

並流と向流の熱交換器の相当熱交換一般化コンダクタンスによる熱回路網モデル Thermal network models of parallel- and counter-flow heat exchangers using equivalent heat exchanging generalized conductances

技術フェロー 奥山 博康 (神奈川大学) 学生会員 ○藤崎 詩織 (神奈川大学)

正会員 吉浦 温雅 (神奈川大学)

Hiroyasu OKUYAMA Shiori FUJISAKI Atsumasa YOSIURA

Kanagawa University

Synopsis: The entire system comprising a building and air-conditioning equipment can be modeled using a thermal network, and the corresponding simultaneous ordinary differential equation can be solved. The main components of the system are parallel- and counter-flow heat exchangers. The equations for calculating the outlet temperatures can be analytically solved and are well known. Based on these solutions, the equivalent thermal conductances were deduced between four inlet and outlet temperature nodes. These coefficients make division unnecessary along the fluid flow direction of the heat exchanger, and the exact solution can be calculated. Furthermore, these models were verified using performance data provided by a fan coil manufacturer.

1. はじめに

冷温水コイル等の熱交換器の両流体の出口温度は、熱通過率 K と伝熱面積 A と両流体の入口温度による指数関数の解析解で計算できる¹⁾。しかし熱交換器と建物を一体的な熱回路網モデルで解く場合は、出入口温度の節点を設け、全体システムの連立方程式の未知数とする必要がある。これまで熱回路網では、熱交換器内の流れ方向を分割し、多節点で近似して流体温度変化を解いてきた。しかし出口温度と、もう一方の流体の入口温度との相当熱交換係数が解析解から演繹でき、分割近似をしない熱回路網で出口温度の解析解が得られる。本研究では、このモデルの妥当性を検討するため、冷温水コイルメーカーのカタログ値³⁾等を利用して、様々な流量と出入口温度における交換熱量により、従来モデルと比較検討を行った。そして流体の流れ方向を分割近似した熱回路網モデルとの比較も行った。さらに向流と並流の熱交換性能についても検討した。

2. 並流の場合

並流の場合として、図-1に示す様に、流体 w の管が、より太い管の中にあり、両方の管の間をもう一方の流体 a が同じ方向に流れるとする。流れ方向に距離は $l(\text{m})$ とし全長は $L(\text{m})$ とする。内管の断面の周長は $p(\text{m})$ とする。流体 w と流体 a の間の熱通過率は $U(\text{W}/\text{m}^2\text{K})$ とする。流体 w の熱容量流量は、比熱 $c_w(\text{J}/\text{kgK})$ と密度 $\rho_w(\text{kg}/\text{m}^3)$ と体積流量 $q_w(\text{m}^3/\text{s})$ として $c_w\rho_wq_w(\text{J}/\text{sK})$ となる。また同様に流体 a は、比熱 $c_a(\text{J}/\text{kgK})$ 、密度 $\rho_a(\text{kg}/\text{m}^3)$ 、体積流量 $q_a(\text{m}^3/\text{s})$ として $c_a\rho_aq_a(\text{J}/\text{sK})$ となる。これらから次の連立常微分方程式が記述できる。固有値とその固有ベクトル等により線形代数的な方法で解く。

$$\begin{bmatrix} c_a\rho_aq_a & 0 \\ 0 & c_w\rho_wq_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_a/dl \\ d\theta_w/dl \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Up & Up \\ Up & -Up \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_w \end{bmatrix} \quad (1)$$

左辺のマトリックスの逆行列を両辺に左方から乗じる。

$$\begin{bmatrix} d\theta_a/dl \\ d\theta_w/dl \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Up/c_a\rho_aq_a & Up/c_a\rho_aq_a \\ Up/c_w\rho_wq_w & -Up/c_w\rho_wq_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_w \end{bmatrix} \quad (2)$$

マトリックス内の要素を次の記号定義で簡潔に表す。

$$\begin{bmatrix} d\theta_a/dl \\ d\theta_w/dl \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_a & K_a \\ K_w & -K_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_w \end{bmatrix} \quad (3)$$

