

熱回路網の原高次状態方程式モデルのシステムパラメータ同定を  
状態変数の高階微分による低次化方程式システムの観測から行う理論への展開  
**Development of a Thermal Network Model System Parameter Identification Theory for  
Original Higher Order State Equation by using Observations of Lower Order Equation System  
with Higher Temporal Differentiated State Variables**

正会員 奥山 博康 (清水建設)  
Hiroyasu OKUYAMA, Shimizu Corporation

**Synopsis:** The earlier thermal network system identification theory required observed values for every node in the model, which sometimes makes it difficult to get a model with sufficient nodes for tracing actual phenomena. States inside walls, and, in the case of ventilation measurement, states of ceiling or attic spaces, are frequently unobservable. Mathematically it becomes a problem of system parameter identification when only some variables can be observed out of an original higher order state equation model. This paper offers a solution by introducing a higher differentiation of the variables, and verifies this theory with a computational experiment as a simple example.

## 1. はじめに

既報 ([1], [2]他)の一般的拡散系のシステム同定理論では, その節点系モデルの全ての節点に励振を与え, 状態値が観測できるものとしたが, 困難な場合がある. 例えば, 多数室換気測定では天井裏空間や押入れ等はシステム同定精度への影響の程度や存在さえ分からないことがある. また建物の熱性能測定では, 熱容量の大きい壁がある場合, 壁内に発熱を与え温度測定も行うことは難しい. このことを数学モデルの観点から考えれば, 元の比較的沢山の節点で高次な連立常微分方程式モデルと等価でありながらも, より数少ない状態観測可能節点で低次なモデルに置き換え, こちらのモデルでの励振・応答の観測から元のシステムの同定を行う問題と見なされる. 本論では問題解決の基本的アイデアを述べ, 最も簡単な具体的事例で説明し検証した.

## 2. 既報のシステム同定プログラムの整備

既報の理論自体は 既に汎用性を持つものであったが, 専らの適用対象が多数室換気測定であったため, 伝熱系への適用やシステム同定誤差評価を含めた計算プログラムの包括的整備開発が不十分であった. これらの整備は, 当初なかった非負最小二乗法の導入も含めた. こうした整備を説明すれば次のようになる.

図1に示すのは屋根裏と居室の2ゾーンの伝熱モデルである. もし図の様に機械排気されていれば, 気流は一方通行的となり, 伝熱素子としてはダイオード記号で表す一般化熱コンダクタンスが顕在化する. これを移流による拡散とも呼ぶ. 一方, 各ゾーンは壁体貫流により外気とつながり, これは抵抗状の記号で表す両方向性の一般化熱コンダクタンスと見なされる. 貫流は伝導と表面伝達から構成される. 既報の多数室換気測定でのガス拡散系は移流だけによるモデルであったが, 伝熱系では混在系となる.

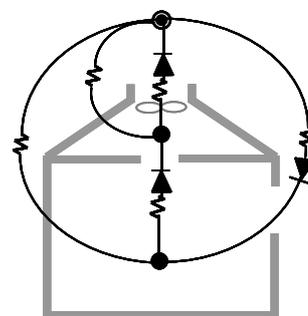


図1 伝導・伝達・移流の混在拡散系

伝導, 表面伝達や貫流を表す一般化熱コンダクタンスは対称性を持つと言える. 一方, 2 節点間の移流による一般化熱コンダクタンスが両方向同じ流量であれば, すなわち対称性があれば, 伝導, 伝達や貫流と結局同じとなる. これらの条件を任意に付与できるものとした.

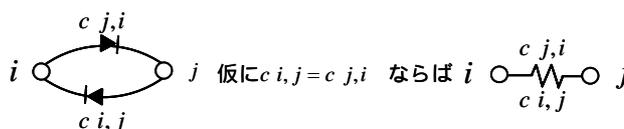


図2 一般化コンダクタンスの対称・非対称性

また次の三種類のシステムパラメータは非負の性質を持つので, 測定誤差によって負で同定されたりしないように, 非負の拘束条件を考慮できるようにした.

