

## 送風機の設計風量と全圧から P-Q 特性曲線を生成する方法

## A Generating Method for Fan P-Q Curve from Design Flow Rate and Total Pressure

正会員 奥山 博康 (清水建設) ○正会員 大西 由哲 (清水建設)

Hiroyasu OKUYAMA Shimizu corporation Yoshinori OHNISHI Shimizu corporation

Synopsis: The fan P-Q third order polynomial characteristic curve is used in an air flow network model, but the practical difficulty is to prepare the coefficients because of the almost infinite variations for fan capacity and because of the difficult extrapolation required for the curve to implement the least squares method owing to the relatively small curve range that can be referenced in manufacturer supply materials. The present paper proposes a theory and an algorithm to automatically generate the coefficients of the P-Q characteristic curve when only the design flow rate and total pressure are given. The theory is based on a similar transformation of the curve concerning the origin of the P-Q coordinates and expansion or contraction along the Q coordinate.

## 1. はじめに

換気回路網モデル等での送風機は設計風量が必ず実現するという固定風量モデルとして扱われることが多い。しかし実際の送風機では、空気移動経路の抵抗、外気の風圧や建物の煙突効果によって、設計風量は必ずしも実現しない。この実際の現象を考慮しようとする場合には、通常は送風機全圧の風量に関する P-Q 特性曲線と呼ばれる関数を仮定し、各種の条件による曲線上の実際の運転点を計算する。

熱・換気回路網モデル<sup>4)</sup>によるシミュレーションプログラム NETS<sup>3)</sup>においては、送風機全圧 P は風量 Q の 3 次式で表している。従って式の係数は、a, b, c, d と 4 つ存在する。これらの係数は送風機メーカー等から得られる P-Q 曲線から最小二乗法によって回帰している。また回帰して得られた送風機データは部品ライブラリに加えて引用が可能にしている。しかしこの方法では実用上の問題があることが、長期間にわたる多くのユーザーの運用から判明した。

それは実際には様々な設計風量の送風機があり予め部品ライブラリに準備しておくことは困難なこと、回帰する作業が面倒な上に、入手できる P-Q 曲線の座標上の範囲が図-1 の様に回帰のためには狭く、推定して外挿し

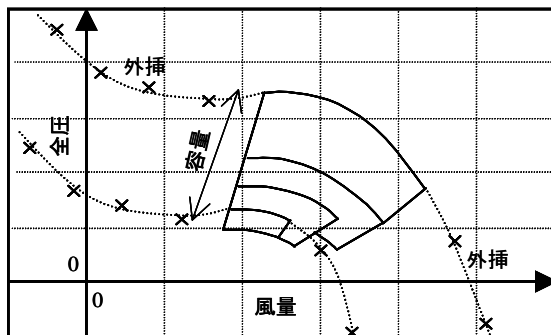


図-1 メーカーから入手可能な特性曲線と外挿曲線

なければならぬので難しいこと等である。むしろこうした問題があるために、望ましくない固定風量モデルが適用されているのではないかとも思われる。

そこで本論では、送風機計算モデルのデータ準備に、多くの面倒な作業を要求せず、設計意図上の風量と全圧さえ与えれば、自動的に P-Q 特性曲線の係数を生成する理論とアルゴリズムを提案する。

## 2. 送風機のモデル

送風機の P-Q 特性曲線のモデルは、NETS においては次のように全圧 P (Pa) を風量 Q (m<sup>3</sup>/sec) に関する 3 次多項式で表している。

$$P = a \cdot Q^3 + b \cdot Q^2 + c \cdot Q + d \quad (1)$$

送風機メーカー等から P-Q 曲線が得られたとして、曲線に沿った沢山の n 個の点を利用して係数を回帰するとし、P と Q の値の組み合わせの一つを (Q<sub>j</sub>, P<sub>j</sub>) とする。

ここで次のようなマトリックス Z とベクトル u を定義する。

$$\mathbf{Z}_j = [Q_j^3 \quad Q_j^2 \quad Q_j \quad 1] \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (3)$$

この時、最小二乗法により最適の係数は次式で計算される。

$$\mathbf{u} = \left( \sum_{j=1}^n {}^t \mathbf{Z}_j \cdot \mathbf{Z}_j \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{j=1}^n {}^t \mathbf{Z}_j \cdot P_j \right) \quad (4)$$

