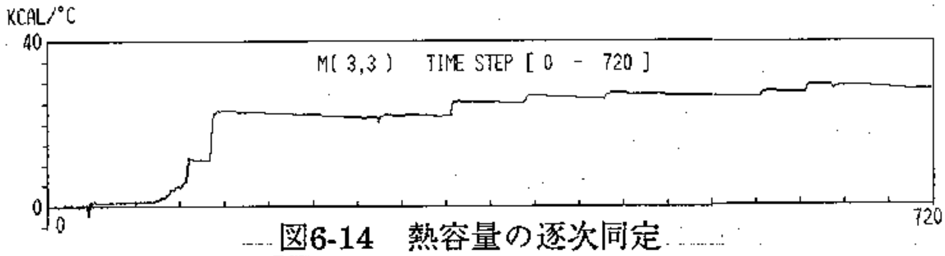


図6-14 熱容量の逐次同定

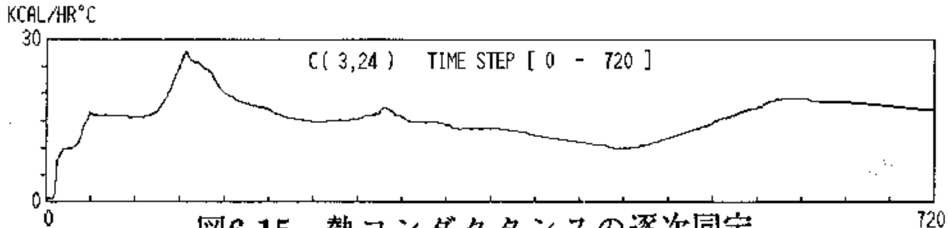


図6-15 熱コンダクタンスの逐次同定

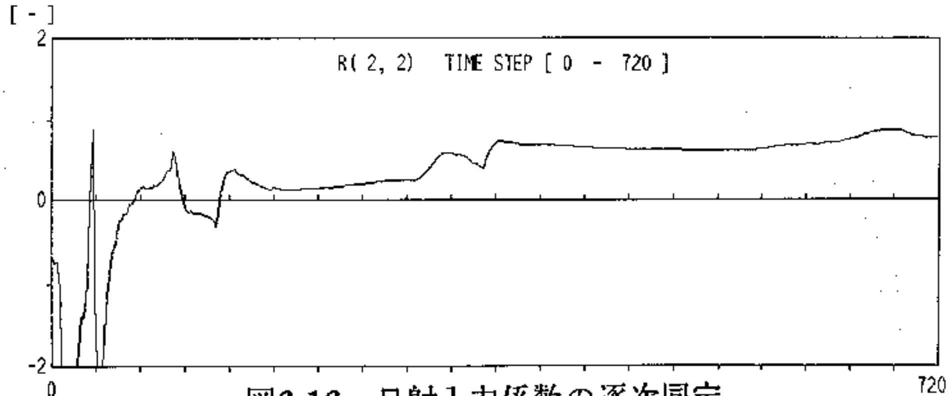


図6-16 日射入力係数の逐次同定

表6-4 一括同定による熱容量と誤差分散

mij	m1,1	m2,2	m3,3	m4,4	m5,5	m6,6
熱容量	1.02	18.15	29.44	33.04	2.34	2.05
誤差分散	1.375	0.620	2.029	1.335	2.623	1.430

表6-5 一括同定による熱コンダクタンスと誤差分散

cij	C5,24	C2,24	C3,24	C4,24	C1,24	C4,5	C3,4
熱コンダクタンス	8.50	16.11	16.72	8.89	8.78	16.51	8.28
誤差分散	0.396	0.376	0.732	0.520	0.153	0.150	0.689
cij	C1,4	C2,3	C1,3	C1,2	C1,5	C1,6	C5,6
熱コンダクタンス	5.00	23.56	4.95	8.21	15.60	8.32	25.20
誤差分散	0.351	0.421	0.414	0.263	0.894	0.796	0.978

表6-6 山登り法により同定された熱コンダクタンス

cij	C1,7	C1,12	C1,13	C2,8	C2,14	C2,15	C3,9
熱コンダクタンス	55.92	100.84	14.50	74.16	125.18	31.30	126.60
cij	C3,16	C3,17	C4,10	C4,18	C4,19	C5,20	C5,12
熱コンダクタンス	180.29	45.07	121.08	176.64	44.16	77.42	17.86
cij	C6,22	C6,23	C6,11				
熱コンダクタンス	39.94	9.98	83.76				

表6-7 一括同定による日射入力係数と誤差分散

rij	r2,1	r2,2	r3,1	r3,2
日射入力係数	−0.044	0.760	0.144	0.470
誤差分散	0.0010	0.0119	0.0021	0.0259

m^2

6.3.2 実施例

実験は四階建の鉄筋コンクリートアパートで行った．測定した一戸の平面図を図6-10に示す．①~⑥は室温の測定点である．㉔は外気温である．そのほか各室で壁-天井-床の内表面温度を測定した．これらは⑦~㉓の測定点で表わす．いくつかの測定点の温度変化を図6-12に示す．室温は電熱器のON/OFFによって典型的な変化曲線を描いている．自由入力量としてg_1(水平面全日射量:$Kcal/m^2\cdot hr$), g_2(南面全日射量), g_3, g_4, g_5(室②，③，④の電熱器入力kW)も測定した．日射量の変化は図6-13に示す．以上のデータは5分間隔でサンプリングした．

同定するための熱回路網モデルを図6-10に示す．節点番号は測定点番号に一致している．このモデルの全パラメータを同定することは可同定性の条件によりできない．いくつかのパラメータはあらかじめ求めておく必要がある．そこで内表面温度と室温の熱コンダクタンスを前もって同定した．この評価関数としてこれらの熱コンダクタンスを仮に与えた場合に同定される電熱器入力係数と測定入力係数の誤差の二乗和を定め，これを最小にするような上，下，水平方向の対流熱伝達率の最適値を求めた．これらはそれぞれ19.2, 4.8, 12.0($Kcal/m^2\cdot hr\cdot{}^\circ C$)であった．こうして表6-6に示す熱コンダクタンスを既知として，逐次同定と一括同定を60時間(720ステップ)分について行った．逐次同定は例えば図6-14~図6-16のようになった．一括同定とその誤差分析は表6-4, 6-5, 6-7に示す．また残差分析による決定係数CODは0.783であった．誤差分析によれば，この熱系での同定精度は多数室換気測定のものよりも非常に良好であった．この大きな原因の1つに熱系での測定は多点同時高速測定が容易にできるということがあげられる．もう1つの原因は，換気風量はきわめて時変性が大きいのに比べ，熱コンダクタンスは比較的に不変性を持っていることがあげられる．しかし今回の温度測定点の設置の仕方はかなりまばらであった．集中定数系モデルの持つ空間的離散化誤差の問題と類似の問題がこの設置の仕方にも表われると思われる．今後の検討課題である．もし温度測定点を密に設置すれば，より熱物性値に近いパラメータが求められると考えられる．

6.4 有限要素モデルの逆探問題

ここでは有限要素法によって作ったパラメータを，そのモデルのシミュレーション結果をもとにして，逆に求める数値実験を行う．前述した2種類の測定システムにおける場合は，実現象を対象としていたために同定モデルの次数や構造の不適切さによる誤差が含まれるので，同定理論そのものの正確さは検討しにくいが，ここでの数値実験によりそれが可能となる．

数値実験の対象としたのは柱を含む壁である．この横断面を図6-17に示す．外気側は南面するものとする．構成材料の熱物性値を表6-8のように設定した．そして図のように要素分割し第2章の(2-73)~(2-76)式によってシステムパラメータm_{ij}, c_{ij}, r_{ij}を計算した．これらの結果はそれぞれ表6-9, 表6-10, 表6-12に示す．ただし南向の日射座標成分をg_1と定義している．

計算したシステムパラメータから，第2章の一般化節点方程式(2-5)式によって，状態方程式(2-9)を自動構成し，これに入力を与えてシミュレーションを行った．外気温と日射量については空気調和衛生工学会の動的熱負荷計算用の気象データ[82]を，室温には正弦波を用いた．各節点の温度変化のシミュレーション結果は同定において測定値として扱う．従ってシミュレーションに

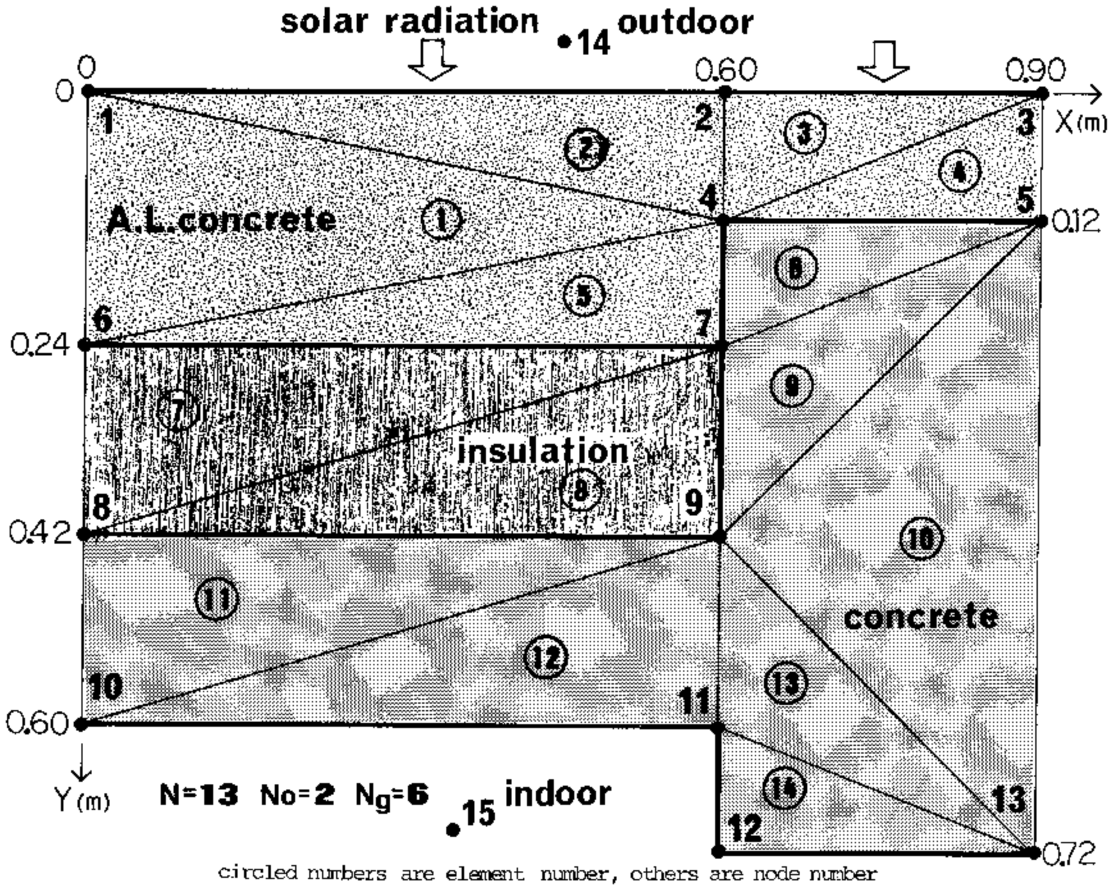


図6-17　異型壁断面図

A.L.:Autoclave Lightened

表6-8　物性値

	λ (kcal/mh°c)	cp (kcal/kg°c)	γ (kg/m3)	α (kcal/m2h°c)	a (−)
A.L.Concrete	0.12	0.21	362.0	20.0	0.5
Insulation	0.03	0.24	28.5		
Concrete	1.20	0.21	2300.0	8.0	

表6-9　有限要素法により得られたm_{ij} (Mは対称なため左下要素は省略)