一般化コンダクタンス:  $c_{i,j} \geq 0$

一般化容量:  $m_{i,j} \geq 0$

一般化自由入力係数:  $r_{i,j} \geq 0$

さらにシステム同定結果の精度評価のために, 図3に示すように, 同定されたパラメータの分散・共分散や決定係数も評価できるようにした.

	$\Delta m_{i,j}$	$\Delta c_{i,j}$	$\Delta r_{i,j}$	
$\Delta m_{i,j}$		×	×	×
$\Delta c_{i,j}$	×		×	×
$\Delta r_{i,j}$	×	×		×

$\Delta c_{i,j} = (\text{推定値} - \text{真値})$

誤差分散  
× 誤差共分散

COD (決定係数)  
重回帰分析のものを  
拡張して定義

図3 分散共分散マトリックスと誤差評価指標

ただし以上の整備に関する説明は、本論での拡張を述べるにあたっての既往の研究開発の整理である。

3. 本論の理論拡張の意味

既報のシステム同定理論では状態観測可能な節点だけで同定モデルが構成されていなければならない。次表 1 の上段には伝熱拡散系を、下段には換気測定等におけるガスの拡散系をイメージし、左には節点数が不足して実現象の変動を説明するには不十分なモデルを、右には状態観測が困難な節点を持つが比較的に実現象を良好に表現できるモデルを描いた。例えば壁内の節点は温度測定等は難しく、ガス拡散系では屋根裏等の濃度測定は難しい。しかしこれらの熱容量や空間容積を考慮しなければ実現象の変動に良好に合わない。従って望ましいのはこれらの幾つかの節点は状態観測しなくても、これらに関する一般化容量やコンダクタンスも同定できることであり、本論はこのための方法を述べたものである。

表 1 状態観測困難でも現象説明には必要な節点

	状態観測可能な節点だけで現象説明が良くないモデル	状態観測困難な節点があるが現象説明の良いモデル
伝導・貫流の拡散系		
移流の拡散系		

空気調和・衛生工学会大会学術講演論文集 [2004. 9. 8 ~ 10 (名古屋)]

4. 基本的アイデア

元の高次な連立常微分方程式モデルを状態方程式モデルと呼ぶ。この状態ベクトルを、励振・観測が可能なものを  $x_1$  に、その他の不可能なものを  $x_2$  に分ける。すると状態方程式は (1) 式に示すように記述される。ここで  $\dot{x}_1$  に関する式を取り出して両辺時間微分し 2 次微分を持つ式と、 $x_2$  に関する式を取り出し、両式から  $x_2$  を消去した (2) 式を記述することができる。低次化システムのパラメータは元の状態方程式のパラメータと関係式を持つ。既報のシステム同定理論を (2) 式をその観測方程式として適用し、この (2) 式のパラメータ同定が成されれば、元 (1) 式のパラメータも求められる。

基本的アイデア

元の1階微分の高次システム(状態方程式モデル)の状態ベクトルのうち、観測可能なものを  $x_1$  に、そうでないものを  $x_2$  に分けて記述する

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{01} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot x_0 + \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot g \quad (1)$$

状態と入力値の高階微分を導入し、演繹的変形により  $x_2$  は消去し、次式の低次化2階微分システムを記述する

$$M_{1,1} \cdot \ddot{x}_1 = D_1 \cdot \dot{x}_1 + D_0 \cdot x_1 + E_1 \cdot \dot{x}_0 + F_1 \cdot \dot{g} + E_0 \cdot x_0 + F_0 \cdot g \quad (2)$$

