

平衡含水率曲線の工学的な数学モデル A Mathematical Engineering Model for Equilibrium Moisture Content Curve

正 会 員 奥 山 博 康 (清水建設)

Hiroyasu OKUYAMA Shimizu corporation

Synopsis : Water vapor's absorptivity κ and its emissivity ν , which are necessary for the simultaneous transfer of heat and moisture computer simulation, can be derived from the equilibrium moisture content curve through differentiation by absolute humidity and temperature, respectively. The curve can be obtained either by the desiccator method or the artificial climate chamber method. The usual curve functions have fewer theoretical bases, so in the present paper, a more theoretical, mathematical model that remains simple with practical applications is proposed. The method of using the least squares to decide the three parameters contained in the model based upon experimental data is demonstrated through the investigation of several trial calculations.

1. はじめに

熱と水分の同時移動計算の中で必要になる絶対湿度変化に対する水蒸気吸着率 κ (kg/m³(kg/kg))と温度変化に対する水蒸気放出率 ν (kg/m³K)を算出するために平衡含水率 w (kg/m³)の曲線の関数が必要になってくる。 κ は w を材料中の絶対湿度で微分したもの³⁾で、 ν は w を温度で微分したもの³⁾で定義されている。平衡含水率曲線²⁾は試験体を何通りもの長時間一定の相対湿度に曝した後に重量変化を測定して得られる実験的な曲線である。

熱回路網モデルを拡張した熱・水分同時移動モデル⁶⁾では κ と ν は一定値で扱ってきたので、湿度や温度によって変化する様に改良することにした。このための平衡含水率 w の式は与える係数の個数が少ないことが入力データの簡便さから有利である。

既に w の式の形は幾つか提案¹⁾²⁾³⁾されているが、数式の構造は曲線の形に近くするための冪級数や有理関数や対数関数を組み合わせたものであり、その理論的な裏付けを持つものは少ない様である。

建築材料中の水分移動と吸放湿は、様々な移動形態と相変化によって起こるので複雑であり、これらの現象を微視的で分析的にとらえた上で構築しようとする数式モデルでは実用的な工学モデルには成り難いと考えられる。

そこで本論では比較的理論的な根拠を持ちながらも工学的で単純な数式モデルの構造をめざし、これを普遍的な物理原理と幾つかの仮説から考案した。また係数や指数を実験値から最小二乗法等で決定する方法の試案を述べ、さらにこれらの適合性を検討したものである。

2. 平衡含水率のモデル

平衡含水率のモデルを導く際に、通常用いられる容積含水率 w (kg/m³)を用いるよりも、質量含水率 u (kg/kg)を用いる方が、数式が持つ物理単位の観点から合理的と思われた。両者の含水率は乾燥密度 ρ_0 によって適宜変換できるもの²⁾とした。

材料が絶対湿度 x_a (kg/kg)に曝され雰囲気温度は θ_a (°C)であるとする。平衡状態を仮定するので、材料中の固体、気体、液体部分の全ては一樣な温度 θ_a になっていると考えられる。平衡状態に達している含水率 u (kg/kg)は、材料の表面と内部に存在する水蒸気の吸収面 S_c (m²)での吸収量と、放散面 S_e (m²)での放散量が均衡した状態で生じていると考えられる。また放散面と吸収面の合計面積 S_o (m²)は S_e と S_c の和に等しく一定であると考えられる。ただし S_e と S_c それぞれは状況に応じて変化するものとする。

放散面積 S_e と含水率 u の関係を考える。含水率が 0 の場合には放散面積も 0 と思われる。含水率が増えるに従って放散面積も増えるであろう。しかし正比例とは限らない。例えば液相が水滴状に存在した場合に、その表面積は質量の 2/3 乗に比例する。ある材料での水分は材料中を網管状に広がるとすれば含水率にかかる 1 より大きな冪指数の放散面積となるであろう。こうして一般に S_e は含水率 u の $1/\eta$ 乗に比例定数 a_e をもって比例すると仮定することにする。単に η 乗としないのは後の数式の簡単さのためである。