M(1, 1)= 0.13684E+01	M(1, 2)= 0.22806E+00	M(1, 4)= 0.68418E+00	M(1, 6)= 0.45612E+00	M(2, 2)= 0.68418E+00	M(2, 3)= 0.11403E+00
M(2, 4)= 0.34209E+00	M(3, 3)= 0.45612E+00	M(3, 4)= 0.22806E+00	M(3, 5)= 0.11403E+00	M(4, 4)= 0.37296E+01	M(4, 5)= 0.83853E+00
M(4, 6)= 0.68418E+00	M(4, 7)= 0.95256E+00	M(5, 5)= 0.11096E+02	M(5, 7)= 0.18113E+01	M(5, 9)= 0.47092E+01	M(5,13)= 0.36225E+01
M(6, 6)= 0.14299E+01	M(6, 7)= 0.25884E+00	M(6, 8)= 0.30780E-01	M(7, 7)= 0.42017E+01	M(7, 8)= 0.61560E-01	M(7, 9)= 0.11175E+01
M(8, 8)= 0.44701E+01	M(8, 9)= 0.22043E+01	M(8, 10)= 0.21735E+01	M(9, 9)= 0.20348E+02	M(9,10)= 0.43470E+01	M(9,11)= 0.32603E+01
M(9, 13)= 0.47092E+01	M(10, 10)= 0.86940E+01	M(10, 11)= 0.21735E+01	M(11, 11)= 0.79695E+01	M(11,12)= 0.72450E+00	M(11,13)= 0.18113E+01
M(12, 12)= 0.14490E+01	M(12, 13)= 0.72450E+00	M(13, 13)= 0.10868E+02			

表6-10　有限要素法により得られたc_{ij} (Cは対称なため左下要素は省略また対角要素も省略)

C(1, 2)=-0.19880E+01	C(1, 4)= 0.12000E-01	C(1, 6)= 0.14400E+00	C(1,14)= 0.60000E+01	C(2, 3)=-0.97600E+00	C(2, 4)= 0.45000E+00
C(2, 14)= 0.90000E+01	C(3, 5)= 0.15000E+00	C(3, 14)= 0.30000E+01	C(4, 5)= 0.26400E+00	C(4, 6)= 0.12000E-01	C(4, 7)= 0.18000E+01
C(5, 7)= 0.60000E+00	C(5, 9)= 0.36000E+00	C(5, 13)=-0.19868E-06	C(6, 7)= 0.16500E-01	C(6, 8)= 0.50000E-01	C(7, 9)= 0.14500E+01
C(8, 9)= 0.18450E+00	C(8, 10)= 0.20000E+01	C(9, 11)= 0.34000E+01	C(9,13)= 0.36000E+00	C(10, 11)=-0.62000E+00	C(10, 15)= 0.24000E+01
C(11, 12)= 0.13400E+01	C(11, 13)= 0.60000E+00	C(11, 15)= 0.28800E+01	C(12, 13)=-0.16000E+00	C(12, 15)= 0.16800E+01	C(13, 15)= 0.12000E+01

表6-11　一括同定によるc_{ij}の推定結果　(対称要素は省略)

C(1, 2)=-0.19948E+01	C(1, 4)= 0.13576E-01	C(1, 6)= 0.14344E+00	C(1,14)= 0.60061E+01	C(2, 3)=-0.96265E+00	C(2, 4)= 0.44924E+00
C(2, 14)= 0.89679E+01	C(3, 5)= 0.15046E+00	C(3, 14)= 0.29887E+01	C(4, 5)= 0.25934E+00	C(4, 6)= 0.12488E-01	C(4, 7)= 0.18111E+01
C(5, 7)= 0.61160E+00	C(5, 9)= 0.36077E+00	C(5, 13)=-0.23089E-02	C(6, 7)= 0.18491E-01	C(6, 8)= 0.52380E-01	C(7, 9)= 0.14685E+01
C(8, 9)= 0.17905E+00	C(8, 10)= 0.19979E+01	C(9, 11)= 0.33785E+01	C(9,13)= 0.38249E+00	C(10, 11)=-0.60953E+00	C(10,15)= 0.23964E+01
C(11, 12)= 0.12993E+01	C(11, 13)= 0.56309E+00	C(11, 15)= 0.28751E+01	C(12, 13)=-0.13059E+00	C(12, 15)= 0.16819E+01	C(13,15)= 0.11930E+01

表6-12　有限要素法により得られたr_{ij}

R(1, 1)= 0.15000E+00	R(2, 1)= 0.22500E+00	R(3, 1)= 0.75000E-01

表6-13　一括同定による r_{ij} の推定結果

R(1, 1)= 0.15012E+00	R(2, 1)= 0.22417E+00	R(3, 1)= 0.74715E-01

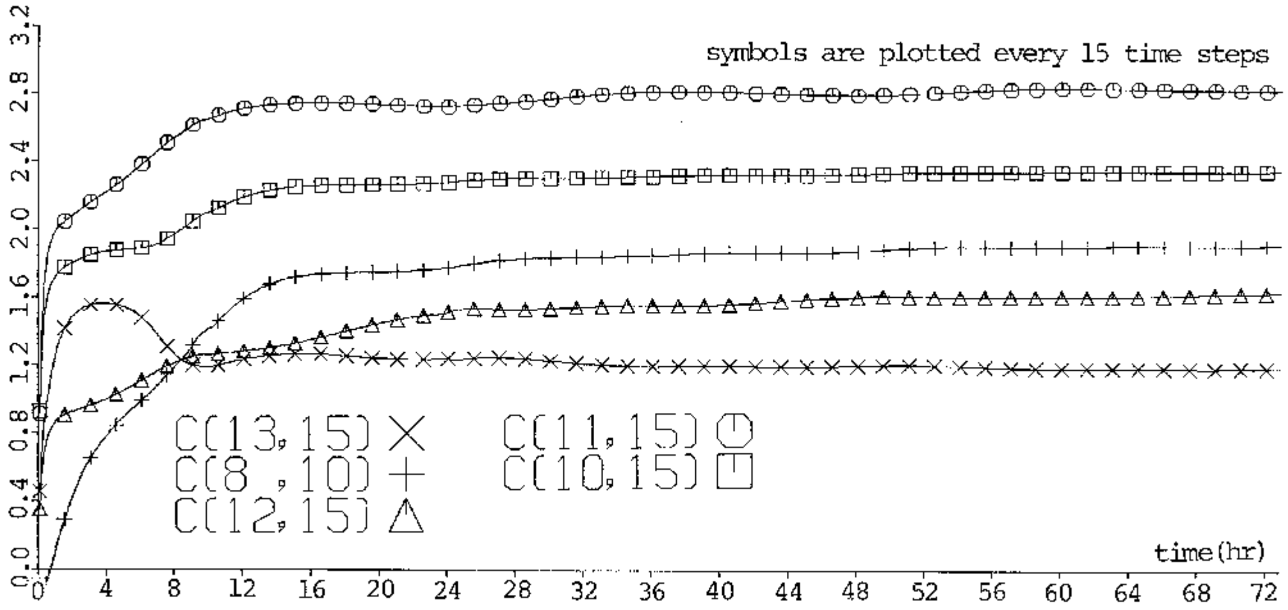


図6-18　逐次同定によるc_{ij}の推移

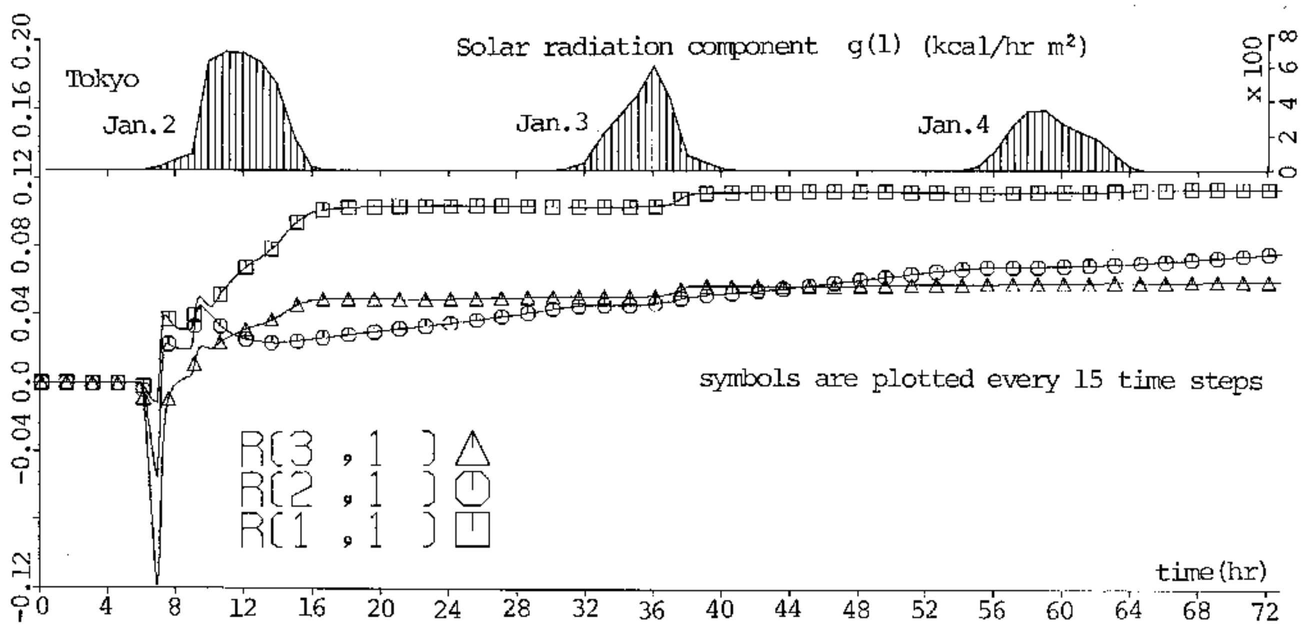


図6-19　逐次同定によるr_{ij}の推移

おいて時間積分誤差を含むのは望ましくない．そこで，解析解を与える第3章での(3-54)の時間積分公式を用いた．時間積分間隔Δtは$0.1hr$で行った．得られたシミュレーションの結果は入力値とともにディスクに書き込んだ．

次にディスクから，それらの各節点の温度変化のシミュレーション結果を読み取ることにより一括同定と逐次同定を実行した．c_{ij}のパラメータの間には伝導や伝達の対称性と質量保存則による拘束式が存在することが前もってわかっているから，6.1.1で述べたようにc_{ij}のベクトル$\mathbf{c}$のサイズを縮小するマトリクス$\mathbf{L}$が構成される．こうして$\mathbf{c}$のサイズは60から30まで縮小された．従ってr_{ij}の3個を合せて全体のシステムパラメータベクトル$\mathbf{a}$のサイズは33ですむ．まず一括同定を240ステップすなわち$24hr$の期間で行った結果を表6-11，表6-13に示す．また逐次同定を720ステップまで行ったときのいくつかのシステムパラメータの推移を図6-18と図6-19に示す．ただし初期値は$\mathbf{a}_0=0$とした．

多数のパラメータにかかわらず一括同定はきわめて良い結果を見せている．一方，図6-18，図6-19から逐次同定はなかなか正解に近づかないことがわかる．日射入力係数r_{ij}の逐次同定を見ると，これが同定されはじめるのは日射量が発生してからである．日射がない期間においては観測マトリクス内に線型従属な0の列ベクトルが生じ，逐次同定に悪影響を及ぼすのではないかと考えられる．これに対し一括同定は総和としての正規方程式で扱うから部分的な期間でもそれらが線型独立になりさえすれば十分である．以上の逆探問題の数値実験により本同定理論そのものの正確さは確認された．また逐次同定は一括同定より精度が劣る場合があることも確認された．

6.5 まとめ

この章では回路網による状態方程式の同定理論と，この応用による検証例について述べた．ここでいう同定とは，状態方程式のパラメータを，その状態値と入力値の測定データから帰納的に推定することを意味する．

こうした同定の背景思想はシステム理論的な意味を持つ．そこではじめに，この考え方の導入が最も進んでいる制御工学での現状の問題点と，それらに対して本研究から何を解決法として示したかを述べた．最も重要なものとして1つめはモデルの構造についてのものである．すなわち実用的な同定理論は具体的にアルゴリズムに直結し，どのような形態の系にも汎用的に対応できなければならない．そのために回路網の概念による定式化法が有効であることを示した．2つめに本理論では，伝達関数や荷重関数などのブラックボックスを求めるのではなく，多変数系を演えき的モデルに即した多次の状態方程式でグレイボックスとして表し，その同定について論じた．3つめは同定誤差を単に観測誤差だけからの伝播として評価するのではなく，実現象とモデルの不適合も考慮するために，方程式残差を用いて評価する方法を示した．4つめには一括同定のために定義する方程式誤差の評価関数を，計算機上の必要記憶領域を少なくて済むようにした．5つめには回路網の定式化法により観測誤差の伝播構造が明確になり，重みマトリクスが定められ，良好な性質を持つマルコフ推定の実行を可能にした．6つめには可同定性の議論を，システムパラメータのベクトルについての離散時間システムを構成して，より明快に論じた．