この固有値は $-(K_a+K_w)$ と 0 であり、対応する固有ベクトルは $(K_a, -K_w)$ と $(1, 1)$ である。これらで構成される二項の不定積分定数を C_1 と C_2 として解析解は次(4)式で表される。 C_1 と C_2 の定め方は、 $l=0$ の入口温度 θ_{ai} と θ_{wi} が与えられること、また並流の場合には、熱交換面積が大きくなれば、両流体は等しい究極温度 θ_∞ に近づく条件による。

$$\begin{bmatrix} \theta_a(l) \\ \theta_w(l) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} K_a \\ -K_w \end{bmatrix} \exp[-(K_a+K_w)l] + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに究極温度 θ_∞ は、熱容量流量 $c_a\rho_aq_a$ と $c_w\rho_wq_w$ の重み付き平均である。其々の比率を $r_a=c_a\rho_aq_a/(c_a\rho_aq_a+c_w\rho_wq_w)$ と $r_w=c_w\rho_wq_w/(c_a\rho_aq_a+c_w\rho_wq_w)$ とおけば、次の(5)式で計算される。そして(4)式の不定積分定数は定まり、(6)式が記述される。

$$\theta_\infty = r_a\theta_{ai} + r_w\theta_{wi} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_a(l) \\ \theta_w(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{ai} - \theta_{\infty} \\ \theta_{wi} - \theta_{\infty} \end{bmatrix} \exp[-(K_a + K_w)l] + \begin{bmatrix} \theta_{\infty} \\ \theta_{\infty} \end{bmatrix} \quad (6)$$

距離 $l=L$ で出口温度 θ_{ae} と θ_{we} である。まず(6)式の一行目から θ_{ae} は次の(7)式で表される。

$$\theta_{ae} = (\theta_{ai} - r_a \theta_{ai} - r_w \theta_{wi}) \exp[-(K_a + K_w)L] + r_a \theta_{ai} + r_w \theta_{wi} \quad (7)$$

この式を θ_{ae} に関する次の(8)式に変形し、 A_1 は $c_a \rho_a q_a$ とおければ、この式は出口温度 θ_{ae} に関する熱収支式になり、 A_2 は求める相当熱交換係数となる。

$$A_1(\theta_{ai} - \theta_{ae}) + A_2(\theta_{wi} - \theta_{ae}) = 0 \quad (8)$$

この(8)式と(7)式を比較するため、(8)式は次の(9)式に書き換える。そして(7)式を(9)式の形に変形し(10)式を得る。

$$A_1 \theta_{ai} + A_2 \theta_{wi} - (A_1 + A_2) \theta_{ae} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \{r_a + r_w \exp[-(K_a + K_w)L]\} \theta_{ai} + \\ \{r_w - r_w \exp[-(K_a + K_w)L]\} \theta_{wi} - \theta_{ae} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

この(9)と(10)式を比較し係数 A_1 と A_2 の内容が定まる。そこで(9)式の両辺を A_1 で除し、さらに両辺に $c_a \rho_a q_a$ を乗じ、係数 A_1 と A_2 の内容で記述すれば次式が得られる。

$$c_a \rho_a q_a (\theta_{ai} - \theta_{ae}) + r_w \frac{c_a \rho_a q_a \{1 - \exp[-(K_a + K_w)L]\}}{r_a + r_w \exp[-(K_a + K_w)L]} (\theta_{wi} - \theta_{ae}) = 0 \quad (11)$$

この第2項の係数が、流体 a の出口温度の流体 w の入口温度との相当熱交換コンダクタンス $c_{ae,wi}$ であるが、 r_a と r_w の代わりに元の係数で表せば次の(12)式となる。

$$c_{ae,wi} = \frac{c_a \rho_a q_a \cdot c_w \rho_w q_w \{1 - \exp[-(K_a + K_w)L]\}}{c_a \rho_a q_a + c_w \rho_w q_w \exp[-(K_a + K_w)L]} \quad (12)$$

同様に(6)式の2行目から、流体 w の出口温度 θ_{we} と流体 a の入口温度 θ_{ai} との相当熱交換係数 $c_{we,ai}$ は次式で計算される。

$$c_{we,ai} = \frac{c_a \rho_a q_a \cdot c_w \rho_w q_w \{1 - \exp[-(K_a + K_w)L]\}}{c_w \rho_w q_w + c_a \rho_a q_a \exp[-(K_a + K_w)L]} \quad (13)$$

これらの $c_{ae,wi}$ と $c_{we,ai}$ による並流の熱回路網を図-2に示す。

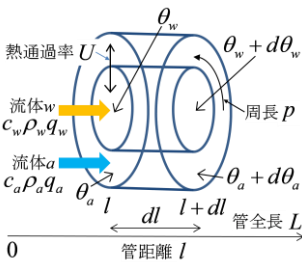
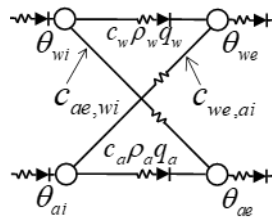


