B－28

熱回路網の概念による各種の集中定数化法の統一

正会員　奥 山 博 康　清水建設㈱技術研究所

1. はじめに　伝熱解析について，有限要素法，差分法，検査体積法などによって得られる計算モデルは，集中定数系として本質は同じものである。また計算対象物の全体を1つの方法でモデル化するのではなく，それぞれの部分に適した方法でモデル化したものを接続し，合成し，あるいは補ったりした方が合理的な場合も少なくない。このためには，これらの方法を統一的にとらえる理論が必要である。本論文では既報[1]で述べている本熱回路網の概念による完全システムの定式化法と状態方程式，およびシステムパラメーターという共通言語によって，接続性と互換性を実現する統一的な世界が開かれることを論じるものである。

2. 一般化節点方程式　本論文では，集中定数系(Lumped Parameter System)を，分布定数系(Distributed Parameter System)に対する意味で用いる。普通は偏微分方程式で表わされる支配方程式を空間的に離散化(Spacial Discritization)して得られる集中定数系が唯一のように論じられる。しかし既報で述べた検査体積法のように，座標系にとらわれずに集中定数化する方法も存在する。また建築分野の場合，分析的なモデル化の方法よりは，総合的な方法の方が，より良い結果をもたらす場合が多いことも論じてきた[2]。こうした意味で検査体積法は有用である。既報[2]では，熱容量$m_{i,i}$，拡張熱コンダクタンス$c_{i,j}$，自由入力係数$r_{i,j}$の3種のパラメーターを用いて節点方程式を記述した。本報では$m_{i,i}$について拡張熱容量$m_{i,j}\ (i \neq j)$を定義し，また(1)式の一般化節点方程式を定める。しかしこれらから自動的に構成される状態方程式(2)は従来と同一である。ただしマトリクスMには非対角要素も存在することになる。

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\cdot\dot{x}_j=\sum_{j=1}^{n+n_o} c_{i,j}\cdot(x_j-x_i)+\sum_{j=1}^{ng} r_{i,j}\cdot g_j \quad\cdots\cdots (1)\qquad M\cdot\dot{\boldsymbol{x}}=C\cdot\boldsymbol{x}+C_o\cdot\boldsymbol{x}_o+R\cdot\boldsymbol{g}\quad\cdots\cdots (2)$$

3. 各種の集中定数化法によるシステムパラメーター　検査体積法については既報[1]の説明によることとし，差分法と有限要素法について述べる。どちらからも共通言語としてのシステムパラメーターを出すためには，次の約束$R1$, $R2$, $R3$が必要である。$R1$：偏微分方程式で表わされる支配方程式は温度θの時間微分$\partial\theta/\partial t$に比熱と密度が乗じられた形のものとする。従ってその方程式の単位はW/m^3となる。$R2$：節点番号の付け方について，未知数の温度のものは前詰めにし，既知数の温度のものは後詰めにする。それぞれの個数をnとn_oとすれば，前者は1からn，後者は$n+1$から$n+n_o$とする。$R3$：空間的に隣接していない節点間，あるいは実質上，熱的に接続していない節点間にも，0の拡張熱コンダクタンスが仮想上存在するものとみなす。の3つの約束をする。さらに細かい約束が有限要素法に課せられるが，これは(2)式における駆動マトリクスC_o, Rを定式化するために必要なものであり，後述する。まず差分法については概略的に述べる。$R1$に従って支配方程式を節点iの近傍で差分化し，両辺に$\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$を乗じる。隣接する節点を$x$方向で$j_1, j_2$，$y$方向で$j_3, j_4$，$z$方向で$j_5, j_6$とする。

$$\begin{aligned}\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot c_p\cdot\rho\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial t}&=\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta x}\cdot\lambda\cdot(\theta_{j1}-\theta_i)+\frac{\Delta y\cdot\Delta z}{\Delta x}\cdot\lambda\cdot(\theta_{j2}-\theta_i)\\&+\frac{\Delta x\cdot\Delta z}{\Delta y}\cdot\lambda\cdot(\theta_{j3}-\theta_i)+\frac{\Delta x\cdot\Delta z}{\Delta y}\cdot\lambda\cdot(\theta_{j4}-\theta_i)\\&+\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\Delta z}\cdot\lambda\cdot(\theta_{j5}-\theta_i)+\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\Delta z}\cdot\lambda\cdot(\theta_{j6}-\theta_i)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)\end{aligned}$$

空気調和・衛生工学会学術論文集('86.10.2～10.4新潟)