つぎに同定理論について述べた．まず測定値によって構成される観測方程式を定式化した．これは状態方程式を変形したものであるが，回路網の定式化法によりアルゴリズム上，自動的に構成される．またその概念によって，温度やガス濃度などの状態量について任意性を持ち，伝導，伝達，物質移動などの拡散の多様性に対応でき，対象物の形態や空間次元などに対して一般性を持つようにできる．そして縮小マトリクスの考え方により，システムパラメータよりさらに基本的な物性値を求めることも可能にした．同定法は，最小二乗法から演えきし，2通り導いた．1つは，観測期間終了後に，記録した全部のデータについて一度に行う一括同定と，もう1つは，データサンプリング時間間隔ごとにリアルタイムで行っていく逐次同定である．さらに同定精度の評価方法としていくつかの指標を導いた．これらは重回帰分析で用いられているものを参考に，連立した多次元系に拡張したものである．

実際にいくつかの測定システムをつくり，理論の検証と応用上の問題点の検討を行った．1つは多数室換気測定システムである．この場合，トレーサーガス濃度が状態量に，風量が拡張コンダクタンスに相当する．実験の結果，ソフトウエアとしての実用性は確認されたが，ハードウエア面では2つの開発課題が明らかになった．1つは濃度の多点高速測定性を高めること，もう1つは軽量でコンパクトな装置にすることである．

建物の熱的性能の現場測定システムも作った．実験の結果，同定精度の評価指標は前述の測定システムのものより良好であった．これは温度については多点の高速測定が容易であることと，パラメータの時間的不変性が大きいからである．しかし温度の測定点の設置の仕方には，予測モデルでの空間的離散化誤差と同様な問題があると思われる．今後の課題である．

最後に数値実験によって同定理論そのものの妥当性を検証した．すなわち，伝熱系の有限要素モデルをつくってシミュレーションを行い，この結果を観測値と見なしてモデルのパラメータを逆探した．この数値実験で前2者の実験においてはわからなかった，実現象とモデルの構造の不適合性を除いた，正味の正確さを試すことができる．この結果，多数のパラメータにもかかわらず一括同定はきわめて良い結果をみせた．一方，逐次同定は一括同定より精度が劣る場合があることも確認された．

第7章　総括

7.1　本研究のまとめ

本研究では，建物に関する伝熱と換気現象についての一般的で明快な予測計算法と測定評価法をつくることを目的に，基本的な理論展開を行い，さらに各種の実験による検証も行った．

本論文は，7章より構成されている．第1章は序論である．第2章から第4章は伝熱あるいは一般的な拡散現象のモデル化法とその予測計算法について述べたものである．第5章は換気のモデル化法と予測計算法についてのものである．第6章は建物の熱的性能や換気の動的測定法に関するものである．

本研究で得られた成果と結論を各章ごとに以下に述べる．

(1) 第1章の要点

第1章の前半においては，現状の問題点をどのようにとらえ，それらの解決法として本研究では何を提案したかを明確に列記した．これは伝熱解析，換気計算および動的測定法それぞれについて行った．従って，これらは本論文の結論でもある．

次に，これらに関連する既往の研究を文献研究し，過去の進展についての歴史観を形成するとともに，各々の研究成果のもつ今後の課題と不備な点について詳細な考察を行った．

そして，最後に以上の背景をふまえた上で本研究の意義と位置付けについて論じた．この位置付けは，単に既往の研究に対するものだけではなく，広く技術分野間ないしは学問的分野間のものとしても論じた．

(2) 第2章の要点

第2章では，まず熱回路網の概念による完全システムの節点方程式を定義した．これにより，ベクトル･マトリクス形式の状態方程式がアルゴリズム上，自動的に構成され，現代的数学による扱いを可能としただけでなく，計算モデルを明確なシステムとして把握できるようにした．そしてまた，さまざまな伝熱形態に対し，統一的な拡張コンダクタンスを定義することによって，電算機利用に適したモデル化を可能とした．この方程式は容量m_{ij}，拡張コンダクタンスc_{ij}と自由入力係数r_{ij}の3種のシステムパラメータだけによって構成される．こうして，熱回路網の言葉自体は古いものであるが，本研究ではその背景にシステム理論的な新しい意味と概念を持たせて定義した．

本研究では，集中定数系のモデルを扱う．このモデルを得るために主に検査体積法を用いる．従って座標系に束縛される有限要素法や空間的差分法に比べ，自由にかつ総合的な集中定数系の近似モデルを得ることができる．伝導，伝達，輻射，物質移動などが複合的に存在する，建物に関る典型的な伝熱系をいくつかとり上げ，この独特のモデル化の概念を具体的に示した．この検査体積法によるモデル化は熱貫流計算法の基本的な知識を持つ技術者であれば可能である．

一般に集中定数化法には有限要素法，空間差分法そして検査体積法などがある．しかし，いずれの方法によるモデルも本回路網の一般化節点方程式と状態方程式の中でとらえられる．従って，各々の方法によるモデルの共通点や相違点を同じ規範の上で比較できる．そこで，1次元伝熱系を例にとり，それらを調べた．空間的差分法は検査体積法と本質的に同じであるが，境界部分

に注意しないと，全体的な熱容量として大きすぎたり，小さすぎたりする場合がある．有限要素法が他の2つと大きく異なるのは熱容量の節点への集中の仕方である．

最後に，これら各種の集中定数化法の統一について論じた．これによって，各々の方法によるモデルの間に互換性と接続性を持たせることができるとともに，全てを一般的な状態方程式による明確なシステムとしてとらえることができるようになる．まず，各々の方法によりシステムパラメータm_{ij}, c_{ij}, r_{ij}なるいわば共通言語のようなものに一旦落しておくことができる．この共通語上で，互換，追加，削除などを行うこともでき，最後に熱回路網の一般化節点方程式によって自動的に状態方程式モデルが構成される．こうして次のシミュレーション計算においては，同じ計算手順が利用できるなどの，標準化の利益も期待できるようになる．

(3) 第3章の要点

第3章ではまず，熱回路網の概念による状態方程式の固有値が持つ性質について証明を行った．その数学的構造は回路網の定式化法により明確に表わされる．伝導，伝達，輻射により成る系ではその実負が証明され，物質移動を含む系では実部の負が証明される．

状態方程式の固有値解析を行った後，射影分解により解析的な時間積分をする方法を示した．従来は時間差分などの近似的な数値解によっていた．本方法によれば，その精解が得られるだけでなく，解は指数関数和の明確な関数として把握される．さらに入力が折線，階段あるいは周期関数として表わされる場合に対して積分公式を導いた．

アルゴリズムが単純なため多用される後退差分や前進差分の近似時間積分について，それらの数値的安定性も論じた．前者の無条件安定性の証明や後者の安定条件の導出を行った．このような考察はそれらを明確なシステムとしてとらえうる状態方程式記述と，この内部構造を明らかにする回路網の概念による定式化法によって明快なものとすることができる．

計算経済性を良くするために，状態方程式のサイズを縮小する方法を，単純な時間領域の重み付き残差積分から導いた．さらにシスティマテックなモデリングのために，部分システムの状態方程式を連成(coupling)する方法を示した．これは，部分からの出力方程式を直和(direct sum)することによるものである．

伝熱系のマクロな意味での時変性や非線型性に合理的に対応できるようにするために回路網のモード変化の概念を定めた．

熱と湿気の相互影響を考慮した，これらの同時移動現象も同様にモデリングされ，時間積分も同様に行えることを示した．ただし，状態方程式のサイズは熱だけの場合の2倍になる．また，固有値の性質は熱だけの場合と同様であることの証明も行った．

暖冷房の熱負荷シミュレーションについても論じた．本研究での方法によれば，装置系にまで範囲を広げた系で，より総合的なモデル化とシミュレーションが可能となる．

(4) 第4章の要点

第4章では，数値実験を行い数学的精度について検討するとともに，実現象の予測精度も検証するために実測値との比較も行った．

数値実験の試験体として1次元多層壁体をとり上げた．この片側の空気温度に単位関数や正弦波関数の励振を与え，両表面の熱流や温度を計算した．この種の伝熱系は容易に解析的な精解が得られ，それを基準として精度の検討をすることができる．モデル化法による違いについては検

査体積法と有限要素法を，時間積分法による違いについては射影分解による解析解と後退差分をとり上げた．これらを，分割のあらさや時間間隔Δtを何通りか変えてみて，空間的な離散化誤差や時間積分誤差についても調べた．

射影分解による解析的時間積分を行えば時間積分誤差はなく，空間的離散化誤差だけとなる．そこで，分割の粗さを変えてみて検討した結果，コンクリートのような比較的に熱容量のある材質でも$5cm$程度の厚みに分割すれば，単位応答については十分な精度を持つことがわかった．もし$10cm$程度の厚みにしても誤差の最大は約5%である．他の材質の場合は，熱拡散率に比例して厚く分割できる．

空間的離散化誤差は無視できる程度の分割のモデルを用いて，後退差分の誤差を調べた．その結果，$\Delta t=1hr$で最大約5%の誤差を持ち，$\Delta t=0.1hr$にすれば，これは約0.5%となる．もちろん射影分解による方法ではΔtをいくらにとっても精解に一致する．

検査体積法と有限要素法のモデルの比較も行った．同じ，節点数を持つものどうしで固有値の内容を比較すると有限要素モデルの固有値は絶対値が小さなものから大きなものまで範囲が広い．ただし，その小さな方のものは似かよっている．また，単位応答については，両者の違いはほとんど見られない．ただし比較的高周波の入力については，その固有値からもわかるように，有限要素モデルの応答は鋭敏であるが，貫流側はかえって精解よりも過剰に応答する傾向がある．このとき，むしろ検査体積モデルが精解に近い．ただし励振側はこの逆の傾向を持つ．従って，有限要素モデルは一見すると検査体積モデルより精密な解をあたえるように思えるが，必ずしもそうではないことがわかった．

実現象の予測精度を調べるため，2つの実測例において計算値との比較を行った．1つは空気式太陽熱集熱器の出口空気温度についてであり，もう1つは事務所建築の自然室温についてである．いずれも実際の温度変化の傾向を良くトレースしており，本計算法の有効性が示された．

(5) 第5章の要点

第5章では換気回路網のモデル化の概念とその解法について述べた．建築換気系は室内圧に関する非線型系としてとらえられる．この解法として修正ニュートンラプソン法を用いた圧力仮定法を示した．修正の意味は数値的振動の防止法を施したからであり，そのほかに初期値のとり方，ヤコビアンマトリクスの作り方などに工夫をした．さらに，この非線形連立方程式系を解くために，普通のニュートンラプソン法に修正を加えなければならない理由について考察した．

もう1つの問題は，この計算を汎用性をもちながら単純なアルゴリズムで実行できるようにするところにある．このための単純で一般的なデータ構造をつくり，アルゴリズムに直結した定式化をした．

この一般的なデータ構造とアルゴリズムは全圧節点系と呼ぶモデル化の概念によって可能となる．すなわち，従来より空気ダクト設計において良く知られている全圧で扱うことの有利さを，室を含んだ建物全体系にまで広げて生かすためのモデル化の概念をも示した．この概念によれば，どのような換気系であっても，底面において全圧節点を持つセル(室)と，点として集中定数化された通気路の集まりとしてみなせることになる．

換気系と熱系の連成法についても述べた．熱回路網で表わされる熱容量節点系と換気回路網で表わされる全圧節点系の節点番号の対応関数を定義することにより連成の計算をアルゴリズム上明快なものにした．

特に，住宅の隙間風量について，実測値とこの換気計算法による予測値の比較を行った．鉄筋コンクリートアパートについては，換気回数での違いが最大約30%，木造では最大約40%にも達することがある．この誤差の原因は，外部風の動的な乱れを考慮できない現状の風圧係数の扱い方と，隙間の形状や所在の不確定さにあると考えられる．

最後に，吹き抜けの中庭を持つ8層の事務所建物について，自然通風効果の検討に熱と換気の連成シミュレーションを適用した例を示した．このような形状の建物では，煙突効果に加え，中庭の周壁の風圧係数が風向きによらず常に負になる特性により，中庭に空気流が集り上へ抜けていく傾向を持つことがわかった．