図-1 並流流れ方向微小部分 図-2 並流の熱回路網モデル



3. 向流の場合

向流の場合、図-3に示す様に両流体が逆方向に流

れる。並流の(3)式に対応するのは次の(14)式である。

$$\begin{bmatrix} d\theta_a/dl \\ d\theta_w/dl \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_a & K_a \\ -K_w & K_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_w \end{bmatrix} \quad (14)$$

この固有値は $-(K_a - K_w)$ と 0 であり、対応する固有ベクトルはそれぞれ (K_a, K_w) と $(1, 1)$ である。これらで構成される二項の不定積分定数を D_1 と D_2 とし解析解は次の(15)式で表される。

$$\begin{bmatrix} \theta_a(l) \\ \theta_w(l) \end{bmatrix} = D_1 \begin{bmatrix} K_a \\ K_w \end{bmatrix} \exp[-(K_a - K_w)l] + D_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

向流であるから、 $l=0$ のところの流体 a は入口温度の θ_{ai} であり、一方流体 w の出口温度は θ_{we} となり、(16)式が書ける。また $l=L$ のところの流体 a は出口温度 θ_{ae} であり、流体 w は入口温度 θ_{wi} であり、(17)式が書ける。

$$\begin{bmatrix} \theta_{ai} \\ \theta_{we} \end{bmatrix} = D_1 \begin{bmatrix} K_a \\ K_w \end{bmatrix} + D_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{ae} \\ \theta_{wi} \end{bmatrix} = D_1 \begin{bmatrix} K_a \\ K_w \end{bmatrix} \exp[-(K_a - K_w)L] + D_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで(16)式と(17)から D_1 と D_2 は次式の様に求められる。

$$D_1 = (\theta_{ai} - \theta_{wi}) / \{K_a - K_w \exp[-(K_a - K_w)L]\} \quad (18)$$

$$D_2 = \frac{\theta_{wi} K_a - \theta_{ai} K_w \exp[-(K_a - K_w)L]}{K_a - K_w \exp[-(K_a - K_w)L]} \quad (19)$$

これらにより(17)式の1行目は次の(20)式で記述される。さらに(20)式の右辺の分数の分母を両辺に乗じて(21)式を得る。

$$\theta_{ae} = \frac{K_a (\theta_{ai} - \theta_{wi})}{K_a - K_w \exp[-(K_a - K_w)L]} \exp[-(K_a - K_w)L] + \frac{\theta_{wi} K_a - \theta_{ai} K_w \exp[-(K_a - K_w)L]}{K_a - K_w \exp[-(K_a - K_w)L]} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \theta_{ae} \{K_a - K_w \exp[-(K_a - K_w)L]\} \\ = K_a (\theta_{ai} - \theta_{wi}) \exp[-(K_a - K_w)L] \\ + \theta_{wi} K_a - \theta_{ai} K_w \exp[-(K_a - K_w)L] \end{aligned} \quad (21)$$

並流の場合と同様に、流体 a の出口温度 θ_{ae} の、もう一方の流体 w の入口温度 θ_{wi} との相当熱交換コンダクタンスを求める。次の(22)式は、係数 B_1 が $c_a \rho_a q_a$ の場合に、 θ_{ae} に関する熱収支式になる。(21)式と(22)式の比較をするために、(22)式は(23)式の形に変形する。

$$B_1(\theta_{ai} - \theta_{ae}) + B_2(\theta_{wi} - \theta_{ae}) = 0 \quad (22)$$

$$B_1 \theta_{ai} + B_2 \theta_{wi} - (B_1 + B_2) \theta_{ae} = 0 \quad (23)$$

そして(21)式も(23)式の形に変形し次式を得る。

$$\begin{aligned} \{(K_a - K_w) \exp[-(K_a - K_w)L]\} \theta_{ai} \\ + \{K_a - K_w \exp[-(K_a - K_w)L]\} \theta_{wi} \\ - \{K_a - K_w \exp[-(K_a - K_w)L]\} \theta_{ae} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

この(24)式で、(23)式の係数 B_1 と B_2 に対応する部分の和が、 θ_{ae} の係数部分と一致することが確認できる。従って

(24)式は、(22)式の形の、次の(25)式に書きなおせる。

$$\{(K_a - K_w) \exp[-(K_a - K_w)L]\}(\theta_{ai} - \theta_{ae}) + \{K_a - K_a \exp[-(K_a - K_w)L]\}(\theta_{wi} - \theta_{ae}) = 0 \quad (25)$$

