C−22　　熱湿気回路網によるシミュレーションの理論

正会員　奥山博康　（清水建設㈱研究所）

1.はじめに　工学的に問題になってくるほとんどの物理現象は注目する物理的状態量に関するベクトル・マトリクス型微分方程式の近似フォーマルモデルをつくることによって電算機シミュレーションが可能である。すなわち伝熱現象は温度を[1]，換気は室内圧を[3 P.30]，流体の流れにおいては速度を[3]状態ベクトルとしてそれらのシステム動的方程式を作ることができ，シミュレーションとはその時間積分の問題に帰着されるのである。筆者は，これまで，そのシステム動的方程式を回路網の概念で一般的に作成するアルゴリズムとその射影分解（スペクトル分解[9 P.144]）によって各固有空間上で時間積分を行う解析積分[4]について主に論じてきた。しかしこれらにおいては状態ベクトル内の要素は全て同種の物理量であった。今回はそのベクトルが二種の物理量である温度と湿度から成るシステムについて論じ，今までの熱回路網が自然な形で熱湿気回路網に拡張できることを示すものである。加えて補足的ないくつかの事柄についても言及する。

2.基礎方程式　現象を記述しておくのは常に分布定数系の偏微分方程式が最も合理的なようである。今回扱うのは前田，松本らにより初期に提示されたところ[5]のハイグロスコピックでかつ静圧差による水蒸気移動がない場合の一次元方程式に限定する。それは(1)，(2)式で示される。

$$(c'\gamma'+\kappa)\frac{\partial X}{\partial t}=\lambda x\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial t}\quad\cdots\cdots\text{（湿気方程式）}\cdots\cdots(1)$$

$$(c\gamma+r\nu)\frac{\partial\theta}{\partial t}=\lambda t\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+r\cdot\kappa\frac{\partial X}{\partial t}\quad\cdots\cdots\text{（熱方程式）}\cdots\cdots(2)$$

X：空隙の絶対湿度（kg／kg′），　γ'：空気密度（kg／m³），　λt：熱伝導率（kcal／mhr℃）
θ：温度（℃），　ν：水蒸気放出率（kg／m³℃），　r：吸着熱（kcal／kg）
c：比熱（kcal／kg℃），　λx：湿気伝導率（kg／mhr（kg／kg′）），　κ：水蒸気吸着率（kg／m³（kg／kg′））
γ：密度（kg／m³），　c'：空隙率（m³/m³），

3.空間離散化　一般的には（もし多元空間の場合等），(1)(2)の連立偏微分方程式を解析的に解くことはできず，有限次元の常微分方程式に近似化することによって解くことが可能となる。そのためには空間離散化をすればよいが，この方法として考えられるのはコントロールボリューム法（以下C.V.法），空間差分法，空間有限要素法の3つがある。C.V.法はより物理的な直観にもとづく方法で特に工学的にマクロな特性値が定義されている場合に有効である。後二者は現象を支配する偏微分方程式に固執するところのより数学的でミクロな方法であるが，重みつき残差法の応用例として広く分類されている。その部分積分を二回行った場合が境界要素法となるが，この方法がどれだけの可能性を持っているかまだ未知[6][7][8]である。ここでは三つの各方法の数式上の比較を行い，結局全体では同様なシステム動的方程式になることを示す。まずC.V.法ではある部分領域V_jにおいて直ちに次の完全システム方程式が成立することが，簡単な物理的考察から明らかである。

$$(c'\gamma'+\kappa)\cdot V_j\cdot\frac{dX_j}{dt}=\sum_{i=1}^{n+n_o}C_{Xij}\cdot(X_i-X_j)+\nu\cdot V_j\cdot\frac{dT_j}{dt}+XG_j\quad\cdots\cdots(3)$$

$$(c\gamma+r\cdot\nu)V_j\cdot\frac{dT_j}{dt}=\sum_{i=1}^{n+n_o}C_{Tij}\cdot(T_i-T_j)+r\cdot\kappa\cdot V_j\cdot\frac{dX_j}{dt}+HG_j\quad\cdots\cdots(4)$$

n：出力節点総数，　XG_j：jへの湿気の自然境界入力，　C_{Xij}：iからjへの湿気コンダクタンス
V_j：j番C.V.の体積（m³），　HG_j：jへの熱の自然境界入力，　X_j：jの湿度
C_{Tij}：iからjへの熱コンダクタンス，　n_o：入力節点総数，　T_j：jの温度