こうして得られる三次式は流路の圧力損失の式と組み合わせられ、同時にこの送風機にかかる風圧なども考慮した式にして、風量 Q の三次方程式と見なして、カルダノ等の解析的な解法で NETS では解いている<sup>3)</sup>。

しかし得られるP-Q曲線は実際運転可能な狭いQの範囲なので、この範囲だけを回帰に用いると、合理的な解が得られない3次式になる場合がしばしば起こる。そこで実際には存在しないPやQの負の範囲まで仮想的に入力しなければならないので普通の技術者には困難である。

### 3. 典型的なP-Q特性曲線と個々の送風機の関係

#### 3.1 典型的なP-Q特性曲線

本方法では様々な送風機を送風方式により分類し各々は典型的な曲線の形をしていると考える。例えば図-2<sup>1)</sup>の様に遠心式送風機と軸流型送風機等に大別され、さらに遠心式には多翼型、ターボ型、リミットロード型等に分類され、各々は典型的な曲線を持つと考える。同一方式の送風機でも様々な容量のものがあるが、代表的な容量のものを典型的なP-Q特性曲線として次式で表示する。

$$P_0 = a_0 \cdot Q_0^3 + b_0 \cdot Q_0^2 + c_0 \cdot Q_0 + d_0 \quad (5)$$

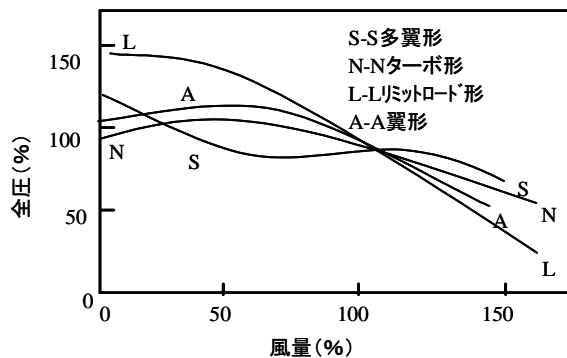


図-2 各種送風機の特性曲線<sup>1)</sup>

ここで送風機に関する幾つかの法則<sup>2)</sup>がある。まず風量は回転数に比例する。回転数が $n_0$ (1/min)の場合に風量が $Q_0$ で、 $n$ (1/min)の場合に $Q$ とすると次式で表される。

$$Q_0 = \left(\frac{n_0}{n}\right) \cdot Q \quad (6)$$

次に圧力は回転数の二乗に比例する。

$$P_0 = \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \cdot P \quad (7)$$

さらに軸動力 $L$ (kw)は回転数の3乗に比例する。

$$L_0 = \left(\frac{n_0}{n}\right)^3 \cdot L \quad (8)$$

また両者の回転数の試験時に空気密度 $\rho$ が異なっていれば次式で換算する。

$$P_0 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \cdot P \quad (9)$$

#### 3.2 回転数変化のP-Q特性曲線

関連する現象として、回転数が $n_0$ から $n$ に変化した場合の特性曲線を考える。(6)と(7)式を(5)式に代入すると次式が得られる。

$$P = a_0 \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right) \cdot Q^3 + b_0 \cdot Q^2 + c_0 \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^{-1} \cdot Q + d_0 \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^{-2} \quad (10)$$

NETSでは各種の状態量によりフィードバック制御で回転数を変化させることができるが、この(10)式を用いることで計算している。図-3の様に回転数が減少していくことで圧力も風量も小さくなっていくが、次節の原点に関して相似に縮小拡大した曲線とは少し異なる。

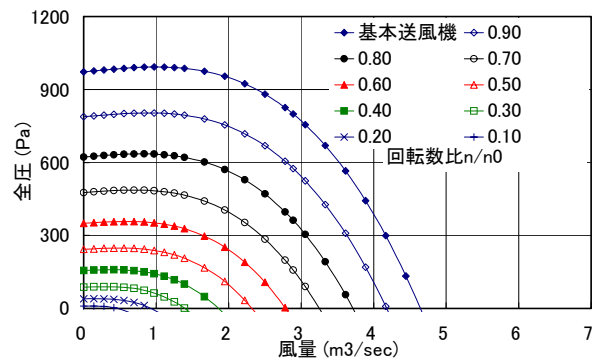


図-3 回転数を変化させた時の特性曲線

#### 3.3 P-Q特性曲線の原点に関して相似縮小拡大

ある典型的なP-Q特性曲線を持つ基本送風機に対して、同じ送風方式でありながらも、サイズが小さかったりして風量も圧力も小さい送風機との関連を考える。

基本送風機の特性曲線とこの適切な運転点の幾何的な関係は、容量の小さい送風機においても原点に関して相似的に同じと考えるのが合理的と思われる。小さな容量の送風機の最適運転点は、基本送風機の最適運転点と原点を結ぶ直線が、その相似縮小した特性曲線と交わる点にとることで求められる。

