

1.はじめに

本研究での熱回路網モデルは検査体積法だけでなく、差分法や有限要素法などの各種の集中定数化法によるモデルを広く包括する枠組みで定義している。しかし、いずれにせよ実物の連続体からモデルとしての集中定数系への近似誤差は避けられないものであるから許容できる誤差に納めるための空間的な分割粗さの指針が必要である。このための検討は既にいくつか行われているが、時間積分には差分近似などが用いられているなど誤差が混じってしまい正味のその誤差の検討としては不十分であったようである。本数値実験の検討では解析的時間積分法を用いるので時間積分誤差の悪影響はない。さらに空間差分モデルと有限要素モデルの違いも調べられてきてはいるが、単に計算結果の比較にとどまっていたようである。本論文では伝熱系の状態方程式の固有値の大小比較という面から、より一般的な考察を試みる。以上の各種の検討はあくまでも分布定数系の偏微分方程式の解析的な精解を基準として行う。

2.数値実験の試験体と精解

基準とする数学的な解析解に近い精解が得られるのは1次元多層壁体などの単純な伝熱系である。そこで図1のような断面仕様を持つ壁を仮定して試験体とした。各層の厚みや物性値は図中に示す。最初はこの伝熱系全てが0℃とする。左側の空気温度に0時刻を境にして1℃上昇するステップ関数の温度変化を与える。右側の空気温度は常に0℃とする。このとき両表面の熱流や温度に注目して計算する。熱流の精解はL.A.Pipesのモデル¹⁾から得られる。その指数関数の無限級数は吸熱応答と真流応答それぞれ次式で表される。

$$q_{ua} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \exp(\alpha_i \cdot t) \quad (1)$$

$$q_{ut} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot \exp(\alpha_i \cdot t) \quad (2)$$

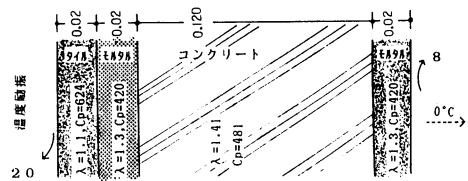


図1 壁の試験体

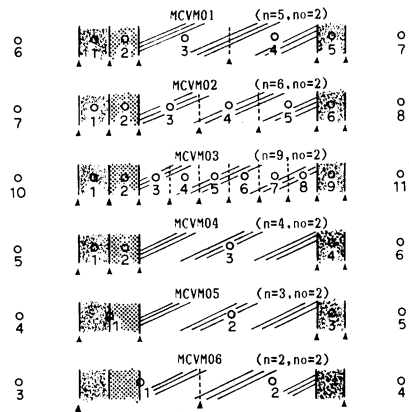


図2 検査体積法モデル

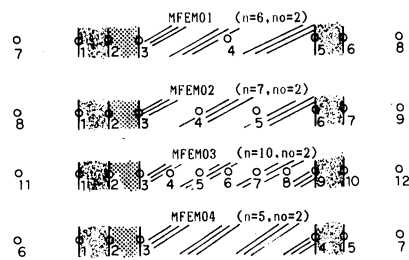


図3 有限要素法モデル

表1 精解の級数

i	α_i	a_i	b_i
1	0	3.235720	3.235720
2	-0.222327	7.012840	-4.498580
3	-1.408150	4.016680	1.809410
4	-4.011040	2.027010	-0.821219
5	-8.187000	0.946502	0.424417
6	-14.236800	0.490760	-0.245627
7	-22.082500	0.350464	0.167520
8	-31.301400	0.304266	-0.126403
9	-41.882100	0.235958	0.093832
10	-54.501300	0.163360	-0.067737
11	-69.206300	0.126070	0.051728
12	-85.416100	0.105152	-0.042022
13	-103.243000	0.0810106	0.034466
14	-123.242000	0.0633472	-0.029135
15	-144.946000	0.0599034	0.026660
16	-167.304000	0.0615931	-0.024955
17	-190.630000	0.05223071	0.021579
18	-216.590000	0.0387123	-0.017426