ここに，n_o個の入力節点は固定境界条件と呼ばれているものに相当する。またこのコンダクタンスという概念により伝導のみでなく移流も一般的に扱えるし，静圧差がかかっている場合も非対称なそれを定義することに

より同様に扱える。さらにこのような方程式記述により全体システム方程式作成上も，計算プログラムの汎用性上も都合が良くなる。これは一種のアルゴリズムであるが数学上も重要であることは固有値の性質[④ P.131，P.134]の証明にとっても必要であることから納得されよう。次に空間差分法については簡単のため(2)の熱方程式のみについて検討してみる。

$$(c\gamma + r\nu)\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \lambda_t \frac{\dfrac{\theta_{j+1}-\theta_j}{\Delta x} - \dfrac{\theta_j-\theta_{j-1}}{\Delta x}}{\Delta x} + r\cdot\kappa\cdot\frac{\partial X_j}{\partial t} \qquad \text{（ここに } j \text{ は座標添字）}$$

$$= \lambda_t \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 (\theta_{j+1}-\theta_j) + \lambda_t \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 (\theta_{j-1}-\theta_j) + r\cdot\kappa\cdot\frac{\partial X_j}{\partial t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)'$$

両辺に $\Delta x \Delta y \Delta z = V_j$ を乗ずる。

$$(c\gamma + r\cdot\nu)\cdot V_j\cdot\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \lambda_t \frac{\Delta y\,\Delta z}{\Delta x}(\theta_{j+1}-\theta_j) + \lambda_t \frac{\Delta y\,\Delta z}{\Delta x}(\theta_{j-1}-\theta_j) + r\cdot\kappa\cdot V_j\cdot\frac{\partial X_j}{\partial t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

この(6)式により差分とは(4)式の特殊な場合であることがわかる。さらに有限要素法（ガレルキン法）によって全体方程式の j 行を作ってみる。まず全計算対象領域を要素に分割する。節点はそれらの継目に位置する。各節点において1の値を持ち隣接する節点において0となる一次補間の形状関数（ピラミッドファンクション）を定義する。従って形状関数（一種の基底関数）は節点数分だけできる。計算対象全領域についての状態変数の近似方程式をこの全形状関数と全節点値関数の積和の一次結合によって表わす。この近似方程式をもとの微分方程式に代入したときの方程式誤差に，形状関数をその誤差分布の重み関数として乗じ，全領域で空間積分したものを0とおくことにより決定方程式を得る。次にこの決定方程式に部分積分を行うことにより微分の拘束を弱い形にする。こうして節点値の近似関数は対応する形状関数ごとに決定される。実際は形状関数が一つの要素内で唯一つに定まるので全領域の空間積分は要素毎の積分の直和[⑨]で置き換えられる。その際，近似関数の一次導関数が要素の継ぎ目で連続である仮定が必要である。とにかくこうして j 行方程式は j 節点に継がる各要素からの直和によって次の(7)式となる。同じく熱方程式のみ調べることにする。

$$\frac{1}{6}(c\gamma + r\cdot\nu)(x_j - x_{j-1})\frac{\partial}{\partial t}\cdot\theta_{j-1} + \frac{1}{3}(c\gamma + r\nu)(x_{j+1}-x_{j-1})\frac{\partial}{\partial t}\cdot\theta_j + \frac{1}{6}(c\gamma + r\nu)(x_{j+1}-x_j)\frac{\partial}{\partial t}\cdot\theta_{j+1}$$

$$= \frac{\lambda_t}{(x_j - x_{j-1})}(\theta_{j-1}-\theta_j) + \frac{\lambda_t}{(x_{j+1}-x_j)}(\theta_{j+1}-\theta_j) \qquad \text{（ここに } x_j \text{ 等は } j \text{ 節点の座標値である）}$$

$$+ \frac{1}{6} r\cdot\kappa\,(x_j - x_{j-1})\frac{\partial}{\partial t}X_{j-1} + \frac{1}{3} r\cdot\kappa\,(x_{j+1}-x_{j-1})\frac{\partial}{\partial t}X_j + \frac{1}{6} r\cdot\kappa\,(x_{j+1}-x_j)\frac{\partial}{\partial t}\cdot X_{j+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