$$S_e = a_e \cdot u^{\frac{1}{\eta}} \quad (1)$$

前述した吸収面積 S_c と合計面積 S_o との関係から吸収面積 S_c は次式で計算される。

$$S_c = S_o - a_e \cdot u^{\frac{1}{\eta}} \quad (2)$$

ここで水分吸収と放散の平衡状態を記述する。放散速度を k_e (kg/(kg/kg)sec)とし、吸収速度は k_c (kg/(kg/kg)sec)とする。放散面での放散量は温度 θ_a での飽和絶対湿度 x_s (kg/kg)と雰囲気絶対湿度 x_a の差に比例すると考える。一方吸収量は吸収面での絶対湿度 x_d と x_a の差に比例すると考える。従って次式の質量保存の平衡式が記述できる。

$$ke \cdot Se \cdot (xs - xa) = kc \cdot Sc \cdot (xa - xd) \quad (3)$$

この式に(1)と(2)式を代入して次式が記述できる。

$$ke \cdot ae \cdot u^{\frac{1}{\eta}} \cdot (xs - xa) = kc \cdot (So - ae \cdot u^{\frac{1}{\eta}}) \cdot (xa - xd) \quad (4)$$

これを含水率 u について解けば次式が得られる。

$$u = \left[\frac{kc \cdot So \cdot (xa - xd)}{ke \cdot ae \cdot (xs - xa) + kc \cdot ae \cdot (xa - xd)} \right]^{\eta} \quad (5)$$

含水率曲線は相対湿度 0 において含水率が 0 になっている条件と、(5)式の分子を見て、吸収面が持つ絶対湿度 xd は 0 と見なすことが合理的と考えられる。

さらに(5)式の係数の数を減らすために、分子と分母を $kc \cdot ae$ で割ると次式になる。

$$u = \left[\frac{\frac{So}{ae} \cdot xa}{\frac{ke}{kc} \cdot (xs - xa) + xa} \right]^{\eta} \quad (6)$$

ここで係数を次の a と b に集約すれば、(6)式は次の(9)式に書き改められる。

$$a = \frac{So}{ae} \quad (7)$$

$$b = \frac{ke}{kc} \quad (8)$$

$$u = \left[\frac{a \cdot xa}{b \cdot (xs - xa) + xa} \right]^{\eta} \quad (9)$$

飽和絶対湿度 xs と雰囲気絶対湿度 xa の二つの変数も、飽和比率⁴⁾ (saturation ratio) xa/xs の一つの変数 p を導入することで簡潔に(11)式で表示しておくことができる。

$$p = \frac{xa}{xs} \quad (10)$$

$$u = \left[\frac{a}{b \cdot \left(\frac{1}{p} - 1 \right) + 1} \right]^{\eta} \quad (11)$$

ここに飽和比率 p は百分率にした場合に相対湿度とほぼ同じと言われるが大気圧によって少し異なる⁴⁾。従って含水率が相対湿度の関数として表示された従来の実験値との対応をとる場合には換算が必要である。しかし最終的に求めたい κ は含水率の絶対湿度による微分値なの

で本論の式の方が便利である。また ν は温度による微分値であるが、飽和絶対湿度は Antoine の式⁵⁾等で計算するとすれば、 ν を計算するのも面倒ではない。

3. 実験値から係数を回帰する方法

前述した数式モデルにおける係数 a と b および指数 η の3つは実験値を表現できるように決定しなければならない。本報では未だ同時に3つを同時に決定する方法には至らず、 a と b だけは最小二乗法により決定し、 η は探索法による方法を述べる。

(11)式が係数 a と b に関して線形な式になるように、変数 u と p からなる新たな変数 x と y を導入する。そのために(11)式を次の様に変形する。

$$u^{\frac{1}{\eta}} = b \cdot u^{\frac{1}{\eta}} \cdot \left(1 - \frac{1}{p} \right) + a \quad (12)$$