この両辺に $c_a \rho_a q_a / \{(K_a - K_w) \exp[-(K_a - K_w)L]\}$ を乗じて出口温度 θ_{ae} に関する次の熱収支式を得る。

$$c_a \rho_a q_a (\theta_{ai} - \theta_{ae}) + \frac{c_a \rho_a q_a K_a \{1 - \exp[-(K_a - K_w)L]\}}{(K_a - K_w) \exp[-(K_a - K_w)L]} (\theta_{wi} - \theta_{ae}) = 0 \quad (26)$$

ここで $K_w / K_a = c_w \rho_w q_w / c_a \rho_a q_a$ を利用して(26)式は(27)式になる。

$$c_a \rho_a q_a (\theta_{ai} - \theta_{ae}) + \frac{c_w \rho_w q_w}{c_a \rho_a q_a - c_w \rho_w q_w} \left\{ 1 - \frac{1}{\exp[-(K_a - K_w)L]} \right\} (\theta_{wi} - \theta_{ae}) = 0 \quad (27)$$

流体 a の出口温度 θ_{ae} と流体 w の入口温度 θ_{wi} との相当熱交換コンダクタンス $c_{ae,wi}$ は次の(28)式で計算される。

$$c_{ae,wi} = \frac{c_a \rho_a q_a \cdot c_w \rho_w q_w}{c_a \rho_a q_a - c_w \rho_w q_w} \left\{ 1 - \frac{1}{\exp[-(K_a - K_w)L]} \right\} \quad (28)$$

流体 w では、(16)式の2行目の出口温度 θ_{we} の式から同様に演繹して、出口温度 θ_{we} に関する熱収支式は(29)式、そして流体 a の入口温度 θ_{ai} との相当熱交換コンダクタンス $c_{we,ai}$ は(30)式で表される。

$$c_w \rho_w q_w (\theta_{wi} - \theta_{we}) + \frac{c_w \rho_w q_w \cdot c_a \rho_a q_a}{c_w \rho_w q_w - c_a \rho_a q_a} \left\{ 1 - \exp[-(K_a - K_w)L] \right\} (\theta_{ai} - \theta_{we}) = 0 \quad (29)$$

$$c_{we,ai} = \frac{c_w \rho_w q_w \cdot c_a \rho_a q_a}{c_w \rho_w q_w - c_a \rho_a q_a} \left\{ 1 - \exp[-(K_a - K_w)L] \right\} \quad (30)$$

これらの $c_{ae,wi}$ と $c_{we,ai}$ による向流の熱回路網を図-4に示す。

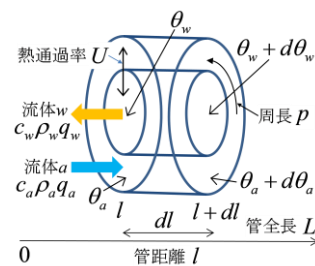


図-3 向流流れ方向微小部分

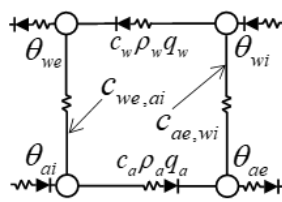


図-4 向流の熱回路網モデル

4. 対数平均温度差

従来の熱交換器モデルは、熱通過率 $K[W/(m^2 \cdot K)]$ と面積 $A[m^2]$ を対数平均温度差 Δ_{lm} に乗じて交換熱流 $Q[W]$ を、次の(31)式で計算する。向流でも並流でもこの式が成り立つ。

$$Q = KA \Delta_{lm} = KA \left[\frac{(\Delta_1 - \Delta_2)}{\ln(\Delta_1 / \Delta_2)} \right] \quad (31)$$

ただし向流は、 $\Delta_1 = \theta_{wi} - \theta_{ae}$ 、 $\Delta_2 = \theta_{we} - \theta_{ai}$ とし、並流は、 $\Delta_1 = \theta_{wi} - \theta_{ai}$ 、 $\Delta_2 = \theta_{we} - \theta_{ae}$ とする。