(6) 第6章の要点

第6章では熱回路網による状態方程式の同定理論と応用例について述べた．この応用例は，建物の熱的性能の測定システムや多数室換気測定システムである．まず，システムの同定という考え方は制御工学に密接に関連があるため，その分野での現状の問題点について述べ，それらに対して本研究では何を解決法として示したかを述べた．

次に本研究における同定理論を述べた．本理論の最も大きな特徴は，熱回路網の概念と定式化法により，一般性と実用性を持つことである．この意味は理論の実際の適用において，温度やガス濃度など拡散量に対して任意性を持つこと，伝導，伝達，輻射や物質移動など拡散状況に対して多用性を持つこと，対象物の形態や空間次元などに対して一般性を持つことなどである．また，この定式化法により観測誤差の伝播構造も明確になるので重み付き最小二乗法をマルコフ推定とすることが可能となる．つまり最も良い性質を持つ同定結果を得ることができる．そして，具体的には観測期間終了後に，記録した全部のデータに対して一度に行う一括同定と，データサンプリング時間間隔ごとにリアルタイムで行っていく逐次同定の2つを導いた．後者は今後，理論的な最適制御に利用していくことができる．さらに同定精度の評価方法と評価指標を導いた．これらは残差分析により，単に測定誤差だけでなくモデリング構造の不適切さをも評価できるものとした．

実際の測定システムの製作と実験によってこの同定理論の有効性の検証を行った．まず，多数室換気測定システムとしての実験においてはそのソフトウェアとしての実用性が確認されたが，ハードウェア面ではいくつか開発すべき点が明確になった．建物の熱的性能測定システムとしての実験では温度測定点がまばらにもかかわらず良い同定精度を得ることができた．同定理論そのものの正確さを確かめるために，有限要素法によるシステムパラメータの逆探問題として数値実験を行った．そして良好な結果を得た．

以上が各章の総括である．本研究では主として建築環境に関わる伝熱現象を扱ったが，これらはその中にある1つの問題に着目して分析したものではなく，その体系化をめざしたものとして考えられる．従って，これらの多くの成果は一般性を持ち，他の工学分野での伝熱に関る問題解決にも寄与できるだけでなく，全く異なる現象を扱う分野に対しても参考となり得ることを確

信する．例えば，本研究での射影分解による解析的時間積分法は固有値が複素数であっても成立するから，ほとんどの現象のシミュレーションに使えるであろう．またサブシステムの連成法も，状態空間法という共通概念の中で成立するから同様である．さらにパラメータの同定理論についても同様であろう．換気回路網のモデル化法と解法は配管網や坑内通気の問題解決に寄与できることを信じる．伝熱解析についての有限要素法，差分法や検査体積法の統一の理論はこの種の技術計算プログラムの利用や開発の標準化を可能とし，それらをより効率的なものとできるであろう．

7.2 今後の課題と展望

建築環境工学の熱に関する分野においての研究課題は，一般に設計法，計測法と制御法の3つに大別されると考えられる．さらに，それぞれの中で重要な問題はシミュレーション理論，同定理論と最適制御理論である．そして，前2者に対し，本研究からの解答を与えた．従って，残る重要な問題は最適制御理論である．こうした本研究の成果と今後の課題を図7-1に示す．

シミュレーション理論においても同定理論においても，現象をどのようにとらえるかというモデル化の概念が重要であり，これに本研究でいうところの回路網の概念を共通して用いている．最適制御理論に対しても，これは有効であろう．さらに全ては状態空間法の基本思想の下に包括されるであろう．

一方，この残された問題に対して，制御工学ではすでに数学的かつ形式的な形での解は得られている．しかし，それらは多くの場合，行列微分方程式や積分方程式の形で与えられており，さらに一般的な解析解の得られない2点境界値問題を残していたりする．すなわち，特殊な場合について解くことはできても，より一般的にかつ実用的に解くための方法論としては研究の余地があると考える．こうした課題に，本モデリングの概念と，離散時間扱い，さらにマトリクス代数的扱いにより取組んでいこうと思う．

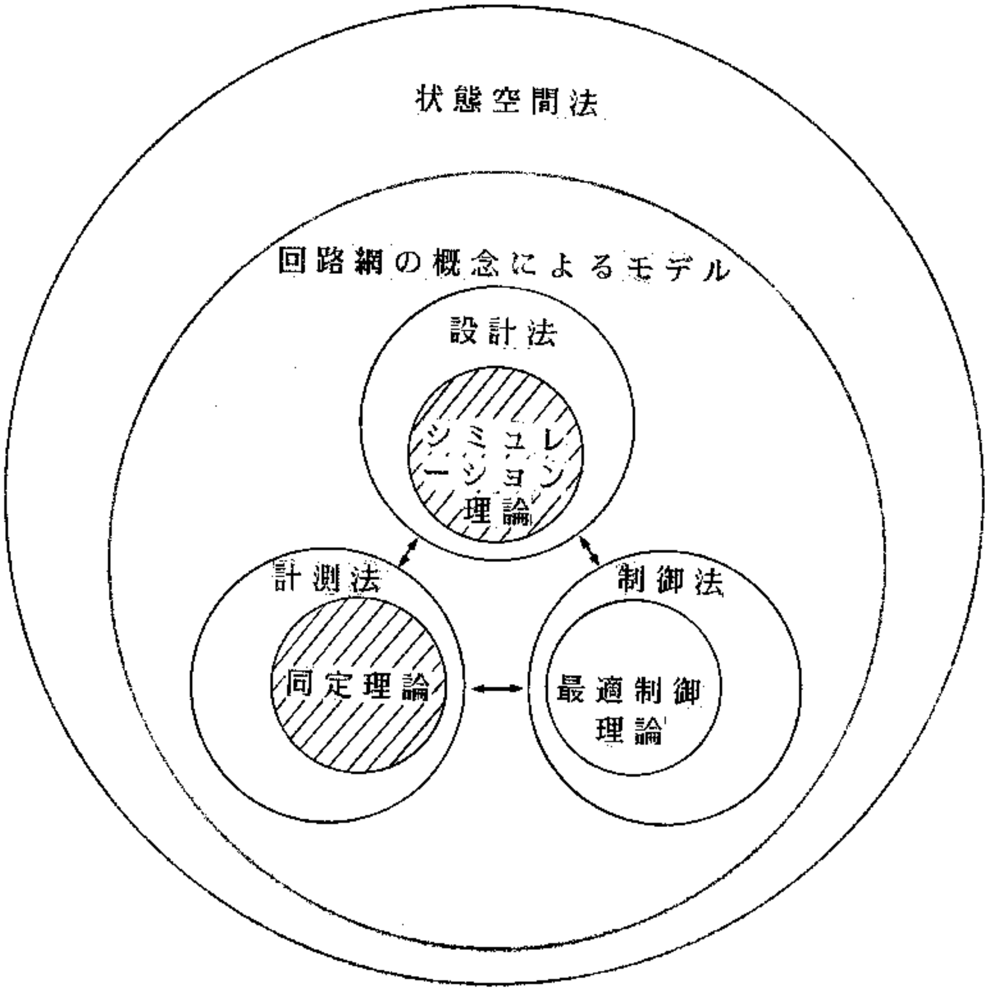


図7-1　本研究の位置付けと今後の課題

[参考文献]

1) 日本建築学会編 :「建築学大系8・音・光・熱・空気・色」彰国社, 1969, p.295
2) Mackey C.O. & Wright L.T. : "Periodic Heat Flow-composite Walls or Roofs," Trans. ASHVE, Vol.52, 1946, p.283
3) 長谷川房雄 :「多層平面壁の不定常熱伝導の解法(2)」, 日本建築学会論文報告集, 第61号, 昭和34年6月, p.65
4) 長谷川房雄 :「多層平面壁の不定常熱伝導の解法(3)」, 日本建築学会論文報告集, 第66号, 昭和35年10月, p.37
5) 長谷川房雄 :「多層平面壁の不定常熱伝導の解法(1)」, 日本建築学会論文報告集, 第61号, 昭和34年2月, p.51
6) Louis A. Pipes : "Matrix Analysis of Heat transter Problems," Journal of the Franklin Institute. Vol.263, NO.3, Mar.1957, p.195
7) D.G.Stephenson, G.P.Mitalas : "Cooling Load Calculations by Thermal Response Factor Method," ASHRAE Trans. Vol.73, Part I, 1967, III.1.1
8) G.P.Mitalas, D.G.Stephenson, : "Room Thermal Response Factor", ASHRAE Trans. Vol.73, Part I, 1967, III.2.1
9) G.P.Mitalas, and J.G.Arseneault, : "Fortran IV Program to Calculate Heat Flux Response Factors for Multi-Layer slubs," DBR Computer Program No.23, Division of Building Research, National Research Council of Canada 1967.
10) Nessi, A. and L.Nissolle, : "Regimes Variables de Fonctionnement dans les Installations de Chauffage Central" DUNOD, 1925 : and "R'esolution Pratique des probleme de discontinuite de fonctionnement dans les installations de chauffage central". DUNOD, 1933
11) G.P.Mitalas : "An Experimental Check on the Weighting Factor Method of Calculating Room Cooling Load", ASHRAE Trans. Vol.75, PartII, 1969 p.222
12) 木村建一, 石野久彌, 石川幸雄 :「表面熱流に対する冷房負荷重み係数の計算法(冷房負荷重み係数の理論的研究 I)」, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和45年9月, p.181
13) 木村建一, 石野久彌, 石川幸雄 :「各種熱取得要素に対する冷房負荷重み係数の計算法(冷房負荷重み係数の理論的研究II)」, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和45年9月, p.183
14) 田中辰明, 宮川保之 :「回転実験室の透過日射量に対する冷房負荷重み係数」, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和44年8月, p.59
15) 木村建一:「建築設備基礎理論演習」, 学献社, 1970
16) 松尾　陽, 武田　仁 :「レスポンス·ファクタ法による熱負荷計算システム」, 空気調和と冷凍, Vol.9, NO.5
17) 松尾　陽 :「日射熱取得の算法」, 空気調和と冷凍, Vol.10, NO.3, 1970
18) 荒谷　登, 佐々木紀一, 絵内正道 :「逐次積分法による室温および負荷変動の解析」, 北海道大学工学部研究報告, 第51号, 1968, p.185

19) T.Kusuda, : "Thermal Response Factrs for Multilayer Structures of Various Heat Conduction Systems", ASHRAE Trans., Vol.75, Part I , 1969, p.246
20) 浦野良美, 渡辺俊行 :「状態遷移行列による多層平面壁体伝熱系の解析(その1, 近似伝達関数モデルの作成とその精度)」, 日本建築学会論文報告集, 第305号, 昭和56年7月, p.97
21) 浦野良美, 渡辺俊行 :「状態遷移行列による多層平面壁体伝熱系の解析(その2, 離散時間系の逐行計算法とその精度」, 日本建築学会論文報告集, 第311号, 昭和57年1月, p.57
22) 長谷川房雄, 石川喜美, 松本　博 :「室内相互輻射を考慮した多数室室温変動」, 日本建築学会論文報告集, 第323号, 昭和58年1月, p.78
23) 長谷川房雄, 石川善美, 松本　博 :「暖冷房または室温の指定条件を一般的に考慮した多数室の室温変動と形成」, 日本建築学会論文報告集, 第334号, 昭和58年12月, p.81
24) 秋岡実則, 宮川道雄 :「室内相互放射を考慮した多数室室温変動の基礎式, 第1報, 表面の熱平衡式と係数行列A(s)の導出」, 日本建築学会論文報告集, 第227, 昭和54年3月, p.83
25) 長谷川房雄, 石川善美, 松本　博 :「室内相互輻射を考慮した多数室室温の変動,その3」, 日本建築学会東北支部研究報告集, 第37号,昭和56年2月
26) 木村建一, 松田守弘 :「室温変動の数値解法と図解法およびその予熱負荷定量化への応用について」, 日本建築学会論文報告集, 第66号, 昭和35年10月, p.53
27) 木村建一, 小林清蔵 :「壁体熱容量質点系による蓄熱負荷の近似解法」, 日本建築学会論文報告集号外, 昭和41年10月, p.415
28) 宇田川光弘, 木村建一 :「多数室室温変動の実用的計算手法と断熱雨戸の熱的効果の検討例」, 日本建築学会論文報告集, 第265号, 昭和53年3月, p.125
29) 浦野良美, 坂田展甫 :「熱負荷計算に於ける電気的等価について」, 日本建築学会論文報告集, 第60号, 昭和33年10月, p.85
30) 浦野良美, 坂田展甫 :「熱回路法に依る半無限個体の熱伝導解析」, 日本建築学会論文報告集, 第63号, 昭和34年10月, p.25
31) 浦野良美, 坂田展甫 :「熱回路法に依る壁体の熱伝導解析」, 日本建築学会論文報告集, 第66号, 昭和35年10月, p.33
32) 浦野良美, 石原　修 :「建物の非定常熱負荷計算における熱回路法の適用・第一報・基礎理論解析」, 日本建築学会論文報告集, 第227号, 昭和50年1月, p.91
33) 浦野良美, 石原　修 :「建物の非定常熱負荷計算における熱回路法の適用・第2報・室温変動解析」, 日本建築学会論文報告集, 第228号, 昭和50年2月, p.83
34) 浦野良美, 石原　修 :「建物の非定常熱負荷計算における熱回路法の適用・第3報・冷房時除去熱量解析」, 日本建築学会論文報告集, 第230号, 昭和50年4月, p.85
35) 浦野良美, 石原　修 :「建物の非定常熱負荷計算における熱回路法の適用·第4報·平面壁異形部の熱伝導解析」, 日本建築学会論文報告集, 第249号, 昭和51年11月, p.111
36) 石原　修 :「建物の非定常熱負荷計算における熱回路法の適用·第5報·多数室の熱的性状解析」, 日本建築学会論文報告集, 第289号, 昭和55年3月, p.111
37) W.J.Karplus : "Analog Simulation-Solution of Field Problems," McGrow-Hill, 1958