ここに cp, ρ, λ はそれぞれ，比熱，密度，熱伝導率である。明らかに伝導体内での $c_{i,j}$ は，$\lambda\cdot\Delta y\cdot\Delta z/\Delta x$，$\lambda\cdot\Delta x\cdot\Delta z/\Delta y$，$\lambda\cdot\Delta x\cdot\Delta y/\Delta z$ のような形になる。そして $m_{i,i}$ では $cp\cdot\rho\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$ である。伝達境界条件式についても差分化すれば容易に $c_{i,j}$ が $\alpha\cdot\Delta y\cdot\Delta z$，$\alpha\cdot\Delta x\cdot\Delta z$，$\alpha\cdot\Delta x\cdot\Delta y$ のようになることがわかる。ここに α は伝達率である。$r_{i,j}$ については，例えば g_j がある面への単位面積当りの日射量であって吸収率が a であれば，$a\Delta x\cdot\Delta y$ のようになる。より興味深いのは有限要素法についてである。標準的な有限要素法の教科書では，境界条件から出てくる(2)式の駆動マトリクス Co, R の定式化がなされていない。入力ベクトル $\boldsymbol{f}$[1] でまとめて論じられている。そこでこれを行うために次の細かい約束をもうける。i 番要素のある面が外部の規定温度節点の j 番に接しているときの伝達率を $\alpha_{i,j}$ とし，もしこの要素が伝達境界を持たないときには 0 であると約束する。同様に，i 番要素のある面が，日射成分 g_j による吸熱をするとき，これに対する吸収率を $a_{i,j}$ とし，もしこの要素が吸熱面を持たないときには 0 であると約束する。さて i 番要素が ne 個の節点で構成され，これらに対応する ne 個の形状関数を持つ行マトリクスを W_i とする。このときマトリクス M, C, Co, R は次式で計算される[4]。

$$M=\sum_i^{*}\int_{v_i} cp_i\cdot\rho_i\cdot{}^tW_i\cdot W_i\ dv \qquad (4)$$

$$C=-\sum_i^{*}\int_{v_i}\lambda_i\left(\frac{\partial {}^tW_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial W_i}{\partial x}+\frac{\partial {}^tW_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial W_i}{\partial y}+\frac{\partial {}^tW_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial W_i}{\partial z}\right)\cdot dv-\sum_i^{*}\sum_{j=n+1}^{n+n_o}\int_{s_i}\alpha_{i,j}\cdot{}^tW_i\cdot W_i\cdot ds \qquad (5)$$

$$Co=\left[\sum_i^{*}\int_{s_i}\alpha_{i,n+1}\cdot{}^tW_i\,ds,\cdots,\sum_i^{*}\int_{s_i}\alpha_{i,n+n_o}\cdot{}^tW_i\,ds\right] \qquad (6)$$

$$R=\left[\sum_i^{*}\int_{s_i}a_{i,1}\cdot{}^tW_i\,ds,\cdots,\sum_i^{*}\int_{s_i}a_{i,ng}\cdot{}^tW_i\,ds\right] \qquad (7)$$

ここに n_g は日射成分の総数を表わす。また cp_i, ρ_i, λ_i はそれぞれ i 番要素の比熱，密度，熱伝導率である。$\sum^{*}$ はマトリクス上で重ね合せていくことを意味する。もし内部発熱する要素があれば(7)式において積分を要素内全領域にする。有限要素法からのシステムパラメーターはこれらのマトリクスの要素として次のように得られる

M の i 行 j 列要素 ⇨ $m_{i,j}$ ， $\left[\begin{array}{c|c} C & Co \\ \hline {}^tCo & \boldsymbol{O}\end{array}\right]$ の i 行 j 列要素（$i \neq j$） ⇨ $c_{i,j}$，R の i 行 j 列要素 ⇨ $r_{i,j}$

4. いくつかの重要な性質の証明　$Pr1$：まず M の正定値を証明しておく。これは当論文の主旨とは直接的関係はないが，先行する主論文[3) P.114]の不備を補うためである。検査体積法と差分法ではそれが明らかである。有限要素法では M は各要素からの重ね合せで出来ているから 1 つの要素から成る部分マトリクスについて証明すれば十分である。W_i の要素である ne 個の形状関数の性質として，これらの和は要素内で常に 1 である。従って $\mathbf{1}$ を全要素が 1 の ne 次のベクトルとして(8)式が成立する。任意の ne 次のベクトル $\boldsymbol{Pe}$ であっても正則マトリクス Q によって，$Q\cdot\boldsymbol{Pe}=\mathbf{1}$ とできる。従って(9)式が成立し，これはそれが正定値であることも示している。

$${}^t\mathbf{1}\cdot\int_{v_i}cp\cdot\rho\cdot{}^tW_i\cdot W_i\,dv\cdot\mathbf{1}=cp\cdot\rho\cdot v_i>0 \;\cdots(8)\quad {}^t\boldsymbol{Pe}\cdot{}^tQ\cdot\int_{v_i}cp\cdot\rho\cdot{}^tW_i\cdot W_i\,dv\cdot Q\cdot\boldsymbol{Pe}=cp\cdot\rho\cdot v_i>0 \qquad (9)$$