5. 従来の KA と本 UpL の同一性確認

ファンコイルの設計資料³⁾から CP-B 型でユニットサイズ 200 を例にとる。風量 330[m³/h]、入口空気温 $\theta_{ai} = 22[^\circ C]$ 、水量が 2, 4, 6 [L/min]、入口水温 θ_{wi} が 45, 50, 55[$^\circ C$] の其々の条件の交換熱量 Q が読める。また対数平均温度差 Δ_{lm} も計算されるから、(31)式から KA が求められる。一方、(28)式等による相当熱交換コンダクタンスを用いる UpL モデルでは、出入口温度の熱収支式(27)と(29)式が記述でき、前述 KA モデルと同様な条件での UpL が求められる。この試算により例題のファンコイルは向流のモデルが適切と分かった。前述の様々な条件で KA と UpL を求めて比較した表-1 が得られ、両者がほぼ同じであることが確認できた。

表-1 KA と UpL の比較

水量 L	入口水温 $^\circ C$					
	45 $^\circ C$		50 $^\circ C$		55 $^\circ C$	
	UpL	KA	UpL	KA	UpL	KA
2	145.4	145.5	144.9	144.7	144.6	144.5
4	163.1	162.9	163.3	163.1	163.4	163.2
6	171.5	171.4	171.3	171.3	171.3	171.3

6. 流れ方向多分割モデルと本解析モデルの比較

熱・換気回路網計算プログラム NETS を用いて、流れ方向の流体温度変化を、 KA を分割して近似解を得る熱回路網モデルと、本相当熱交換コンダクタンスにより解析解を得るモデルとの比較を行った。前述のファンコイル 200 型について、分割せずに無分割のモデルと、解析解の比較を表-2 に示す。解析解と無分割近似解には大きな差が見られる

表-2 出口温度の解析解と無分割近似解

温水流量 4L/分	並流		向流	
	無分割	解析解	無分割	解析解
空気入口温度 $\theta_{ai} [^\circ C]$	22			
空気出口温度 $\theta_{ae} [^\circ C]$	35.2	38.2	33.1	38.2
温水入口温度 $\theta_{wi} [^\circ C]$	45			
温水出口温度 $\theta_{we} [^\circ C]$	33.1	38.6	40.6	38.6

この近似モデルを解析解の出口温度に近い値にするには向流の場合で 55 分割に、並流の場合は 20 分割にする必要があった。既報²⁾の単一流体の熱交換に比べ桁違いに多くなる。

7. 熱通過/対流比の R_c と R_p

流れ方向の多分割モデルを用いる場合には、既報²⁾の単一流体熱交換器では、管内表面熱伝達対流比で必要な分割数を決められるとした。この二流体熱交換の場合には、前述の指数関数の中身を、並流の熱通過対流比は R_p で、向流は R_c として次式で表し、この大小で分割数評価

に用いることができる。この熱交換器の熱通過対流比は、既報³⁾で定義された管内表面熱伝達対流比 $aS/cp q$ に対応している。

$$R_c = UpL(c_w \rho_w q_w - c_a \rho_a q_a) / (c_a \rho_a q_a \cdot c_w \rho_w q_w) \quad (32)$$

$$R_p = UpL(c_w \rho_w q_w + c_a \rho_a q_a) / (c_a \rho_a q_a \cdot c_w \rho_w q_w) \quad (33)$$

出口温度が解析解にほぼ一致するために必要な流れ方向の分割数が、向流と並流および水量によって、熱通過対流比とどのような関係にあるか調べた結果を図-5に示す。熱通過対流比が大きい程に必要な分割数が少なくてすむ傾向は既報と同様に再確認された。

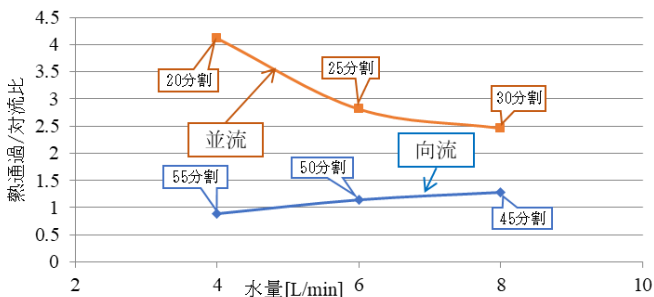


図-5 熱通過/対流比と流れ方向分割数の関係

8. 向流と並流の熱交換効率比較

通常は並流より向流の方が熱交換効率は良いと言われているが、これを試算し検討した。ファンコイル設計資料²⁾の熱交換器は試算すると向流である。そこで(27)式等から求めた UpL を、本数学モデルの並流の式(7)と向流の式(20)に代入し、空気出口温度を求めた。