ここで最小二乗法のために次式の変数 x と y を定義する。

$$x = u^{\frac{1}{\eta}} \cdot \left(1 - \frac{1}{p} \right) \quad (13)$$

$$y = u^{\frac{1}{\eta}} \quad (14)$$

これらの x と y で(12)式は次のように書き直される。

$$y = b \cdot x + a \quad (15)$$

実験値により u と p の n 個の組み合わせが最小二乗法に利用できるとする。この中の j 番の実験値 x_j と y_j も(15)式をみたすべきであるが、実際には次式で示される e_j の方程式誤差を持つ。

$$e_j = y_j - \begin{bmatrix} 1 & x_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (16)$$

この式中のマトリックスとベクトルを次の様に定義する。

$$\mathbf{Z}_j = \begin{bmatrix} 1 & x_j \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (18)$$

最小二乗法により、 n 個の実験値の e_j の二乗総和をベクトル \mathbf{a} で微分して 0 とおき、 a と b の係数の推定値を持つベクトル \mathbf{a} ハットを計算する次式が得られる。

$$\hat{\mathbf{a}} = \left(\sum_{j=1}^n {}^t \mathbf{Z}_j \cdot \mathbf{Z}_j \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^n {}^t \mathbf{Z}_j \cdot y_j \right) \quad (19)$$

以上により本報の試行段階では、仮定した η における最適の a と b を求める。 η は 0.5 から 1.5 ぐらいの範囲

を約0.1刻みで変化させ、最終的な(9)あるいは(11)の方程式の二乗平均残差を調べて適切な η を決めることにした。ここで平均とは実験値の個数 n で割った値である。

当初は全ての相対湿度の範囲に一組の係数と指数で適合することを期待したが、材料によっては2区間ぐらいに分けないと適合しないものがあることが分かった。この場合は最小二乗法も、分けた区間毎に適用する。

4. κ と ν の求め方

乾燥密度 ρ_o により容積含水率 w と質量含水率 u は(20)式で換算できるもの²⁾とする。そして水蒸気吸着率 κ と放出率 ν は次の(21)と(22)式³⁾で計算される。

$$w = \rho_o \cdot u \quad (20)$$

$$\kappa = \frac{\partial w}{\partial xa} = \rho_o \cdot \frac{\partial u}{\partial xa} \quad (21)$$

$$\nu = -\frac{\partial w}{\partial \theta_a} = -\rho_o \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta_a} \quad (22)$$

含水率 u は明示的に θ_a (°C)の関数として表示されてはいないが、飽和絶対湿度 xs は θ_a の関数である。本報では数式の簡単さから飽和水蒸気圧 fs (mmHg)は次のAntoineの式⁵⁾で計算した。

$$fs = \exp \left[18.6686 - \frac{4030.183}{235 + \theta_a} \right] \quad (23)$$

また相対湿度 ϕ (%)の空気の絶対湿度 xa (kg/kg)は大気圧を $fa=760$ (mmHg)として次式⁴⁾で計算した。

$$xa = 0.622 \cdot \frac{\phi \cdot fs}{100 \cdot fa - \phi \cdot fs} \quad (24)$$

ここまでの展開で、 w は xs と xa の関数であり、さらに xs と xa は fs の関数であり、 fs は θ_a の関数であるから偏微分の計算則から(22)式の ν に関しては次式が記述できる。

$$\frac{\partial u}{\partial \theta_a} = \frac{\partial u}{\partial xs} \frac{\partial xs}{\partial fs} \frac{\partial fs}{\partial \theta_a} + \frac{\partial u}{\partial xa} \frac{\partial xa}{\partial fs} \frac{\partial fs}{\partial \theta_a} \quad (25)$$

この式の右辺を構成する各微分は、(9)、(23)、(24)式を微分して得られる次に続く式で計算できる。

$$\frac{\partial fs}{\partial \theta_a} = \frac{4030.183}{(235 + \theta_a)^2} \exp \left[18.6686 - \frac{4030.183}{235 + \theta_a} \right] \quad (26)$$

$$\frac{\partial xa}{\partial fs} = 0.622 \cdot \frac{100 \cdot \phi \cdot fa}{(100 fa - \phi \cdot fs)^2} \quad (27)$$

$$\frac{\partial xs}{\partial fs} = 0.622 \cdot \frac{fa}{(fa - fs)^2} \quad (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial xs} = \frac{-\eta \cdot a^\eta \cdot b \cdot (xa)^\eta}{[b \cdot (xs - xa) + xa]^{\eta+1}} \quad (29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial xa} = \frac{\eta \cdot a^\eta \cdot b \cdot (xa)^{\eta-1} \cdot xs}{[b \cdot (xs - xa) + xa]^{\eta+1}} \quad (30)$$