そこで典型的な曲線の極座標の式を導いてみる。原点から典型的な曲線までの距離を $r_0$ とし、これが横軸となす角度を $\theta$ とすれば次の二式が記述できる。

$$P_0 = r_0 \cdot \sin \theta \quad (11)$$

$$Q_0 = r_0 \cdot \cos \theta \quad (12)$$

これらを(5)式に代入すれば典型的な基本送風機は次式となる。

$$r_0 \cdot \sin \theta = a_0 \cdot r_0^3 \cdot \cos^3 \theta + b_0 \cdot r_0^2 \cdot \cos^2 \theta + c_0 \cdot \cos \theta + d_0 \quad (13)$$

次に容量等が小さく、原点からの距離が  $r_0$  に対して  $r$  となり、これらの距離の比率が次式の  $f$  になる特性曲線を導く。これを相似比率と呼ぶことにする。

$$f = \frac{r}{r_0} \quad (14)$$

この式から  $r_0=r/f$  を(13)式に代入し、さらに元の変数  $P$  と  $Q$  に戻す次の(15)と(16)式により変形すれば下の(17)式を得る。

$$r \cdot \sin \theta = P \quad (15)$$

$$r \cdot \cos \theta = Q \quad (16)$$

$$P = a_0 \cdot f^{-2} \cdot Q^3 + b_0 \cdot f^{-1} \cdot Q^2 + c_0 \cdot Q + d_0 \cdot f \quad (17)$$

ここで回転数変化の(10)式と比較することができる。回転数の変化で運転点の圧力を下げようとする、曲線の適切な位置に運転点を定め難い問題がある。つまり設計圧力の実現のためには、図-4 の様に原点に関して相似的に曲線を縮小・拡大する方が良い。

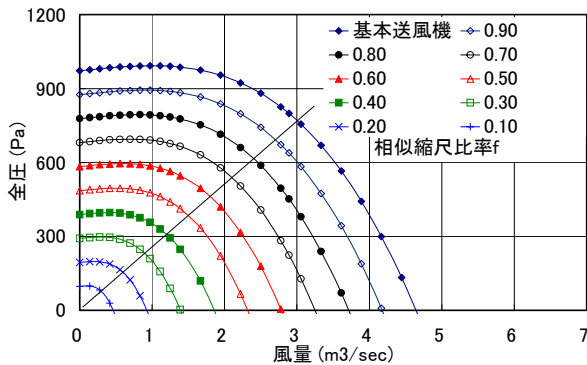


図-4 原点に関して相似的に縮小・拡大した特性曲線

### 3.4 並列的風量増減のP-Q特性曲線

この特性曲線モデルは、単に容量の違いのモデル化だけではなく、実際の大規模な建物のモデル化において、一つのゾーンに対して並列的に働いている複数の送風機は一つにまとめて、簡単なモデルにしようとする場合にも必要である。典型的な基本送風機を  $m$  台並列にして風量だけを増加する場合は  $Q=m \cdot Q_0$  であるから、パラメータ  $g=1/m$  を導入して次式が書ける。

$$Q_0 = \frac{1}{m} Q = g \cdot Q \quad (18)$$

$$P_0 = P \quad (19)$$

こうして並列にした場合の曲線は次式で表され、また

図-5 の様な形になる。

$$P = a_0 \cdot g^3 \cdot Q^3 + b_0 \cdot g^2 \cdot Q^2 + c_0 \cdot g \cdot Q + d_0 \quad (20)$$