求めた空気出口温度を用いて交換熱量 $H_e = c_a q_a \rho_a (\theta_{ae} - \theta_{ai})$ を算出し、比較を行った。図-6はユニットサイズ200, $\theta_{ai} = 22[^\circ\text{C}]$, $\theta_{wi} = 45[^\circ\text{C}]$ の場合である。図-7はユニットサイズ1200, $\theta_{ai} = 22[^\circ\text{C}]$, $\theta_{wi} = 60[^\circ\text{C}]$ の場合である。どちらも並流よりも向流が熱交換性能が良いことが示されている。

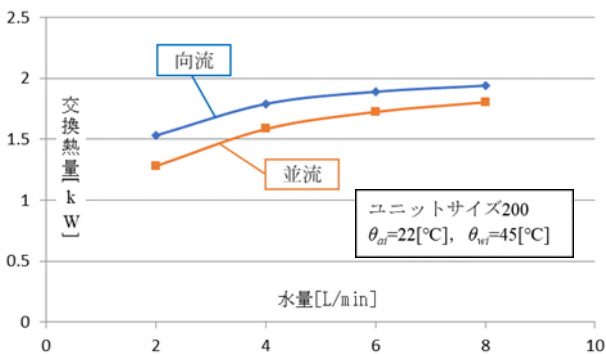


図-6 向流と並流の熱交換性能比較(サイズ200)

9. 空調システムのモデル化の例

参考までに本論の熱交換器モデルを持つ簡単な空調シ

ステムについて、従来の熱交換流れ方向分割モデルと本モデルの比較を図-8に示す。

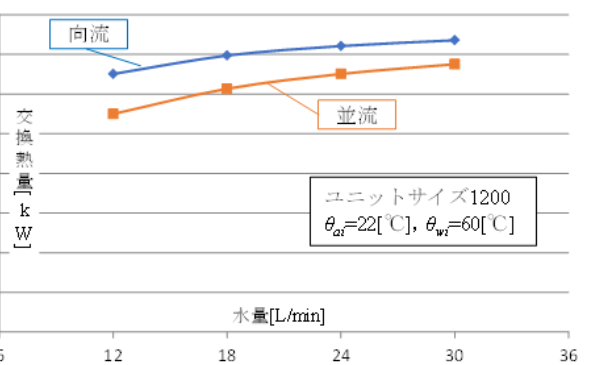


図-7 向流と並流の熱交換性能比較(サイズ1200)

10. まとめ

冷暖房の全体システムの熱回路網の一部に熱交換器を含む場合に、その出入口温度の節点だけで解析解が計算される相当熱交換コンダクタンスを導いた。この係数をカタログ性能値を利用して検証した。従来の熱交換係数 KA は本 UpL と同じであることを確認した。また流れ方向分割モデルと熱通過対流比の関係を調べた。さらに向流型が並流型よりも熱交換性能が良いことが確認できた。

参考文献

- 1) 日本機械学会, 伝熱工学資料・改訂第4版, 1989年7月
- 2) 奥山博康, 熱交換器の管内表面における指数関数の相当熱伝達係数, 建築学会大会梗概集, 2019年9月, 359-360
- 3) 新晃工業株式会社, ファンコイル設計資料, カセット形 CP-B型, 2019年

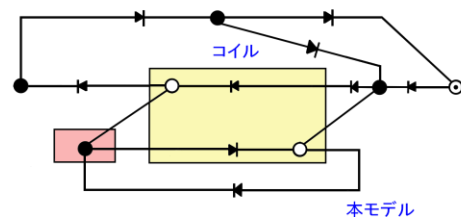
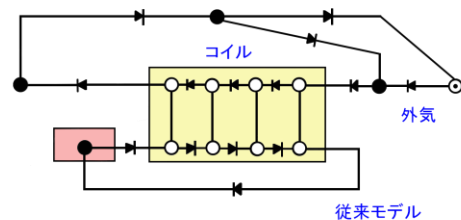
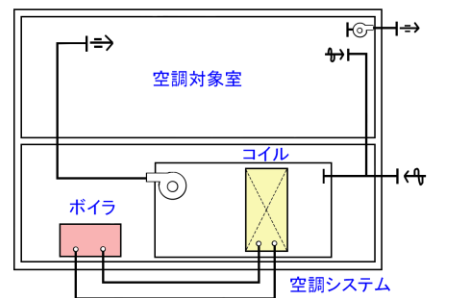


図-8 空調システムの従来モデルと本モデル