以上，(4)，(6)，(7)の式の比較により，いずれの方法によっても節点間の物理過程は定常であり内容も同一であるが，容量の節点への集中化が，C.V.法と差分法では一点集中であり，有限要素法では隣接する節点へも分散することがわかる。実はこの違いが7.で述べるシステム動的方程式の次数の縮小と密接な関連があることが判明しよう。

4 システム動的方程式（System dynamical Equation）　明らかに回路網の概念を明確にうち出した(3)，(4)の完全システム記述による微分方程式はそれのみでシステム動的方程式の j 行を完結して記述している。これに対して有限要素法ではこの方程式構成の回路網の概念が数式記述をもっての明確なアルゴリズムとして示し得ない。強いて言えばそれは直和の概念である。しかし空間離散化の三者いずれの方法によっても最終的には次の(8)，(9)の形のサブシステム動的方程式が得られる。

$$M_X\cdot\dot{\boldsymbol{x}} = C_X\cdot\boldsymbol{x} + V_X\cdot\dot{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{g}_X \cdots\cdots\cdots \text{（湿気サブシステム）} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$M_T\cdot\dot{\boldsymbol{t}} = C_T\cdot\boldsymbol{t} + V_T\cdot\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}_T \cdots\cdots\cdots \text{（熱サブシステム）} \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

$\boldsymbol{x}$ ： 湿度ベクトル $\in R^n$　　$\boldsymbol{t}$ ： 温度ベクトル $\in R^n$
C_X ： 湿気コンダクタンスマトリクス $\in R^{n\times n}$　　C_T ： 熱コンダクタンスマトリクス $\in R^{n\times n}$
$\boldsymbol{g}_X$ ： 湿気流入力ベクトル $\in R^n$　　$\boldsymbol{g}_t$ ： 熱流入力ベクトル $\in R^n$
M_X，M_T，V_X，V_T ： 容量マトリクス $\in R^n$

これら(8)，(9)のサブシステムの連結によって全体システムの動的方程式が直ちに導かれる。

$$\begin{pmatrix} M_X & -V_X \\ -V_T & M_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_X & O \\ O & C_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_X \\ \boldsymbol{g}_T \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (10)'$$

$$M_y \cdot \dot{\boldsymbol{y}} = C_y \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}_y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

ここに $\boldsymbol{y}$ ：状態ベクトル$\in R^{2n}$， $\boldsymbol{g}_y$ ：入力ベクトル$\in R^{2n}$

ここに(10)は(10)'をまとめて記述したものである。C.V.法と空間差分法はこれらの要素内容が全く同じとなる。しかし有限要素法の場合はC_X，C_Tに関しては同じとなるが容量のM_X，M_T，V_X，V_Tが違ってくる。つまりそれらは対角ではなく対称となる。これは(7)式からも，あるいは j 節点の形状関数をN_jとし[⑩]$N_jN_i = N_iN_j$であることからも明らかである。

5. システムの推移特性（固有値の性質）の証明　　各サブシステム(8)(9)をそれぞれ状態推移に関し独立させる。これは例えば(8)式より $\dot{\boldsymbol{x}}$ を表わし(9)式に代入し，(9)の式を $\boldsymbol{t}$ のみの動的方程式にすればよい。すると(11)式となりその $\dot{\boldsymbol{t}}$ にかかる容量行列を(12)とおく。

$$(M_T - V_T \cdot M_X^{-1} \cdot V_X) \cdot \dot{\boldsymbol{t}} = C_T \cdot \boldsymbol{t} + V_T \cdot M_X^{-1} \cdot C_X \cdot \boldsymbol{x} + V_T \cdot M_X^{-1} \cdot \boldsymbol{g}_X + \boldsymbol{g}_T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

$$M_{TS} = (M_T - V_T \cdot M_X^{-1} \cdot V_X) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12) \qquad \alpha_T \cdot M_{TS} \cdot \boldsymbol{p}_T = C_T \cdot \boldsymbol{p}_T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

推移特性を表わす固有値 α_T は(13)式で定義される。ここに $\boldsymbol{p}_T$ は対応する固有ベクトルである。M_{TS} に関しては次の性質がある。すなわちその j 番対角要素 m_{TSj} は

$$m_{TSj} = \left[(c\gamma + r\nu)_j - r \cdot \kappa_j \frac{1}{(c'\gamma' + \kappa)_j} \nu_j \right] V_j = \frac{V_j}{(c'\gamma' + \kappa)_j} (c\gamma \cdot c'\gamma' + c\gamma \cdot \kappa + c'\gamma' r\nu)_j > 0 \quad \cdots\cdots\cdots (14)$$