低次化システムの状態と入力値の観測により、低次化システムパラメータの同定を行い、同時に元の状態方程式モデルのシステムパラメータを求める

5. 簡単な例題での理論の説明

最も簡単で具体的な事例で説明と検証を行う。図 4 に示すように押入れを持ち周囲が外気の居室を想定する。空間容積や風量等の記号は図中に示す。この 2 室モデルの元の状態方程式は (3) 式で記述され、本問題設定により押入れはガス供給も濃度観測も不可能とする。

$$\begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{1,3} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_3 + \begin{bmatrix} r_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot g_1 \quad (3)$$

ここにコンダクタンスマトリックス対角要素は、

$$q_{1,1} = -q_{2,1} - q_{3,1} \quad (4)$$

$$q_{2,2} = -q_{1,2} \quad (5)$$

である。(3) の上半分から次式を記述する。

$$x_2 = q_{1,2}^{-1} \cdot (v_1 \cdot \dot{x}_1 - q_{1,1} \cdot x_1 - q_{1,3} \cdot x_3 - r_{1,1} \cdot g_1) \quad (6)$$

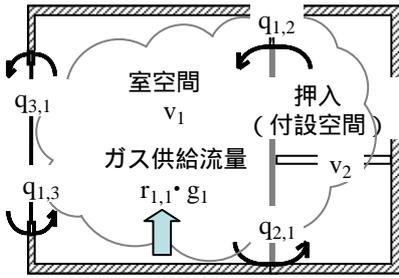


図4 押入れを持つ居室の簡単な事例

$v_1$ と $v_2$ のガス濃度は $x_1$ と $x_2$ 、外気濃度は $x_3$ であり、 $r_{1,1}$ は供給ガス流量 $g_1$ からガス濃度流量への換算係数

一方、(3)の下半分の式へ(6)式を代入する。

$$\dot{x}_2 = v_2^{-1} \cdot q_{2,1} \cdot x_1 + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,2}^{-1} \cdot (v_1 \cdot \dot{x}_1 - q_{1,1} \cdot x_1 - q_{1,3} \cdot x_3 - r_{1,1} \cdot g_1) \quad (7)$$

これら(6)と(7)式で $x_2$ もこの微分も $x_1$ で表された。次に(3)式の上半分の両辺を時間微分し2次微分が含まれる式に(7)式を代入して $x_2$ を消去し $x_1$ に関して整理する。

$$v_1 \cdot \ddot{x}_1 = (q_{1,1} + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot v_1) \cdot \dot{x}_1 + (v_2^{-1} \cdot q_{1,2} \cdot q_{2,1} - v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,1}) \cdot x_1 - v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,3} \cdot x_3 + q_{1,3} \cdot \dot{x}_3 - v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot r_{1,1} \cdot g_1 + r_{1,1} \cdot \dot{g}_1 \quad (8)$$

次に(8)式を既知パラメータと可観測量だけで構成される項は左辺に移動して観測方程式とする。この際に元システムのパラメータが幾つか組み合わせられて形成される状態値や入力値への係数は、それぞれまとめて $d_i$ なる記号で表示する。

$$r_{1,1} \cdot \dot{g}_1 = v_1 \cdot \ddot{x}_1 - q_{1,1} + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot v_1 \cdot \dot{x}_1 - (v_2^{-1} \cdot q_{1,2} \cdot q_{2,1} - v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,1}) \cdot x_1 + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,3} \cdot x_3 - q_{1,3} \cdot \dot{x}_3 + v_2^{-1} \cdot q_{2,2} \cdot r_{1,1} \cdot g_1 \cong d_1 \cdot \ddot{x}_1 + d_2 \cdot \dot{x}_1 + d_3 \cdot x_1 + d_4 \cdot (-g_1) \quad (9)$$