38) H.Cross : "Analysis of Flow in Network of Conduits or Conductors," Univ. of Illinois Buill., No.13, 1936
39) 平松良雄 :「通気学」, ㈱内田老鶴圃新社, 昭和49年7月1日, 第1版発行
40) D.R.Scott and F.B.Hinsley :平松の論文41)および著書39)によれば Colliery Engineering, Vol.28, No.324,326,328,334,p.69, 159, 229, 497, (1951)
41) 平松良雄 :「新しい通気網の解法」,日本鉱業会誌, 69巻, p.15, (1953)
42) W.Maas, :平松の論文41)および著書39)によれば Geologie en Mijnbouw 12, April, p.117, (1950)
43) 石原正雄 :「クロス法の応用による多数室の換気計算」, 建築学会近畿支部研究報告, 1961, 4月, p.161
44) 前田敏男 :「多数室の換気計算法」, 日本建築学会近畿支部研究報告, 1961, 4月, p.58
45) 石原正雄 :「建築換気設計」, 朝倉書店, 昭和44年3月30日初版発行
46) 45)によれば44)の同じ報告集には, 前田, 松本, 成瀬:「一列法の数値解法例」, 前田, 石黒, 中村:「単一開口化による単室化の例題」, 前田, 石黒:「未知圧力が輪状結合をする場合の一列法の応用」, 前田, 松本:「換気と温度の複合問題への一列法の応用」が掲載されている。
47) G.T.Tamura, A.G.Wilson : "Pressure Differences for a Nine-Story Building as a Result of Chimney Effect and Ventilation System Operation," ASHRAE Trans., Vol.72, PartⅠ, 1966, p.180
48) G.T.Tamura, A.G.Wilson : "Building Pressure Caused by Chimney Action and Mechanical Ventilation," ASHRAE Trans., Vol.73, PartⅡ, 1967, p.Ⅱ.2.1
49) G.T.Tamura, A.G.Wilson, : "Pressure Differences Caused by Wind on Two Tall Buildings," ASHRAE Trans., Vol. 74, PartⅡ, 1968, p.170
50) G.T.Tamura, : "Computer Analysis of Smoke Movement In Tall Buildings," ASHRAE Trans., Vol.75, PartⅡ, 1969, p.81
51) D.M.Sander and G.T.Tamura, : "Simulation of Air Movement in Multi-Storey Buildings," Vol.1, Proceedings 2nd Symposium on Use of Computers for Thermal Environmental Engineering, Paris, 1974, p.165-p.171, or DBR Paper No.815 Division of Building Research, OTTAWA, NRCC
52) John H. Klote, : "A Computer Program for Analysis of Smoke Control Systems," (U.S.) National Bureau of Standards, Washington, DC, NBS/DF-82/003a, June, 1982
53) 寺井俊夫, 松下敬幸, :「避難階段前室への各種の給気・排煙方法の比較検討について」, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和57年10月, p.591
54) 寺井俊夫, 松下敬幸, 深井弘志, :「火災時の避難と煙流動の統一的取り扱いにいて, (その2)インシデンス行列を用いた二層流煙流動の非定常計算」, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和58年9月, p.613
55) Don T. Phillips, Alberto Garcia-Diaz : "Fundamentals of Network Analysis," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 07632, ISBN 0-13-341552-X

56) A.Zold, : "Air Circulation in Buildings by the Flow in Networks Method," Period Polytech Archit (Hungary) Vol.22, No.1, 1978, p.50-p.62
57) 佐藤芳彦 :「等圧配水制御に関する研究」, 水道協会雑誌, 第446号, 昭和46年11月, p.7
58) A.Marlow, et al, : "Improved Design of Fluid Networks with Computers," Proc. ASCE, HY4, July, 1960
59) 日本工業規格(JIS) :「屋内換気量測定法(炭酸ガス法)」, A1406, 昭和50年1月31日第1刷発行
60) 渡辺要, 編 :「建築計画原論Ⅲ」, 丸善(株), 昭和40年4月25日発行, 昭和53年12月20日第2版第4刷
61) Frank W. Sinden : "Multi- Chamber Theory of Air Infiltration," Building and Environment, Vol.13, Pergamon Press 1978, p.21
62) D.T.Grimsrud, M.H.Sherman, R.C.Diamond, P.E.Condon, A.H.Rosenteld : "Infiltration-Pressurization Correlations : Detailed Measurements on a California House," ASHRAE Trans. Vol.85, Part 1, p.851
63) M.H. Sherman et al, : "Air Infiltration Measurement Techniques," 1 st Air Infiltration Conference, on Air Infiltration Instrumentation and Measuring Techniques, Windsor, England, 1980
64) S.J.I'anson, C.Irwn, A.T.Howarth, : "Air Flow Measurement Using Three Tracer Gases," Building and Environment, Vol.17, No.4, 1982, p.245
65) F.B.Hildebrand : "Introduction to Numerical Analysis,"McGraw-Hill Book Company, 1974, ISBN 0-07-028761-9
66) Honma, H. : "Ventilation of Dwellings and Its Disturbances," Faibo grafiska, Stockholm, 1975
67) 佐々木 隆, 荒谷 登 :「多室空間の換気経路測定法に関する研究」, 日本建築学会論文報告集, 第333号, 昭和58年11月, p.84
68) 松尾 陽 :「測定にもとづく室温予測および暖房性能の評価法について」, 日本建築学会全国大会学術講演梗概集, 昭和51年10月, p.337
69) 松尾陽, 稲沼実, 及川豊秀 :「測定にもとづく室温予測および暖房性能の評価法について(第2報)重構造建物への室温予測式の適用」, 日本建築学会全国大会学術講演梗概集, 昭和52年10月, p.405
70) D.V.Pryor and C.Byron Winn : "A Sequential filter used for parameter estimetion in a passive solar system," Solar Energy Vol.28, No.1, 1982, p.65
71) Solar Energy Laboratory, University of Wisconsin, Madison: "Modeling of Solar Heating and Air Conditioning," NSF/RANN/SE/GI/34029/PR/72/4.
72) 日本機械学会:「伝熱工学資料·改訂第3版」, 1975
73) S.V.パタンカー 著, 水谷幸夫, 香月正司, 訳 :「熱移動と流れの数値解析」, 森北出版(株), 1985
74) O.C.ツェンキーヴィッツ :「マトリックス有限要素法入門」, 培風舘, 1977
75) 矢川元基 :「熱と流れの有限要素法入門」, 培風館, 1983

76) 斉藤正彦 :「線型代数演習」, 東京大学出版会, 1985
77) Julius T. Tou 著, 中村嘉平, 伊藤正美, 松尾勉, 共訳 :「現代制御理論」, コロナ社, 1969, 第3版
78) 斉藤正彦 :「線型代数入門」, 東京大学出版会, 1969
79 戸川隼人 :「有限要素法概論」, 培風館, 1982
80) 松本　衛 :「吸放湿におよぼす吸着熱の影響」, 日本建築学会論文報告集·号外, 1965年, 9月
81) 井上宇市 :「空気調和ハンドブック·改訂3版」, 丸善(株), 1982
82) 松尾　陽, 横山浩一, 石野久彌, 川元昭吾 :「空調設備の動的熱負荷計算入門」, 日本建築設備士協会, 1984
83) 日本建築学会 :「換気設計·日本建築学会設計計画パンフレット18」, (株)彰国社, 1973
84) 加藤正平, 野口　宏, 村田幹生, 国分守信, 奥山博康 :「家屋の放射能防護に関する研究(II)実家屋の自然換気率測定」, JAERI-Mレポート
85) 野口　宏, 村田幹生, 加藤正平, 国分守信, 奥山博康 :「主題同上(III)家屋の通気特性と風圧係数の測定」, JAERI-Mレポート
86) 古田勝久 :「線形システムの観測と同定」, コロナ社, 1977
87) 中川　徹, 小柳義夫 :「最小二乗法による実験データ解析」, 東大出版会, 1982
88) Gerald J.Bierman : 「Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation 」, Academic Press
89) 佐和隆光 :「回帰分析」, (株)朝倉書店, 1980
90) 高橋安人 :「システムと制御・第2版下」, (株)岩波書店, 1980
91) 坂和愛幸 :「機械工学大系45・最適システム制御理論」, (株)コロナ社, 1972
92) 宮川　洋, 佐藤拓宋, 茅　陽一 :「不規則信号論と動特性推定」, (株)コロナ社, 1972
93) P.J.ローチェ著, 高橋亮一, 他訳 :「コンピューターによる流体力学<上>」, 発行・構造計画研究所, 発売・企画センター, 1984

付録-1　Mの正の定符号とCの負の定符号の証明過程(第3章, 3.1)

まず, Mの正の定符号を証明できる. 検査体積法や差分法で集中定数化した場合には, Mは対角マトリクスであり, これの要素は全て正であるから, それが明らかである. 有限要素法によった場合にはMは非対角要素も含まれる対称マトリクスである. しかしMは各要素からの重ね合せで出来上がっているから, 1つの要素から成るその部分マトリクスについて証明すればよい. 要素がnp個の節点によって構成されるとき, これらに対応する形状関数を$w_1, w_2, \cdots\cdots, w_{np}$とすれば, この基本性質により, これらの和は常に1である. つまり$w_1+w_2+\cdots\cdots+w_{np}=1$ である. 従って行のマトリクス$\mathbf{W}_j=(w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_{np})$とすれば次式が成り立つ. ただし$\mathbf{1}$は全要素が1の$np$次ベクトルを表す.

$$ {}^t\mathbf{1}\cdot\int_{v_{ej}} c_p\cdot\gamma\cdot{}^t\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{W}_j dv\cdot\mathbf{1}=c_p\cdot\gamma\cdot v_e>0 \tag{A1-1}$$

任意のnp次のベクトル$\mathbf{p}_e$であっても, 正則マトリクス$\mathbf{Q}$によって$\mathbf{1}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{p}_e$とできる. 従って

$$ {}^t\mathbf{1}\cdot\int_{v_{ej}} c_p\cdot\gamma\cdot{}^t\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{W}_j dv\cdot\mathbf{1}={}^t(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{p}_e)\cdot\int_{v_{ej}} c_p\cdot\gamma\cdot{}^t\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{W}_j dv\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{p}_e)$$

$$ ={}^t\mathbf{p}_e\cdot{}^t\mathbf{Q}\int_{v_{ej}} c_p\cdot\gamma\cdot{}^t\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{W}_j dv\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{p}_e=c_p\cdot\gamma\cdot v_e>0 \tag{A1-2}$$

これは左方から${}^t\mathbf{Q}$, 右方から$\mathbf{Q}$で乗じられた全体マトリクスの正の定符号だけでなく, その中心のマトリクスの正の定符号も示している.[76] よってMのその性質は示された. 次にCの負の定符号を証明する. この際用いる重要な性質は(2-1)式で示した一種の質量保存則である. (3-9)式の右辺は2項あるがそれらの違いは2次形式をつくるのが$\mathbf{p}$か$\mathbf{q}$かの違いである. どちらの項も負となることを示すため, 一般に任意の0でないベクトル$\mathbf{p}$による2次形式について証明する. $\mathbf{p}$のi番要素をp_iとすると, 次式の要素記述ができる.