一方、(21)式の κ は(30)式で計算できる。

5. 平衡含水率曲線の回帰検討例

文献³⁾に見られる平衡含水率曲線を参考にして幾つか回帰試算を行い検討した。まず木材である桐について調べた。指数 η は0.4から0.9まで0.05刻みで仮定し、それぞれの場合の最小二乗法による最適値 a と b を求めた。そして実験値と回帰式の適合度は、残差二乗の平均値により調べた。

残差二乗は最終的には本来の相対湿度 ϕ と含水率 w の平面におけるもので評価すべきである。しかし回帰のための変数 x と y の平面における残差も調べた。変数 x と y は(13)と(14)式で表される内容だが、どちらも u の(1/ η)乗を含んでいるために、 η の変化によって x も y も絶対値が大きく変化し、 η が小さい場合には必然的に残差は大きく、 η が大きい場合には残差が小さくなる傾向を持つので最適か否かの判断には使えない。

探索した η とそれぞれでの最適の a と b を表-1に示す。探索した範囲では $\eta=0.55$ が最適値であり、この時に $a=4593$ で $b=7.370$ となった。また x - y 平面での予測式と実験値の比較を図-1に、相対湿度 ϕ -含水率 w の平面での比較を図-2に示す。

表-1 桐の η による a と b の変化

指数 η	残差二乗平均(ϕ - w)	残差二乗平均(x - y)	a	b
0.4	77.188	1.14E+09	54927.062	7.465
0.45	18.909	7.66E+07	24905.615	10.361
0.5	3.461	7.48E+06	10796.426	9.782
0.55	2.250	1.20E+06	4592.678	7.370
0.6	6.559	2.90E+05	2091.909	5.184
0.65	16.224	9.08E+04	1056.181	3.672
0.7	29.822	3.37E+04	589.324	2.683
0.75	45.524	1.43E+04	358.196	2.029
0.8	61.955	6.71E+03	233.590	1.583
0.85	78.261	3.44E+03	161.336	1.269
0.9	93.965	1.89E+03	116.794	1.042

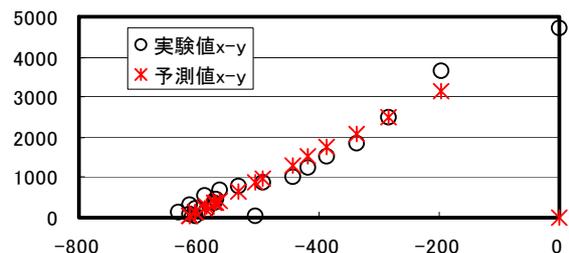


図-1 桐の x - y 平面での回帰

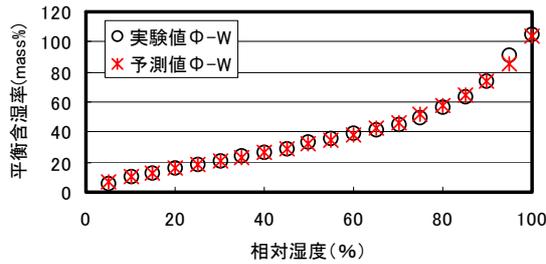


図-2 桐の原 ϕ - w 平面での回帰

桐の場合は相対湿度0から100%まで一種類の回帰式で間に合った。しかし次の気泡コンクリートの場合には相対湿度65%ぐらいを境に2区間に分け、それぞれで異なった係数と指数にしないと実験値が良く表現できないことが分かった。

この区間分けの必要性が明示されるのが、 x - y 平面でのグラフである。例えば η は0.5ぐらいから1.8ぐらいまでの範囲で試算したが、この中間の1.15において x - y のグラフを図-3に示す。この実験値のプロットは65%のところで折れ曲がり、それぞれ直線状に分布している。それぞれの区間で直線状に分布していることは、それぞれの区間では一定の a と b で間に合うことを示していると考えられる。