ここに $q_{2,2}$ は負であるが $d_i$ は全て正になるように、(9)式右辺の第4項のガス供給流量 $g_1$ には負号を付けた。もし $g_1$ がmg/sでガス濃度がmg/m<sup>3</sup>で風量がm<sup>3</sup>/sならば $r_{1,1}$ は1で既知である。(9)に最小二乗法を適用して $d_i$ が求められれば元パラメータは次式で計算される。

$$v_1 = d_1 \quad (10)$$

$$q_{1,3} = q_{3,1} = (d_4^{-1} \cdot r_{1,1}) \cdot d_3 \quad (11)$$

$$v_2 = -d_1 + (d_4^{-1} \cdot r_{1,1}) \cdot d_2 - (d_4^{-1} \cdot r_{1,1}) \cdot (d_4^{-1} \cdot r_{1,1}) \cdot d_3 \quad (12)$$

$$q_{2,1} = q_{1,2} = -(d_4^{-1} \cdot r_{1,1}) \cdot d_1 + d_2 - (d_4^{-1} \cdot r_{1,1}) \cdot d_3 \quad (13)$$

ここで(9)の方程式誤差の期間積分を最小二乗の評価関数とする。この期間を $t$ で $nt$ 区間に分割し $(k-1)t$ から $k$  $t$ までの積分は次式で記述される。

$$r_{1,1} \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{g}_1 dt = d_1 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \ddot{x}_1 dt + d_2 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{x}_1 dt + d_3 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x_1 dt + d_4 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} (-g_1) dt \quad (14)$$

この(14)式の各項の積分は次式で定義し計算する。

$$y_k = r_{1,1} \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{g}_1 dt = r_{1,1} (g_1(k\Delta t) - g_1((k-1)\Delta t)) \quad (15)$$

$$1z_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \ddot{x}_1 dt = \dot{x}_1(k\Delta t) - \dot{x}_1((k-1)\Delta t) \cong (x_1((k+1)\Delta t) - x_1((k-1)\Delta t) - x_1(k\Delta t) + x_1((k-2)\Delta t)) / (2\Delta t) \quad (16)$$

$$2z_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{x}_1 dt = x_1(k\Delta t) - x_1((k-1)\Delta t) \quad (17)$$

$$3z_k \cong \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x_1 dt = (x_1(k\Delta t) + x_1((k-1)\Delta t)) \Delta t / 2 \quad (18)$$

$$4z_k \cong \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} -g_1 dt = -(g_1(k\Delta t) + g_1((k-1)\Delta t)) \Delta t / 2 \quad (19)$$

さらに低次化システムのパラメータ $d_i$ と $z_k$ によるベクトルとマトリックスを次の(20)、(21)式で定義する。

$$\mathbf{a}^T = (d_1, d_2, d_3, d_4) \quad (20)$$

$$\mathbf{Z}_k = [z_{k,1} \ z_{k,2} \ z_{k,3} \ z_{k,4} \ z_k] \quad (21)$$

この時、(9)式は(22)式で、方程式誤差 $e_k$ は(23)式で、そして観測期間の誤差積分の二次形式評価関数は(24)式で表される。

この $J$ を $\mathbf{a}$ で微分し $\mathbf{0}$ において、低次化システムのパラメータが求められる。そして前述した様に(10)から(13)式で元システムのパラメータが求められる。

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \quad (22)$$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \quad (23)$$

$$J = \sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{nt} {}^t (\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \quad (24)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{k=1}^{nt} (-{}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{y}_k - {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{y}_k + 2 \cdot {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \quad (25)$$

$$\mathbf{a} = \left( \sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{k=1}^{nt} {}^t \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{y}_k \right) \quad (26)$$

6. 計算機実験による検討

励振の与え方がまず問題になる。(9)式左辺から、ガス供給の時間微分が変化することが必要であるから、矩形波的なガス供給は適当ではない。そこで正弦波的な励振を幾つか試した。表2に示す単一周波数の励振と、二種の周波数の合成励振の二通りを試みた。模擬観測値生成のシミュレーションは10秒間隔で24時間分を行い、後者の複数周波数の合成励振に関しては図5の様な濃度の応答を得た。一方システム同定のための t は30秒をとり、用いた観測期間は12時から16時までの4時間分で、 $x_1$  と  $g_1$  に関する変化量を用いた。元のシステムパラメータの同定結果を、正解値とともに、単一周波数励振の場合(a)と、複数周波数合成励振(a)+(b)の場合の二つを比較して表3に示す。やはり変化に富む(a)+(b)の励振の方が比較的に良い結果を与えている。