$$ {}^t\mathbf{p}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\sum_{j=1}^{n+n_o}c_{ji}\cdot p_i^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\cdot p_i\cdot p_j \tag{A1-3}$$

さらに(2-1)式から次式も成立する.

$$ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+n_o}c_{ji}\cdot p_i^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+n_o}c_{ij}\cdot p_i^2 \tag{A1-4}$$

この式の右辺および左辺を次式のように書いておく.

$$ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+n_o}c_{ij}\cdot p_i^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\cdot p_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+n_o}c_{ij}\cdot p_i^2 \tag{A1-5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+n_o} c_{ji}\cdot p_i^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot p_j^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+n_o} c_{ji}\cdot p_i^2 \tag{A1-6}$$

(A1-5), (A1-6)式を辺々加えた左辺の1/2は(A1-4)の関係式により(A1-3)式の右辺第1項に代入できる．こうして(A1-3)式は次のように変形することができ，この負が証明される．

$$\begin{aligned}
{}^t\mathbf{p}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{p} &= -\frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot p_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot p_j^2 \\
&\quad +\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+n_o} c_{ij}\cdot p_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+n_o} c_{ji}\cdot p_i^2\Bigg)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot p_i\cdot p_j \\
&= -\frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot p_i^2-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot p_i\cdot p_j \\
&\quad +\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot p_j^2\Bigg)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+n_o}(c_{ij}+c_{ji})\cdot p_i^2 \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot(p_i-p_j)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+n_o}(c_{ij}+c_{ji})\cdot p_i^2 \quad <0
\end{aligned} \tag{A1-7}$$

また，(A1-7)式は$\mathbf{p}$を$\mathbf{q}$に置き換えても成立する．従って，$\mathbf{C}$は負の定符号であることが証明された．

付録-2　連立常微分方程式の1つの解法(第3章, 3.2)

単変数における線型常微分方程式解法の定数変化の法にならい，まず，

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x} \tag{A2-1}$$

の微分方程式を解き，次に(3-21)の微分方程式を解くことができる．
(A2-1)式は入力のない状態であるから初期値問題である．

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_i\end{cases} \tag{A2-2}$$

この式で表された初期問題は，次の積分方程式と同値である．

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_i+\int_o^t \mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}(\tau)d\tau \tag{A2-3}$$

そこで次の3式を満たすような関数列$\mathbf{x}_k(t)$を考える．

$$
\begin{cases}
\mathbf{x}_o(t)=\mathbf{x}_i \\
\mathbf{x}_{k+1}(t)=\mathbf{x}_i+\int_o^t \mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}_k(\tau)d\tau,\ (k=0,1,2,\cdots) \\
\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k(t)=\mathbf{x}(t)
\end{cases}
\qquad \text{(A2-4)}
$$

すなわち，$k\to+\infty$のとき，$\mathbf{x}_k(t)$は(A2-2)式を満たすような解となるようにする．これは求めようとする$\mathbf{x}(t)$の解式を何らかの関数の無限級数和で表そうとする意図による．この何らかの関数を$\mathbf{u}_k(t)$と表す．

いまもし，$\mathbf{u}_{k+1}(t)$を次のように定めるとする．

$$
\mathbf{u}_{k+1}(t)=\mathbf{x}_{k+1}(t)-\mathbf{x}_k(t) \qquad \text{(A2-5)}
$$

一方

$$
(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k-1})+(\mathbf{x}_{k-1}-\mathbf{x}_{k-2})+\cdots\cdots+(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_0
$$

であるから，

$$
\mathbf{x}_k(t)=\mathbf{x}_o+\mathbf{u}_1(t)+\mathbf{u}_2(t)+\cdots\cdots+\mathbf{u}_k(t) \qquad \text{(A2-6)}
$$

となる．すなわち，$k\to+\infty$のとき，$\mathbf{x}(t)$は$\mathbf{u}_k(t)$の無限級数で表される．そして$\mathbf{u}_{k+1}(t)$は(A2-4)の第2式と(A2-5)式により

$$
\mathbf{u}_{k+1}(t)=\int_o^t \mathbf{C}^*\cdot\mathbf{u}_k(\tau)d\tau \qquad \text{(A2-7)}
$$

なる漸化式を持つから，$k=0$のとき(A2-8)式が計算できて$\mathbf{u}_1(t)$の関数形が決れば，あとは順次$\mathbf{u}_2(t)$, $\mathbf{u}_3(t)$, ……は決定していけるという便利な性質を持つことになる．まず$k=0$のときは，(A2-5)式と(A2-4)の第1,2式により次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1(t)&=\mathbf{x}_1(t)-\mathbf{x}_0(t) \\
&=\int_o^t \mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}_0(\tau)d\tau \\
&=\int_o^t \mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}_i d\tau=t\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}_i
\end{aligned}
\qquad \text{(A2-8)}
$$

次に$k=1$の場合は

$$
\mathbf{u}_2(t)=\int_0^t \mathbf{C}^*\cdot\mathbf{u}_1(\tau)d\tau
$$

$$=\int_o^t \mathbf{C}^*\cdot\tau\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}_i d\tau$$

$$=\frac{t^2}{2!}\cdot\mathbf{C}^{*2}\cdot\mathbf{x}_i \tag{A2-9}$$

となる．さらに引き続いて$k=2$の場合は次のようになる．

$$\mathbf{u}_3(t)=\frac{t^3}{3!}\cdot\mathbf{C}^{*3}\cdot\mathbf{x}_i \tag{A2-10}$$

従って一般に$\mathbf{u}_k(t)$は次式で計算される．

$$\mathbf{u}_k(t)=\frac{t^k}{k!}\cdot\mathbf{C}^{*k}\cdot\mathbf{x}_i \tag{A2-11}$$

これらを(A2-6)に代入すれば，

$$\mathbf{x}_k(t)=\mathbf{x}_i+\frac{t}{1!}\cdot\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}_i+\frac{t^2}{2!}\cdot\mathbf{C}^{*2}\cdot\mathbf{x}_i+\cdots\cdots+\frac{t^k}{k!}\cdot\mathbf{C}^{*k}\cdot\mathbf{x}_i \tag{A2-12}$$

となる．(A2-4)の第3式により，$\mathbf{x}_k(t)\rightarrow\mathbf{x}(t)(k\rightarrow+\infty)$であるから

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot\mathbf{C}^{*k}\cdot\mathbf{x}_i \tag{A2-13}$$

が得られる．単変数の指数関数のテーラー展開との類似性により，多変数においても同様な数学上の記法が定義されている．

$$exp(t\cdot\mathbf{C}^*)\cdot\mathbf{x}_i=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot\mathbf{C}^{*k}\cdot\mathbf{x}_i \tag{A2-14}$$

expの中身はeの右肩に書かれることもある．(A2-14)式を導くにあたり初期時刻を0においたが，一般にこれをt_0とすれば，

$$\mathbf{x}(t)=exp((t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*)\cdot\mathbf{x}_i \tag{A2-15}$$

となる．

こうして初期値問題は解かれたが，単変数における定数変化の法を同様に適用して，入力が作用している(3-21)式のような場合の解を得ることができる．すなわち初期ベクトル$\mathbf{x}_i$が定数ではなく，時間的に変化するものと考えて，入力が作用している場合の解とみなす．この時間変化するベクトルを$\mathbf{a}(t)$とおく．従って(3-21)式の解は次式で表される．

$$\mathbf{x}(t)=exp((t-t_o)\cdot\mathbf{C}^*)\cdot\mathbf{a}(t) \tag{A2-16}$$

この両辺をtによって微分することにより次式を得る．

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{C}^{*}\cdot\mathbf{x}(t)+exp((t-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\dot{\mathbf{a}}(t) \tag{A2-17}$$

$\mathbf{X}$をn次の正方マトリクスとし，ここで用いた$d/dt(exp(t\cdot\mathbf{X}))=\mathbf{X}\cdot exp(t\cdot\mathbf{X})$のような性質は(A2-13)式において項別微分すれば得られることは明らかである．(A2-17) 式の右辺は(3-21)式の右辺と等しいから，

$$exp((t-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\dot{\mathbf{a}}(t)=\mathbf{f}^{*}(t) \tag{A2-18}$$

が成立する．$\dot{\mathbf{a}}(t)$について解けば次式となる．

$$\dot{\mathbf{a}}(t)=\left[exp((t-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\right]^{-1}\cdot\mathbf{f}^{*}(t)$$

$$=exp(-(t-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\mathbf{f}^{*}(t) \tag{A2-19}$$

ここで用いた$(exp\mathbf{X})^{-1}=exp(-\mathbf{X})$なる性質はマトリクスの指数関数の加法定理の特別な場合として導かれる．(A2-20)式の両辺を時間積分し，$\mathbf{a}(t)$について解けば次式となる．

$$\mathbf{a}(t)=\int_{t_{o}}^{t}exp(-(\tau-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\mathbf{f}^{*}(\tau)d\tau+\mathbf{b} \tag{A2-20}$$

ここに$\mathbf{b}$は積分定数ベクトルである．(A2-20)式を(A2-16)式へ代入すれば

$$\mathbf{x}(t)=exp((t-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\mathbf{b}+exp((t-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\int_{t_{o}}^{t}exp(-(\tau-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\mathbf{f}^{*}(\tau)d\tau$$

$$=exp((t-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\mathbf{b}+\int_{t_{o}}^{t}exp((t-\tau)\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\mathbf{f}^{*}(\tau)d\tau \tag{A2-21}$$

ここで再び加法定理を用いた．その2つのマトリクスは$exp(\mathbf{C}^{*})$のスカラ倍であり，交換可能であることは明らかである．$\mathbf{b}$は初期状態から決定できる．$t=t_0$において

$$exp((t-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})=exp(\mathbf{O})=\mathbf{E}\qquad(t\to t_{o})$$

であるから

$$\mathbf{b}=\mathbf{x}_{i} \tag{A2-22}$$

となる．ここに$\mathbf{E}$はn次の単位マトリクスである．

こうして次式の解式が導かれる．

$$\mathbf{x}(t)=exp((t-t_{o})\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\mathbf{x}_{i}+\int_{t_{o}}^{t}exp((t-\tau)\cdot\mathbf{C}^{*})\cdot\mathbf{f}^{*}(\tau)d\tau \tag{A2-23}$$

付録-3　熱水分同時移動の支配方程式(第3章, 3.8)

この方程式は松本[80]によって導かれたとされている．次の2つの方程式はそれぞれ，湿度の変化と温度の変化を記述している．それぞれ右辺の第2項がこの相互影響に関係する．

$$(c'\cdot\gamma'+\kappa)\cdot\frac{\partial h}{\partial t}=\lambda_h\cdot\nabla^2 h+\nu\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t} \tag{A3-1}$$

$$(c\cdot\gamma+r\cdot\nu)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}=\lambda_t\cdot\nabla^2\theta+r\cdot\kappa\cdot\frac{\partial h}{\partial t} \tag{A3-2}$$

ここで，記号は次の通りである．

h ： 固体中の空隙の絶対湿度(kg/kg')
θ ： 温度(℃)
c ： 比熱$(kcal/kg\cdot{}^\circ C)$
γ ： 密度(kg/m^3)
γ' ： 空気密度(kg/m^3)
ν ： 水蒸気放出率$(kg/m^3\cdot kg\cdot{}^\circ C/kcal)$
λ_h ： 湿気伝導率$(kg/m\cdot hr(kg/kg'))$
c' ： 空隙率(m^3/m^3)
λ_t ： 熱伝導率$(kcal/m\cdot hr\cdot{}^\circ C)$
r ： 吸着熱$(kcal/kg)$
κ ： 水蒸気吸着率$(kg/m^3(kg/kg'))$

(A3-1)式の右辺第2項は温度の上昇によって発生する水蒸気量を表す．(A3-2)式の右辺第2項は湿度の上昇によって発生する凝縮熱を表す．両式は現象の説明のために表示するものであって，最終的な数学モデルを導くために必ずしも必要となるものではない．

付録-4　検査体積法と差分法による$\mathbf{M}_c$の正の定符号の証明過程(3.8)