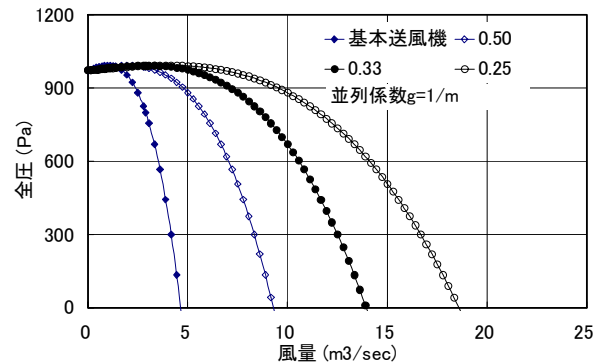


図-5 並列的風量増減の特性曲線

### 4. 設計運転点を含むP-Q特性曲線

典型的な基本P-Q曲線から容量の異なる個々の送風機のP-Q曲線を導くために、前節の3.3と3.4の方法を組み合わせる。問題は図-6の様に、典型的な送風機特性曲線、この最適運転点( $Q_0, P_0$ ) [1]と、さらに未定特性曲線の送風機での設計運転点( $Q_d, P_d$ ) [3]が与えられた場合に、どの様にしてこの未定特性曲線の係数を定めるかである。

ここに基本曲線が原点に相似に縮小あるいは拡大する時に、別の容量の送風機の最適運転点は( $Q_0, P_0$ ) [1]と原点を結ぶ直線上で移動すると考える。こうして新たな最適運転点( $Q_p, P_p$ ) [2]を定義した時に、これらは次の二式で計算される。

$$Q_p = \left( \frac{Q_0}{P_0} \right) \cdot P_d \quad (21)$$

$$P_p = P_d \quad (22)$$

(22)式にこれらの式を代入すれば、相似比率  $f$  に関する方程式が得られる。

$$P_p = a_0 \cdot f^{-2} \cdot Q_p^3 + b_0 \cdot f^{-1} \cdot Q_p^2 + c_0 \cdot Q_p + d_0 \cdot f \quad (23)$$

これは相似比率  $f$  に関して非線形方程式であるが、実際的に取り得る圧力等の数値の範囲から  $f$  の範囲も限られており、それ故に挟み打ち法によって解くことができる。今まで計算した範囲では0は不合理なので、0.01から5ぐらいの両端初期値を与えている。

次に、求められた  $f_s$  による縮小拡大された曲線を新たな基本曲線と見なし、 $Q_p$  が設計風量  $Q_d$  に合うように  $m$  台の並列をする。並列台数  $m$  の逆数  $g$  に関して(20)式が記述できたので、設計風量  $Q_d$  と設計全圧  $P_d$  において次の  $g$  に関する方程式が記述できる。

$$P_d = a_0 \cdot f_s^{-2} \cdot g^3 \cdot Q_d^3 + b_0 \cdot f_s^{-1} \cdot g^2 \cdot Q_d^2 + c_0 \cdot g \cdot Q_d + d_0 \cdot f_s \quad (24)$$

この  $g$  も実際に取り得る風量等の数値範囲から解の範囲は限られているので、挟み打ち法によって解  $g_s$  を求めることができる。これまで計算した範囲では挟み打ち法の両端初期値は 0 から 10 ぐらいであった。こうして設計風量と設計全圧を適切な運転点とする送風機 P-Q 特性曲線の係数  $a, b, c, d$  は次の式で定められる。