と正値性が証明できる。一方，C_T は伝導のみの系では対称となることは明らかであり[④]，対称行列の固有値が実負であることも明らかである。[④] そこでこれに対する相似性を言うために M_{TS} をコレスキー分解[④P.131](15)すれば，そのマトリクスは(16)の内容となる。

$$M_{TS} = S \cdot {}^tS \quad \cdots\cdots\cdots (15) \qquad S = (\delta_{ij} \cdot \sqrt{m_{TSj}}) \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

（δ_{ij} ：クロネッカーのデルタ
t ：transpose ⑨ p.37）

さて固有ベクトルを新たに $\boldsymbol{q}_T = {}^tS \cdot \boldsymbol{p}_T$ とおいて(13)式の両辺に左方から S^{-1} を乗じれば

$$\alpha_T \cdot S \cdot {}^tS \cdot \boldsymbol{p}_T = C_T \cdot \boldsymbol{p}_T, \quad \alpha_T \cdot {}^tS \cdot \boldsymbol{p}_T = S^{-1} \cdot C_T \cdot ({}^tS)^{-1} \cdot {}^tS \cdot \boldsymbol{p}_T, \quad \alpha_T \cdot \boldsymbol{q}_T = S^{-1} \cdot C_T \cdot ({}^tS)^{-1} \cdot \boldsymbol{q}_T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

(17)の右辺，$\boldsymbol{q}_T$にかかるマトリクスはC_Tが対称であれば対称となることは明らかであるからα_Tの実負は証明された。有限要素法の場合は M_{TS} は実対称行列であり正値であることが言えるから同様にコレスキー分解をすることによりその固有値の実負が証明できる。以上の証明は(8)に対しても同様に行える。従ってこの熱湿気系も，熱系のみと同様な物理的特性を持つことが証明されたことになる。

6. 射影分解による解析時間積分　　これも論文④で提示した公式を一般としてとらえれば，そのままこの系にも適用できるものである。ただし固有値解析はシステム動的方程式の次数が大きくなると数値解析でしか達成できないから論文④ではこの意味で数値積分と称した。従って以下に細部は論文④にゆずりその要点のみを繰り返す。(10)式の形式解は次の(18)式のように表わされる。

$$\boldsymbol{y}(t) = \phi(t - t_0) \cdot \boldsymbol{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t - \tau) \cdot \boldsymbol{g}_y^*(\tau)\, d\tau \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

$\boldsymbol{g}^* = M_y^{-1} \cdot \boldsymbol{g}_y \in R^{2n}$

ϕ は $\boldsymbol{y}$ に関する状態推移行列$\in R^{2n\times 2n}$

状態推移行列はState Transition Matrix の訳である。他の研究者によっては遷移行列とも呼ばれているが，遷移とは学術的にはある定常状態から別の定常状態への移り変わりを意味するものと思われ，[⑪⑫⑬⑭] ϕは，非定常過程の，状態の推移を定式化しているものと考えれば推移行列と呼ぶのが最も妥当と考える。さてこの形式解では実際の積分を行うことはできない。そこでϕを各固有空間へ射影分解すれば，その空間上でϕは陽な関数となり実際の積分が可能となる。またその定式化は著者が提示した回路網の記述法で，はじめて一般的になしうるというのが論文④の一つの論旨であった。すなわち固有値α_iに対応する射影子[⑨P.152]をP_iとして

$$\boldsymbol{y}(t)=\sum_{i=1}^{2n} P_i \cdot e^{\alpha_i(t-t_0)} \cdot \boldsymbol{y}(t_0)+\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{2n} P_i \cdot e^{\alpha_i(t-\tau)} \cdot \boldsymbol{g}_y^*(\tau)\, d\tau \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

となる。従って $\boldsymbol{g}_y(\tau)$ が解析関数であれば時間積分は解析的に行える。特にこれが有効になってくるのは周期関数の入力があり，無限時間経過した後の状態を計算する場合などである。[⑮P.33] このとき α_i の実部の負が証明されていることにより(19)式の右辺第一項は0となり，第二項の定常項のみの計算となる。またもし $\boldsymbol{g}(\tau)$ が数式記述できないランダムな連続データであれば，まず時間的離散データになおし，その2点間を線型積分するか，階段関数積分するかによって有用な時間積分公式を作っておくことができる。[④] 前者に対しては

$$\boldsymbol{y}(k\Delta t)=\phi(\Delta t)\cdot\boldsymbol{y}((k-1)\Delta t)+U_0\cdot\boldsymbol{g}_y^*((k-1)\Delta t)+U_1\cdot\boldsymbol{g}_y^*(k\Delta t) \quad \cdots\cdots (20)$$