マトリクス$\mathbf{M}_c$には(3-135)式からわかるように負の要素も含まれる．しかし次の数学的帰納法により正の定符号が証明される．一般にn次のマトリクス$\mathbf{A}$が正の定符号であるためにはkをその次数として$det\ \mathbf{A}_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$が成り立つことが必要十分である．[78] ここに$det$は行列式をとることを表す．

まず$k=1$の場合の行列式を調べる．マトリクスの右肩の添字はnの数を表わす．

$$det\,\mathbf{M}_c^1=det\begin{vmatrix}\mathbf{M}_h^1 & -\mathbf{V}_h^1\\ -\mathbf{V}_t^1 & \mathbf{M}_t^1\end{vmatrix}=det\begin{vmatrix}(c'\cdot\gamma'+\kappa) & -\nu\\ -r\cdot\kappa & (c\cdot\gamma+r\cdot\nu)\end{vmatrix}\cdot v_1$$

$$=\left\{(c'\cdot\gamma'+\kappa)\cdot(c\gamma+r\cdot\nu)-r\cdot\kappa\cdot\nu\right\}\cdot v_1=(c'\cdot\gamma'\cdot c\cdot\gamma+c'\cdot\gamma'\cdot r\cdot\nu+\kappa\cdot c\cdot\gamma)\cdot v_1>0 \tag{A4-1}$$

次に$k=m$の場合 $det\,\mathbf{M}_c{}^m>0$が成り立つとして，$k=m+1$の場合の$det\,\mathbf{M}_c{}^{m+1}>0$ を証明する．

$$
\det \mathbf{M}_c^{m+1} = \det \left|\begin{array}{cc:cc} \mathbf{M}_h^m & \mathbf{o} & -\mathbf{V}_h^m & \mathbf{o} \\ {}^t\mathbf{o} & (c'\cdot\gamma'+\kappa)\cdot v & {}^t\mathbf{o} & -\mathrm{v}\cdot v \\ \hdashline -\mathbf{V}_t^m & \mathbf{o} & \mathbf{M}_t^m & \mathbf{o} \\ {}^t\mathbf{o} & -r\cdot\kappa\cdot v & {}^t\mathbf{o} & (c\cdot\gamma+r\cdot\mathrm{v})\cdot v \end{array}\right|
$$

ここで$m+1$列に関して行列式の展開を行う．

$$
= \det \begin{vmatrix} \mathbf{M}_h^m & -\mathbf{V}_h^m & \mathbf{o} \\ -\mathbf{V}_t^m & \mathbf{M}_t^m & \mathbf{o} \\ {}^t\mathbf{o} & {}^t\mathbf{o} & (c\cdot\gamma+r\cdot\mathrm{v})v \end{vmatrix} \cdot (c'\cdot\gamma'+\kappa)\cdot v\cdot(-1)^{2m+2}
$$

$$
+ \det \begin{vmatrix} \mathbf{M}_h^m & -\mathbf{V}_h^m & \mathbf{o} \\ {}^t\mathbf{o} & {}^t\mathbf{o} & -\mathrm{v}\cdot v \\ -\mathbf{V}_t^m & \mathbf{M}_t^m & \mathbf{o} \end{vmatrix} \cdot (-r\cdot\kappa\cdot v)\cdot(-1)^{3m+3}
$$

次に第2項の行の置換を行い${}^t0$を下にもってくる．置換の回数はm回である．従って$(-1)^m$が乗じられる．

$$
= \det \begin{vmatrix} \mathbf{M}_h^m & -\mathbf{V}_h^m & \mathbf{o} \\ -\mathbf{V}_t^m & \mathbf{M}_t^m & \mathbf{o} \\ {}^t\mathbf{o} & {}^t\mathbf{o} & (c\cdot\gamma+r\cdot\mathrm{v})v \end{vmatrix} \cdot (c'\cdot\gamma'+\kappa)\cdot v\cdot(-1)^{2m+2}
$$

$$
+ \det \begin{vmatrix} \mathbf{M}_h^m & -\mathbf{V}_h^m & \mathbf{o} \\ -\mathbf{V}_t^m & \mathbf{M}_t^m & \mathbf{o} \\ {}^t\mathbf{o} & {}^t\mathbf{o} & -\mathrm{v}\cdot v \end{vmatrix} \cdot (-r\cdot\kappa\cdot v)\cdot(-1)^{4m+3}
$$

第1項の(-1)の指数は偶数，第2項のそれは奇数である．

$$
= \det \mathbf{M}_c^m \cdot (c\cdot\gamma+r\cdot\mathrm{v})\cdot(c'\cdot\gamma'+\kappa)\cdot v^2 - \det \mathbf{M}_c^m \cdot \mathrm{v}\cdot r\cdot\kappa\cdot v^2
$$

$$
= (c'\cdot\gamma'\cdot c\cdot\gamma + c'\cdot\gamma'\cdot r\cdot\mathrm{v} + \kappa\cdot c\cdot\gamma)\cdot v^2\cdot \det \mathbf{M}_c^m \tag{A4-2}
$$

$\det \mathbf{M}_c{}^m > 0$であったから次の不等式が成り立つ．

$$
\det \mathbf{M}_c^{m+1} > 0 \tag{A4-3}
$$

以上の数学的帰納法によりマトリクス$\mathbf{M}_c$の正の定符号が示された.

付録-5　有限要素法による$\mathbf{M}_c$の正の定符号の証明過程(第3章, 3.8)

付録4の証明は検査体積法や差分法による集中定数化を前提とした. しかし有限要素法によって集中定数化した場合には$\mathbf{M}_h$, $\mathbf{M}_t$, $\mathbf{V}_h$, $\mathbf{V}_t$のマトリクスは非対角要素も含まれる対称マトリクスとなる. そこで次にこのような場合についての証明を行う. (3-132)式から$\mathbf{h}$を表し, (3-133)式に代入する. こうして時間微分については$\mathbf{t}$だけを含む方程式を得る.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{M}_t-\mathbf{V}_t\cdot\mathbf{M}_h^{-1}\cdot\mathbf{V}_h)\cdot\dot{\mathbf{t}} &= \mathbf{C}_t\cdot\mathbf{t}+\mathbf{V}_t\cdot\mathbf{M}_h^{-1}\cdot\mathbf{C}_h\cdot\mathbf{h} \\
&+\mathbf{V}_t\cdot\mathbf{M}_h^{-1}\cdot\mathbf{C}_{oh}\cdot\mathbf{h}_o+\mathbf{V}_t\cdot\mathbf{M}_h^{-1}\cdot\mathbf{g}_h+\mathbf{C}_{ot}\cdot\mathbf{t}_o+\mathbf{g}_t
\end{aligned}
\tag{A5-1}
$$

そこでこの方程式を$\mathbf{t}$に関する推移を表すものとみなせば, 左辺の$\dot{\mathbf{t}}$にかかるマトリクスの正の定符号と, 右辺第1項の$\mathbf{t}$にかかるマトリクス$\mathbf{C}_t$の負の定符号を示せる. $\mathbf{C}_t$は温度だけの拡散系におけるコンダクタンスマトリクスと全く同じであるから付録1の証明過程により, 負の定符号が示される. 次に$\mathbf{t}$にかかるマトリクスの正の定符号を示す. マトリクス$\mathbf{M}_t$, $\mathbf{V}_t$, $\mathbf{M}_h$と$\mathbf{V}_h$はいずれも(2-73)式と同様な式によって計算される. まず,

$$
\mathbf{M}_{th}=\mathbf{M}_t-\mathbf{V}_t\cdot\mathbf{M}_h^{-1}\cdot\mathbf{V}_h \tag{A5-2}
$$

とおく. 有限要素が全部でne個から構成されるとすれば, そのうちのj番要素によって出来る全体マトリクスを$\mathbf{M}_{thj}$として

$$
\mathbf{M}_{th}=\mathbf{M}_{th1}+\mathbf{M}_{th2}+\cdots\cdots+\mathbf{M}_{thne} \tag{A5-3}
$$

である. 従って, $\mathbf{M}_{th}$による任意のベクトル$\mathbf{p}$の2次形式が正であることは, 全ての$\mathbf{M}_{thj}$について, これらのマトリクスによる$\mathbf{p}$の2次形式が正であることと同値である. 1つの要素がnp個の節点で構成されるとする. 従って, 任意のj番要素における(2-73)式と同様な要素領域積分によって出来上がるマトリクスは$np\times np$の大きさを持つ. この要素は$\mathbf{M}_{thj}$の中に散らばり, 他の$\mathbf{M}_{thj}$の要素は全て0である. ここでこれらの非0要素に対応する$\mathbf{p}$の部分ベクトルを$\mathbf{p}_e$とする. また, この$np\times np$のマトリクスを$\mathbf{M}_{the}$のように表す. 同様にして$\mathbf{M}_t$のそれを$\mathbf{M}_{te}$とすれば,

$$
\mathbf{M}_{te}=\int_{v_{ej}}(c\cdot\gamma+r\cdot\mathrm{v})\cdot{}^t\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{W}_j\,dv \tag{A5-4}
$$

である. マトリクス$\mathbf{V}_t$, $\mathbf{M}_h$と$\mathbf{V}_h$についても同様な定義をする. ここで各種の物性値が関係しない$\mathbf{V}_{te}$, $\mathbf{M}_{he}$と$\mathbf{V}_{he}$にも共通な次のマトリクスを定義する.

$$
\mathbf{B}_e=\int_{v_{ej}}{}^t\mathbf{W}_j\cdot\mathbf{W}_j\,dv \tag{A5-5}
$$

すると,

$$\mathbf{M}_{te}=(c\cdot\gamma+r\cdot\nu)\cdot\mathbf{B}_{e} \tag{A5-6}$$

のように記述できる．$\mathbf{V}_{te}$, $\mathbf{M}_{he}$, と$\mathbf{V}_{he}$も$\mathbf{B}_e$に乗じられる物性値は異なっていても(A5-6)式と同様に記述できる．$\mathbf{B}_e$については付録1での(A1-1), (A1-2)式と同様にして正の定符号が証明される．(A5-2)式に対応する$\mathbf{M}_{the}$を$\mathbf{B}_e$を用いて記述する．

$$\mathbf{M}_{the}=\mathbf{M}_{te}-\mathbf{V}_{te}\cdot\mathbf{M}_{he}^{-1}\cdot\mathbf{V}_{he}$$

$$=(c\cdot\gamma+r\cdot\nu)\cdot\mathbf{B}_{e}-r\cdot\kappa\cdot\mathbf{B}_{e}\cdot(c'\cdot\gamma'+\kappa)^{-1}\cdot\mathbf{B}_{e}^{-1}\cdot\nu\cdot\mathbf{B}_{e}$$

$$=\frac{(c\cdot\gamma\cdot c'\cdot\gamma'+c\cdot\gamma\cdot\kappa+c'\cdot\gamma'\cdot r\cdot\nu)}{(c'\cdot\gamma'+\kappa)}\cdot\mathbf{B}_{e} \tag{A5-7}$$

$\mathbf{B}_e$は正の定符号だから

$${}^{t}\mathbf{p}_{e}\cdot\mathbf{M}_{the}\cdot\mathbf{p}_{e}=\frac{(c\cdot\gamma\cdot c'\cdot\gamma'+c\cdot\gamma\cdot\kappa+c'\cdot\gamma'\cdot r\cdot\nu)}{(c'\cdot\gamma'+\kappa)}\cdot{}^{t}\mathbf{p}_{e}\cdot\mathbf{B}_{e}\cdot\mathbf{p}_{e}>0 \tag{A5-8}$$

が示される．従って全体の$\mathbf{M}_{th}$も正の定符号であることが示された．

付録-6　y, D, X, Gの構成アルゴリズム(第6章, 6.1.1)

(a) $\mathbf{y}(\dot{x}_i, x_i, g_i)$：もし$m_{ij}$が既知パラメータであれば，$i$番要素には$m_{ij}\cdot\dot{x}_j$を加える．もし$c_{ij}$が既知パラメータであれば$i$番要素には$-c_{ij}\cdot x_j$を加え，かつ$j$番素に$c_{ij}\cdot x_j$を加える．ただし，この$i$または$j$が$n$よりも大きいときは除外する．またもし$r_{ij}$が既知パラメータであれば$i$番要素には$-r_{ij}\cdot g_j$を加える．ここに「加える」とは，最初$\mathbf{y}=0$にセットした後に次々と加えていくことを意味する．