$$a = a_0 \cdot f_s^{-2} \cdot g_s^3 \quad (25)$$

$$b = b_0 \cdot f_s^{-1} \cdot g_s^2 \quad (26)$$

$$c = c_0 \cdot g_s \quad (27)$$

$$d = d_0 \cdot f_s \quad (28)$$

以上により、もし典型的な基本特性曲線が定められて、これと同じ送風原理で別の容量の送風機の設計風量と設計全圧が与えられれば、この特性曲線の係数が計算できる。

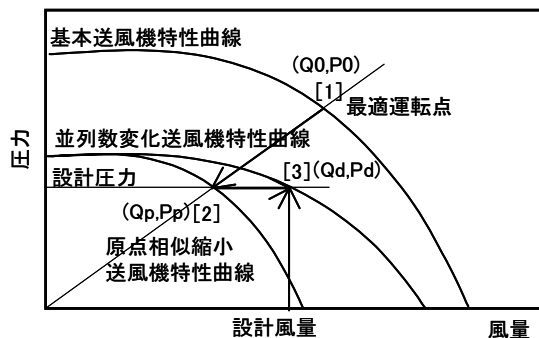


図-6 原点相似縮小拡大と並列的風量増減の特性曲線

## 5. 挟み打ち法のアルゴリズム

前節で述べた挟み打ち解法をアルゴリズムとして述べる。図-7 はこれをサブプログラムのフローチャートとして示したものである。(24)式で右辺を左辺に移行した式を関数  $f(x)=0$  として定義する。  $x$  上に  $x_1 < x_2$  なる  $x_1$  と  $x_2$  を両端とする解の存在区間を仮定する。そしてこの区間の中心に  $x_3$  をとる。  $f(x_1)$  と  $f(x_3)$  が、もし同符号であれば解は  $x_1$  と  $x_3$  の間にはなく、新たな解の存在仮定区間は  $x_3$  と  $x_2$  の間にあるとする。もし異符号であれば解は  $x_1$  と  $x_3$  の間にあるから、新たな解の存在仮定区間は  $x_1$  と  $x_3$  の間とする。そして新たな解の存在仮定区間について同じ手順を繰り返していく。つまり仮定した区間を 2 つに等分割し、どちらの区間に解が存在するか判定し、解が存在する方の区間を新たな区間として、解へ向けて区間を狭めていく手順を繰り返す。

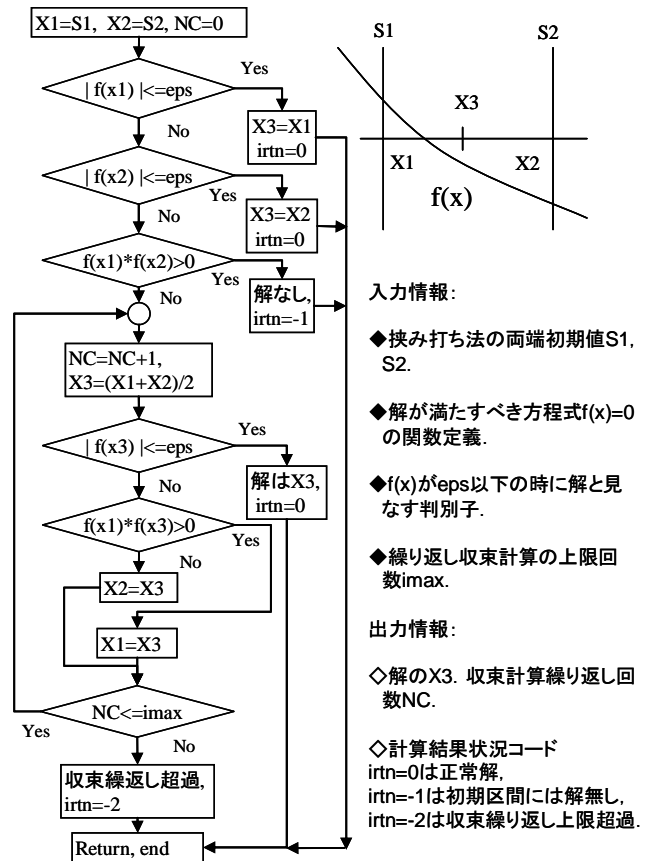


図-7 挟み打ち法のアルゴリズム

## 6. 結論

送風機 P-Q 特性曲線モデルの実適用を阻んでいる一つの大きな原因が、その適切な曲線を設計風量と全圧だけから簡便に得る方法の欠如にあるとして、本論ではこれを演繹して提案した。この基本的なアイデアは、送風方式によって幾つかの基本曲線を用意しておき、設計圧力に向けて基本曲線を原点に関して相似に縮小・拡大し、さらにこの曲線を設計風量に向けて横軸に沿って並列合成的に伸縮するという幾何的な曲線の変更手続きを行うことにある。また数値計算的には挟み打ち法によって変更曲線の係数を求める。なおこの方法で生成した幾つかの P-Q 特性曲線によって適切なシミュレーションが行えることは確認した。

【謝辞】 清水建設設計部の矢川明弘氏と新武康氏には、送風機データの作成と計算を行って頂きました。

## 参考文献

- 1) 井上宇市著, 空気調和ハンドブック改訂 3 版, 平成 3 年 11 月, 第 9 刷発行, 丸善
- 2) 空気調和衛生工学会編, 空気調和設備の実務の知識, 昭和 47 年 12 月, 第 1 版第 4 刷, オーム社
- 3) 奥山博康, 熱・換気回路網計算プログラム NETS の検証, IBPSA-Japan 講演論文集/2002, ISSN1347-4391, pp15-22
- 4) 奥山博康, 建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究, 博士号学位請求論文, 1987 年 12 月