ここに $U_0=\sum_{i=1}^{2n} P_i \cdot a_{i0}$

$U_1=\sum_{i=1}^{2n} P_i \cdot a_{i1}$

ただし

$$a_{i0}=-\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2\cdot e^{\alpha_i \Delta t}+\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)e^{\alpha_i \Delta t}, \qquad a_{i1}=\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2 e^{\alpha_i \Delta t}-\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)$$

また後者に対しては直ちに次式となることが計算される。

$$\boldsymbol{y}(k\Delta t)=\phi(\Delta t)\cdot\boldsymbol{y}((k-1)\Delta t)+U_u\cdot\boldsymbol{g}_y^*(k\Delta t) \quad \cdots\cdots (21)$$

ここに

$$U_u=\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \sum_{i=1}^{2n} P_i \cdot e^{\alpha_i(k\Delta t-\tau)}\, d\tau =\sum_{i=1}^{2n} P_i \left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\left(e^{\alpha_i \Delta t}-1\right)$$

また論文④には近似積分として推移安定性のあるクランク・ニコルソン・スキームについても，本回路網の記述法により最も一般的な形として，その証明を含め，論じてある。[④P.134]

7.システム動的方程式の次数の縮小法　　この問題は，はじめに振動解析の分野において計算経済性を向上するために J.N.Ramsden と J.R. Stoker[⑯] および Bruce Irons[⑰⑱] らによって考えられた。それは振動の支配方程式はニュートンの物理次元で成り立っているため，この両辺にひずみ（m）を乗じてつくるエネルギーを最小にするように近似方程式を実現するというものである。しかし(10)式の系では，このような物理的考察によるのではなく，より一般的に，時間領域での重みつき残差積分から導いた方が納得しやすい。[⑮P.34]

8.まとめ　　当現象をシミュレーションするためのシステム動的方程式を作る方法として C.V.法，空間差分法，空間有限要素法をあげ，その数学的な類似点と相異点を論じた。またこのシステムの状態推移特性に関する証明を行った。最終的には全て(10)式の微分方程式に帰着し，射影分解による解析的時間積分[④]が行えることも述べた。

9.参考文献　　①1976，建築学会全国大会「熱回路網数値解析法による自然空調に関する研究」木村，奥山，②S.56－3通産省工技院委託「省エネルギ用建材及び設備等の標準化に関する調査研究報告書」建材試験センター，③1981，建築学会全国大会「蓄熱槽の数値解析」奥山，④1978－7，Vol.269 建築学会論文報告集「建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間数値積分公式」奥山，木村，⑤1965－9，建築学会論文報告集，号外，「吸放湿に及ぼす吸着熱の影響」前田，松本，その他 ⑥1982－6，建築学会近畿支部「熱水分同時移動系の積分方程式による解析」松本，芝池，⑦「境界要素法入門」C.A.ブレビア（培風館），その他，⑧1978－Dec.「Elements of Bond Graph Simulation Language for Passive Solar Heating System Design」M.Hubbard, J.W. Brewer. ASME. 78－WA/Sol－14，⑨「線型代数入門」斉藤正彦，東大出版会，⑩「マトリックス有限要素法」O.C.ツェンキービッツ（培風館），⑪「広辞苑」（岩波書店）遷移：③，⑫「化学ハンドブック」（オーム社）P.6，遷移：エネルギー準位の変化，⑬「化学工学便覧（改訂四）（丸善）P.142，P.276，遷移：定常過程として流れの性質の変化，⑭「流体力学の進歩，乱流」谷一郎（丸善）P.50 遷移：層流から乱流への変化，⑮②と同じくS.57－3，⑯1969「Mass Condensation：A Semi－Automatic Method for Reducing the Size of Vibration Problems」International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.1, 333－349，⑰「Structural Eigenvalue Problems：Elimination of Unwanted Variables」AIAA, Journal, Vol.3, №5, May, 1965，⑱「Eigenvalue Economisers in Vibration Problems」Journal of the Royal Aeronautical Society. Vol.67, Aug.1963，⑲1982－10，建築学会全国大会「熱水分同時移動の解析法について」奥山