$Pr2$：有限要素法についても(1)式が成立することの証明を行う。この左辺は明らかである。また右辺の第 2 項も明らかに成立する。問題は右辺第 1 項の成立である。これはマトリクス $[C,\ Co]$ の各行の総和が 0 になることを示せばよい。まず(2)式を(10)式のように書き改める。

$$M \cdot \dot{x} = [\,C,\ Co\,] \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_o \end{bmatrix} + R \cdot g \quad \cdots\cdots \ (10) \qquad [\,C,\ Co\,] \cdot \mathbf{1} = 0 \quad \cdots\cdots \ (11)$$

ここで物理現象としてのある状態を考える。それは全ての節点の温度が全て1で等しく，gも0の状態である。この場合は系のどこにも熱流は生じないので温度の時間変化も0である。この状態を記述すれば(11)式となる。ここに$\mathbf{1}$は$n+no$次の全要素が1のベクトルである。この式はすなわち，各行の和が0になることを示している。$Pr3$:(2)の状態方程式は時間微分方程式であるから時間積分することによってシミュレーションが行われる。主論文[5)]では固有値解析をもとに，射影分解によって解析的な時間積分を提示しているものであるが，時間差分の安定性についても論じている[5)P.134]。しかしその議論はMが対角マトリクスの場合について行われたので，有限要素法による場合について補足しておく。この場合は左方からM^{-1}をC, Co, Rに乗じた後のマトリクスをC^*, C_o^*, R^*とし，これらのシステムパラメーターを$c^*_{i,j}$, $r^*_{i,j}$と表わす。(11)式の左方からM^{-1}を乗じることにより，拡張コンダクタンスについての質量保存則と同様に(12)式が成立する。また(13)式も成立する。

$$\sum_{j=1}^{n+no} c^*_{i,j} = \sum_{j=1}^{n+no} c^*_{j,i} \quad \cdots\cdots \ (12) \qquad \dot{x} = C^* \cdot x + C_o^* \cdot x_o + R^* \cdot g \quad \cdots\cdots \ (13)$$

従って既報の証明[5)P.134]は全て，$m_{i,i}$を1に，$c_{i,j}$を$c^*_{i,j}$に置き換えて考えれば成立する。例えば，前進差分の漸化式における近似推移マトリクスが絶対値1より小の固有値を持つために，非負行列の条件から(14)式の安定条件が導かれる。また後退差分の近似推移マトリクスの固有値βについて(15)式が成立するから，これは$0<\beta<1$を示しており，無条件安定が示される。

$$1 - \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n+n_o} c^*_{j,i} \geq 0 \quad \cdots\cdots \ (14) \qquad 1 + \Delta t \cdot \sum_{j=n+1}^{n+no} c^*_{j,i} < 1/\beta \quad \cdots\cdots \ (15)$$

解析的積分を行う際の固有値についても，Mが正定値でCが負定値[3)P.114]であるから，${}^tC = C$の対称性を持つ系[1)P.543]では実負が，移流を持つ系では実部の負が示される。

5. 接続の具体例　統一の一般論の前に，簡単な具体例について述べておく，図1は伝導体の内部に空洞がある場合を示す。空洞内の表面間では輻射伝熱も考慮するものとする。もちろん空洞の空気温度は未知数とする。従って，ここで空洞のモデル化の2つの選択が存在する。1つは空洞内の空気の流れの運動方程式とエネルギー方程式を記述し，これを空間的に離散化して，精密なモデルをつくるものであり，もう1つは，空洞は1個の熱流の検査体積としたマクロなモデルにしてしまうものである。もし前者の方向をとるなら，内表面の対流熱伝達率まで演繹的にシミュレートする必要がでてくる。なぜなら対流伝達率はそもそもマクロで工学的な経験値だからである。後者の方向はこうした経験値をフルに使うことによって出来るだけ簡単なモデルにしようとするものである。当然のことながら，どちらの方向をとるかは最終的な目的によって決めるべきものである。ただし，もしこの空洞が建築室内空間のような場合，建築設備的な目的においては，後者のモデル化をとるのが通常である。さてこの例では伝導体内は有限要素法で，空洞は検査体積法でモデル化する。有限要素法でシステムパラメーターを作る際，空洞は規定温度を持つもの