(b) $\mathbf{D}(\dot{x}_i)$：$\mathbf{m}$内のk番要素がm_{ij}とする．これに対し$\mathbf{D}$内のi行k列へは$-\dot{x}_j$が入る．

(c) $\mathbf{X}(x_i)$：$\mathbf{c}$内のk番要素がc_{ij}とする．これに対し$\mathbf{X}$内のi行k列へはx_jが，かつj行k列へは$-x_j$が入る．ただし，このiまたはjがnより大きいときは除外する．

(d) $\mathbf{G}(g_i)$：$\mathbf{r}$内のk番要素がr_{ij}とする．これに対し$\mathbf{G}$内のi行k列へはg_jが入る．

付録-7　可同定性の必要十分条件の証明過程(第6章, 6.1.4)

まず(6-39)式で示す$\mathbf{A}o$は明らかに正定値対称である．従ってその逆行列もそうであり，(6-40)式から$\mathbf{W}_j$もそうである．正定値対称行列はその必要十分条件として，全て正の固有値を持つことがわかっているから，その1つをβ_iとし，対応する射影子を$\mathbf{Q}_i(na\times na)$とすれば，$\mathbf{A}_k{}^{-1}$は次のように展開できる．

$$\mathbf{A}_{k}^{-1}=\sum_{i=1}^{n_a}\beta_{i}\cdot\mathbf{Q}_{i} \tag{A7-1}$$

さらに，ある逆行列の固有値はもとの行列の固有値の逆数に等しいから，$\mathbf{A}_k$は次のようになる．

$$\mathbf{A}_k=\sum_{i=1}^{n_a}\frac{1}{\beta_i}\cdot\mathbf{Q}_i \tag{A7-2}$$

いま$\mathbf{q}_i$を$\mathbf{A}_k{}^{-1}$に対して最小固有値$\beta_{i,min}$を与える固有ベクトルとする．$\mathbf{q}_i$は長さが**1**になるように正規化されていると仮定しても一般的は失われない．そこで次式が成り立つ．

$$^t\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{A}_k^{-1}\cdot\mathbf{q}_i=\beta_{i,min}\cdot{}^t\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_i=\beta_{i,min} \tag{A7-3}$$

さらにkから$k+1$に観測値が増えたとして，$\mathbf{A}^{-1}{}_{k+1}$に対して，同様に，最小固有値$\beta'_{i,min}$を与える固有ベクトルを$\mathbf{q}_i$とすれば，次の不等式が成立する．

$$\beta'_{i,min}={}^t\mathbf{q}'_i\cdot\mathbf{A}_{k+1}^{-1}\cdot\mathbf{q}'_i={}^t\mathbf{q}'_i\cdot\mathbf{A}_k^{-1}\cdot\mathbf{q}'_i+{}^t\mathbf{q}'_i\cdot{}^t\mathbf{Z}_{k+1}\cdot\mathbf{W}_{k+1}\cdot\mathbf{Z}_{k+1}\cdot\mathbf{q}'_i$$

$$\geqq{}^t\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{A}_k^{-1}\cdot\mathbf{q}_i+{}^t\mathbf{q}'_i\cdot{}^t\mathbf{Z}_{k+1}\cdot\mathbf{W}_{k+1}\cdot\mathbf{Z}_{k+1}\cdot\mathbf{q}'_i$$

$$\therefore\quad\beta'_{i,min}\geq\beta_{i,min}+{}^t\mathbf{q}'_i\cdot{}^t\mathbf{Z}_{k+1}\cdot\mathbf{W}_{k+1}\cdot\mathbf{Z}_{k+1}\cdot\mathbf{q}'_i \tag{A7-4}$$

ここで$\mathbf{A}_k{}^{-1}$については，最小固有値を与えるベクトル$\mathbf{q}_i$以外のいかなるベクトルによっても，その固有値は$\beta_{i,min}$よりは小さくならないことを用いた.[78] (A7-4)式の最終式の第2項は全観測期間通しても，ある正の下限値ε_βを持つとみなせる．ゆえにkの増加とともに$\mathbf{A}_k{}^{-1}$の最小固有値$\beta_{i,min}$は少なくともε_β以上ずつ増加していく．そこで(A7-2)式により，$k\to\infty$のとき$\mathbf{A}_k\to[0]$が示された．すなわち(6-59)式を考慮すれば，同時に$\mathbf{a}_k\to\mathbf{a}_s$となることが証明されたことになる．

本研究に関する筆者の発表論文

<審査論文>

1. 奥山博康, 木村建一 :『建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間数値積分公式』, 日本建築学会論文報告集, Vol.269, 1978年7月, P.127
2. 奥山博康 :『一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論』, 日本建築学会論文報告集, Vol.344, 1984年10月, P.103

<その他の発表および報告>

3. 木村建一, 奥山博康 :『熱回路網数値解析法による自然空調に関する研究』, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1976年10月, P.333
4. 奥山博康 :『熱回路網数値解析法による自然空調に関する研究(その2)』, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1977年10月, P.421
5. 奥山博康, 森野仁夫 :『熱回路網モデルによる室温変動のシミュレーションと実測値の比較』, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1979年9月, P.595
6. 奥山博康, 森野仁夫 :『熱回路網数値解析法による熱空調負荷計算プログラム-LOAD1』, 清水建設研究所報, 第31号, 1979年10月, P.119
7. 奥山博康 :『蓄熱槽の数値解析』, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1981年9月, P.433
8. 奥山博康 :『熱水分同時移動の解析法について』, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1982年10月, P.761
9. 奥山博康 :『空調システムシミュレーションの理論とアルゴリズム』, 空気調和衛生工学会学術論文集, 1982年10月, P.461
10. 奥山博康 :『熱湿気回路網によるシミュレーションの理論』, 空気調和衛生工学会学術論文集, 1982年10月, P.457
11. 奥山博康 :『一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論』, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1983年9月, P.511
12. 奥山博康 :『換気回路網によるシミュレーションの理論と応用』, 空気調和衛生工学会学術論文集, 1983年10月, P.545
13. 奥山博康 :『熱回路網によるシミュレーションの理論と応用』, 空気調和衛生工学会学術論文集, 1983年10月, P.541
14. 奥山博康 :『一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論(その2 : 有限要素法によるシステムパラメーターの逆探問題への適用)』, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1984年10月, P.657
15. 奥山博康, 藤井晴行 :『回路網モデルによる建築環境シミュレーションプログラムの開発(その1 : プログラム体系と適用事例)』, 空気調和衛生工学会学術論文集, 1985年9月, P.213
16. 奥山博康 : 一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論(その3 : 多数室換気測定システムの適用)』, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1985年10月, P.409
17. Hiroyasu Okuyama, : "State Space Approach to Building Environmental Analysis Using Thermal Network Concepts" Shimizu Tech. Res. Bull. No.4. (Mar.1985) P.45

18. 奥山博康 :『一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論(その4 : 建物の熱的性能の現場測定法への適用)』, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1986年8月, P.723
19. 奥山博康 :『熱回路網の概念による各種の集中定数化法の統一』, 空気調和衛生工学会学術論文集, 1986年10月, P.277
20. 奥山博康 :『熱と換気の回路網数値解析』, 日本建築学会·第17回熱シンポジウム·テキスト『大空間建築の熱環境設計』, 1987年8月, P.77
21. 奥山博康, 益子智久 :『回路網モデルによる建築環境シミュレーションプログラムの開発(その4)倉庫の自然室温に関する適用事例』, 空気調和衛生工学会学術講演論文集, 1988年9月, p.465
22. 奥山博康 :『熱回路網モデルの数学的精度に関する数値実験』, 空気調和衛生工学会学術講演論文集, 1988年9月, p.469

謝辞

この研究はコンピューター利用の理論的な研究であるが，かつて著者が早稲田大学で卒論の時に木村建一先生のテーマを選んだのは太陽熱利用の実験的研究であった．ところが先生は理論面の研究の第一人者でもおられ，一方著者自身は大学入学当時は物理学科に入ったこともあり，しだいに理論的研究へ方向を転換していったことは自然のなりゆきであったように思う．こうしたいわば建築物理の諸原理は先生の授業を通して，あるいはまた先生の著書によって修得できた．

さらに著者が修士課程にいた当時，工学院大学助教授の宇田川光弘先生が博士課程でいらした．宇田川先生からも教えていただいたことは多い．その中で最初で印象も深かかったのは平板式の太陽熱集熱器のコンピューターシミュレーション法であった．そこには大部分の伝熱現象が集約されており，また連立熱平衡式の解法という最も基本的な概念も含まれていた．計算でこのような複雑な現象が予測できるというのは当時の著者にとって驚異であったことを覚えている．

そしてこの方法とは異なるが，本研究の熱回路網のモデル化の概念もこの集熱器の問題をきっかけとして得られた．この最初の発想は木村先生がご提供下さった貴重な文献[71)]から得られた．つまり今日までの本研究の根幹となる考えは木村研究室で出来上がった．

さらに，この着想を育てていけるような場が清水建設技術研究所において与えられたことについては，前研究所所長･鳥田専右博士および現技術研究所所長･太田利彦博士，さらに前環境研究部主席･宮路栄二博士に感謝します．

本研究の熱回路網の基本思想はシステム理論によって大きく影響を受けている．システム理論は制御工学において多く適用されている．一方，清水建設では著者の入社時すでに建築設備のコンピューターコントロールの研究と開発が盛んであった．従って研究所において著者の周りにもこの参考文献[77)]がいくつかあり，目にする機会も多かった．一見，抽象的な状態空間法の基礎式も著者にとっては具体的に理解できるものであったことは言うまでもない．こうした事情がその理論に啓蒙されるきっかけになったことは幸運でもあったといえる．

熱回路網の数学的な展開にあたっては研究所での同僚であった清川哲志博士との有意義な討論が大きな励みになった．また数学界の第一人者である清水達雄博士が当研究所におられ，いくつかの重要な御指導を得られたことも幸運であり感謝します．

一方，換気回路網については理論的な興味からではなく社内外の実務的な要請から発展した背景がある．これは数えきれないぐらいの社内の依頼業務に適用することによってはじめて磨かれてきたものである．もし，このようにたくさんの計算を行う機会がなかったら，普通のニュートンラプソン法では，この換気の非線形問題を解けない場合があることに気付かなかったであろう．そして本研究の修正ニュートンラプソン法を考え出すこともなかったであろう．従って著者がこのような環境におかれたことには，むしろ感謝しなければならない．しかし，とにかく熱の移動の形態の一つに空気の流れによるものは無視できず，熱回路網の計算のためにも必要不可欠な研究であった．

熱回路網モデルの同定理論については，たった1つの基本事項の理解がその展開の糸口になった．それはベクトルによる微分法である．この公式をマトリックスの要素ごとに書き出すことによって，納得できるものとなった．この理解の後ではむしろ，重回帰分析についての多くの教科書や，そもそもきかっけとなった参考文献[70]の定式化法はもっと改良できると思えるまでに至った．

この同定理論を用いた実際の多数室換気測定システムの製作については，日本原子力研究所·大洗研究所の国分守信管理部次長をはじめとし，同じく東海研究所·保健物理部·放射線管理第1課の村田幹生副主任研究員および加藤正平副主任研究員の方々からの隙間風についての受託調査が大きな動機となって実現することができた．特に実測データ[84,85]の当論文への使用を認めて下さったことには感謝します．

本論文をまとめるにあたり木村建一教授はもちろん，おなじく早稲田大学の井上宇市教授，尾島俊雄教授からは重要な御指導を受けました．また制御工学の専門的な御立場からは内田健康教授の親切な御指導をいただき，いくつかの誤りを正すことができました．また東京都立大学助教授·石野久彌博士からは率直な御意見と御指導をいただきました．さらに当技術研究所副所長·丸一俊雄博士からは論文の構成についての御指摘をいただきました．

またもちろん日頃の著者の職場において太田所長をはじめとして小林昌弘主任や多くの方々に論文執筆に良好な環境をつくっていただいたばかりではなく，著者の研究成果の社内的な展開に御助力いただきました．

さらに社内だけでなく社外の大学の諸先輩，あるいは後輩である武蔵工業大学講師·宿谷昌則博士や早稲田大学·木村研助手·田辺新一先生にはいろいろと相談にのっていただきました．

以上の方々ばかりではなく，文献を通して間接的にお世話になった多くの研究者の方々に，ここに記して謝意を表します．

1987年12月

奥山　博康