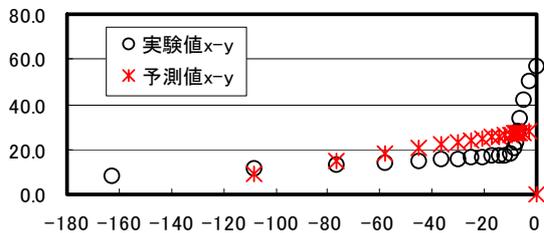


図-3 気泡コンクリートの x - y 平面での回帰

そこで相対湿度65%で2区間に分け、それぞれの回帰結果を表-2に示す。これには参考までに $\eta=1.15$ で全区間を回帰したものも含めた。第1区間と第2区間それぞれの最適な η は0.5と1.8となった。

表-2 気泡コンクリートの各区間での η , a , と b

材料名称	気泡コンクリート		
	第1区間	第2区間	全区間
指数 η	0.5	1.8	1.15
a	849.194	13.345	28.489
b	0.237	2.139	0.180
残差2乗平均 (ϕ - w)	0.157	4.719	383.885
残差2乗平均 (x - y)	1706.568	22.116	237.543

そしてこれらの2区間の曲線を合成して描くと、次の図-4になる。

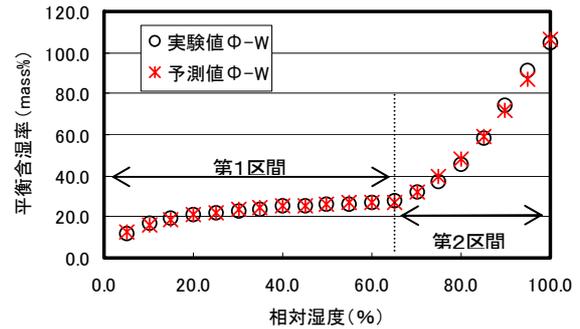


図-4 気泡コンクリートの2区間合成曲線

6. 結論

平衡含水率曲線の数学モデルについて、既往のものより理論的ながらも工学的で、係数と物性的特性との関連が分かると思われるモデルを導いた。実験値から最小二乗法で回帰する係数は2個で、探索法で最適値を探す逆指数は1個である。2個の係数は、一つは吸放湿総面積に比例し、もう一つは吸着速度に対する放散速度の比率に等しい。また逆指数は、含水率にかかる冪指数となり、この冪乗の結果は放散面積に比例するモデルである。

また材料によっては0から100%の相対湿度全区間で一組の係数・指数では間に合わず、相対湿度によって2区間に分け、別の係数・指数を用いなければならない。この区間分けの境目は、回帰するための中間的な2つの変数の平面における実験値プロットが示す直線が、そこで折れ曲がるなどの性状から決定できる。

今後、同時に3個の係数と逆指数の最適値を求める理論を作る必要がある。またさらに実験値での検討が必要である。

【謝辞】芝池英樹先生と岩前篤先生には本研究を進めるにあたって既往の文献や知見について教えて頂きました。大西由哲氏には図表で協力頂きました。また表計算ソフトによる試算では益子智久氏に協力頂きました。

参考文献

- 1) 日本建築学会誌, M. Kumar KUMARAN 著, 建築材料の熱・空気・湿気物性値, 2001年, 10月15日, 第1版第1刷
- 2) 日本建築学会環境基準 AIJES-H001-2006, 湿気物性に関する測定規準・同解説, 2006年1月30日
- 3) 防露設計研究会著, 池田哲朗監修, 住宅の結露防止・防露手法の基礎から防露設計法まで, 2004年3月30日, 第1版第1刷, 学芸出版社
- 4) 木村建一著, 建築設備基礎理論演習, 1971年11月20日再版発行, 学献社
- 5) 中山昭雄編, 温熱生理学, 第2章人体と環境の熱交換, 第1版第3刷, 1985年, 理工学社, p. 40
- 6) 奥山博康, 「熱水分同時移動の解析法について」, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1982年10月, pp761-762