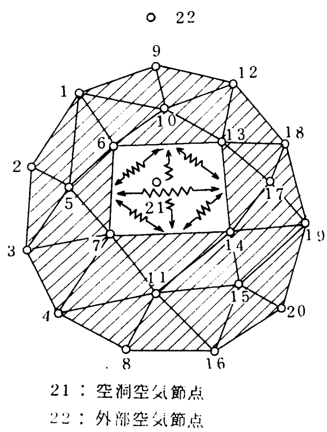

図1　有限要素法と検査体積法の接続

とし，約束$R2$によってこの空気温度と外部空気温度は後ろ詰めの21と22の節点番号を持つとする。この段階では$n=20, n_o=2$である。次に検査体積法によって空洞空気の熱容量$m_{21,21}$と内表面間における輻射の拡張コンダクタンスをつくる。これらは$c_{6,7}$，$c_{6,14}$，$c_{6,13}$，$c'_{7,14}$，$c_{7,13}$，$c_{14,13}$で表わされる。これらは全て対称性を持つ。そしてシステムパラメーターでの加え合せを行う。$c_{6,7}$，$c_{7,14}$，$c_{14,13}$，$c'_{6,13}$については同じ添字の組み合せを持つものが有限要素法からも得られているから，このようなものは加え合せを行うことになる。こうして全体システムでのパラメーターがそろえば，単に$n=21$，$n_o=1$として，(1)式により全体の状態方程式モデルが自動的に再構成されることになる。

6. 統一の一般論　　前述した簡単な例では特に必要はなかったが，一般論のためにはもう1つの概念が必要である。それは部分(Local)節点番号と，全体(Global)節点番号の考え方である。個々の集中定数化の方法は一般に部分節点番号において行われるものと考える。従ってこれらから得られるシステムパラメーターどおしの互換を行うためには，全体モデルでの節点番号へ，それぞれのパラメーターの添字番号を改番(Renumbering)する必要がある。この後であれば，同じ添字番号を持つものの間で，加え合せや，交換，削除などが機械的に行える。そして最後に，完全システムでの一般化節点方程式(1)によって全体の状態方程式モデルが自動的に構成される。ただし有限要素法によるマトリクスCの対角要素はシステムパラメーターと定義しないことに留意する。なお，全体の状態方程式を構成するのではなく，部分毎の状態方程式を接続する理論については，出力方程式の直和による方法として既報[6)P.462]に述べてある。

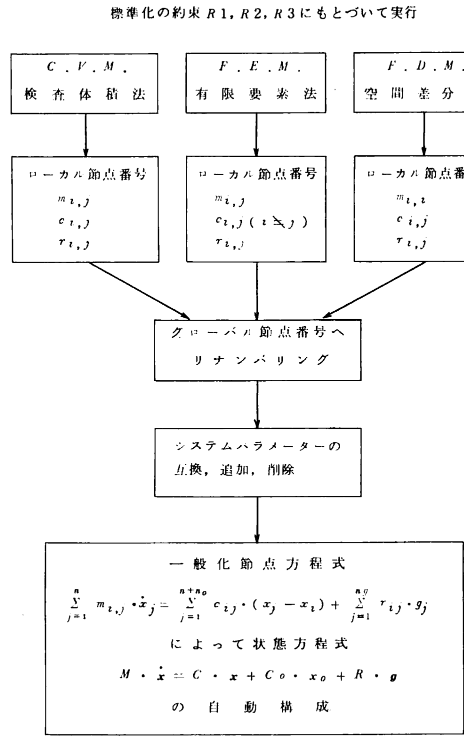

図2　各種の集中定数化法の統一

7. 結　論　　各種の集中定数化法を統一する理論について論じた。検査体積法，有限要素法，空間的差分法など，各々からシステムパラメーター$m_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}$なる共通言語におとすことができる。この共通言語上で，互換，追加，削除などを行ったのち，全体モデルのサイズn, n_o, n_gを与えれば，熱回路網の概念による一般化節点方程式によって，状態方程式モデルが自動的に構成される。このようにして各々の方法の欠点を補ったモデル化をすることが可能となる。

＜参考文献＞　1) 奥山「熱回路網によるシミュレーションの理論と応用」空調学会学術論文集，'83,10月,P541　2) 奥山，藤井「回路網モデルによる建築環境シミュレーションプログラムの開発（その1：プログラム体系と適用事例）」空調学会学術論文集，'85，9月，P123　3) 奥山「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論」建築学会論文報告集，第344号，'84，10月，P103　4) 奥山「同（その2：有限要素法によるシステムパラメーターの逆探問題への適用）」建築学会学術講演梗概集，'84,10月，P657　5) 奥山，木村「建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間数値積分公式」建築学会論文報告集，第269号，'78,7月，P127　6) 奥山「空調システムシミュレーションの理論とアルゴリズム」空調学会学術論文集，'82,10月，P461