7. 理論の一般化の問題

本論での簡単な例題では、低次化システムと元システムの同定パラメータの関係は、スカラーで陽的な関係式を持つが、より多くの節点から成る一般の問題では、マトリックスで陰伏的な関係となり、非線形方程式問題になる可能性がある。また本例題では2階微分までを導入しただけで1つの節点に関する1本の方程式になったが、一般に元の状態方程式がより高次のn次であっても、1つの状態変数のn階微分変数を導入することで、一本の方程式に帰着することも理想的には可能である。例えば室温変化の観測値から、このn階微分値までを有意な精度で引き出すことができれば、室温だけの測定からn次状態方程式モデルを同定することも可能かもしれない。しかし実際上の諸々の測定誤差や、対象系自体が多少は時間変化することも考えれば、有意な微分階数には限界があるだろう。例えばガス濃度観測による換気測定では、測定時間間隔は最小でも数十秒要するから、2次微分程度が限界と思われる。さらに状態変数の高階微分導入に

よって消去した状態変数(節点)は外界から直接的に力を受けない前提を設けたが、必要十分の制約か数学的な検討を要する。

表2 ガス供給の二種の励振

ガス供給の励振=正弦波1+正弦波2 (mg/sec)	
(a): 正弦波1	$0.0085 \cdot \sin(2 \cdot k \cdot t/7200) + 0.0085$
(b): 正弦波2	$0.0085 \cdot \sin(2 \cdot k \cdot t/18000) + 0.0085$

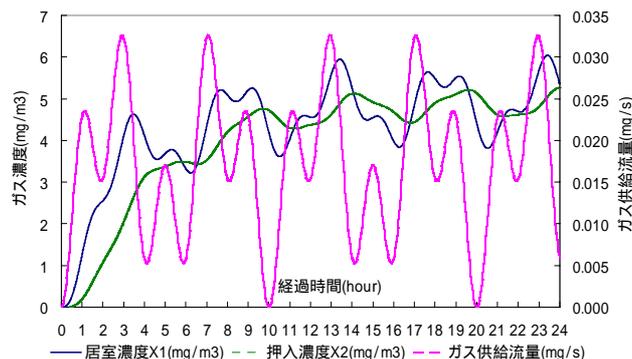


図5 ガス供給と濃度変化の模擬観測値

表3 システム同定結果の精度比較

	$V_1$ (liter)	$V_2$ (liter)	$q_{1,2}=q_{2,1}$ (liter/s)	$q_{1,3}=q_{3,1}$ (liter/s)
正解	25000	12500	2.084	3.472
(a)+(b)	24955	12443	2.162	3.477
(a)だけ	24617	7779	2.347	3.485

8. まとめ

拡散系の空間的離散化モデルは熱回路網の状態方程式モデルで表されるが、この全ての節点の状態変数が観測可能とは限らない。そこで観測が困難な節点に関するシステムパラメータも含めて同定するための基本的着想を示した。これは状態変数の高階微分値を導入することで低次化システムを作り、このシステム同定から元の状態方程式のパラメータを同定するものである。さらに本理論を簡単な例題で検証し、適切な励振や、理論の一般化の問題についても検討した。

【謝辞】

同僚の大西由哲氏, NICの益子智久氏の協力を得ました。

【参考文献】

[1] 奥山博康「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメータの同定理論」, 日本建築学会論文報告集, Vol1. 344, 1984年10月, pp103-115  
 [2] 奥山博康「換気を含めた熱性能指標の推定」, 日本建築学会環境工学委員会, 熱環境小委員会伝熱WG熱性能評価SWG, シボジウム, 建物の熱性能とその評価, 2003年3月, pp33-40