式中の根 α_i 、係数の a_i, b_i はニュートン法によって数値的に求めた。²⁾これを α_i の大きさにより十分と思われる程度に18項の有限項近似をした。結果を表1に示す。

3. 集中定数系モデル

有限要素法、差分法あるいは検査体積法は単にパラメーター m_{ij}, c_{ij}, r_{ij} をつくるための方法とみなすことができ、これらのパラメーター上で互換性を持つこともできる。³⁾そして結局熱回路網の定式化法により一般的な状態方程式が構成される。差分法と検査体積法は本質的に同じなので後者をとりあげ、図2のように分割粗さによって6通りのモデルを作製した。有限要素法によるものは少なくとも1つの層は1つの要素にしなければならないが、図3のように4通り作製した。いずれも n は未知温度の節点数を表し、 n_0 は既知温度の節点数を表す。この時間積分を射影分解による解析的時間積分⁴⁾で行う場合には固有値解析をすることになる。各々のモデルについての固有値を表2と表3に示す。絶対値の小さな方の固有値はいずれのモデルにおいても同程度の大きさを持つ。計算結果に最も大きな影響を及ぼすのはこれらの固有値である。逆に大きな方の固有値は比較的に高周波の入力成分によってはじめて結果に影響を及ぼすものと考えられる。検査体積法と有限要素法の固有値を、例えば MCVM02 ($n=6$) と MFEM01 ($n=6$) の同じ節点数のものどうしで比較すると、有限要素モデルは絶対値が小さなものから大きなものまで範

表2 検査体積法モデルの固有値

MCVM01		MCVM03		MCVM05	
1	-0.21492	1	-0.22135	1	-0.19301
2	-1.3184	2	-1.3735	2	-1.6874
3	-3.3304	3	-3.7485	3	-3.5589
4	-6.2197	4	-7.2641		
5	-15.277	5	-11.877		
		6	-17.012		
		7	-21.868		
		8	-25.807		
		9	-28.400		
MCVM02		MCVM04		MCVM06	
1	-0.21893	1	-0.19440	1	-0.19944
2	-1.3561	2	-1.9028	2	-0.95546
3	-3.5744	3	-3.5624		
4	-5.8904	4	-13.889		
5	-9.2753				
6	-16.769				

表3 有限要素法モデルの固有値

MFEM01		MFEM03	
1	-0.22647	1	-0.22286
2	-1.5038	2	-1.4340
3	-4.7015	3	-4.2313
4	-12.634	4	-9.0878
5	-41.340	5	-16.856
6	-50.599	6	-28.093
		7	-42.280
		8	-58.703
		9	-76.126
		10	-87.982
MFEM02		MFEM04	
1	-0.22425	1	-0.23911
2	-1.4635	2	-1.5120
3	-4.4806	3	-8.6893
4	-10.437	4	-34.622
5	-19.164	5	-48.556
6	-48.999		
7	-53.460		

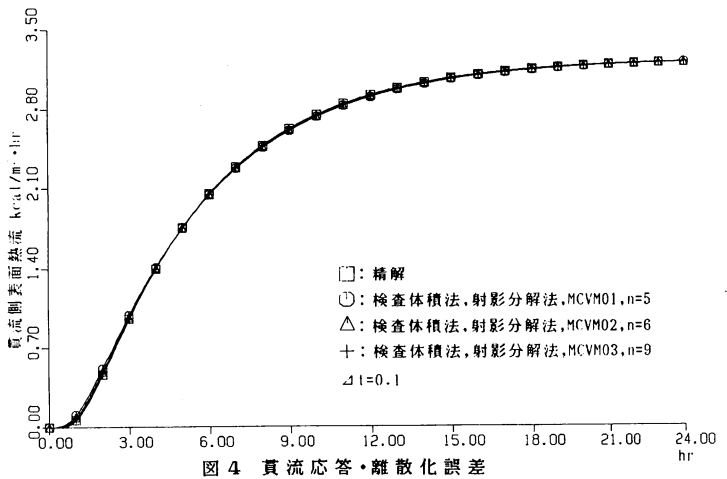


図4 貫流応答・離散化誤差

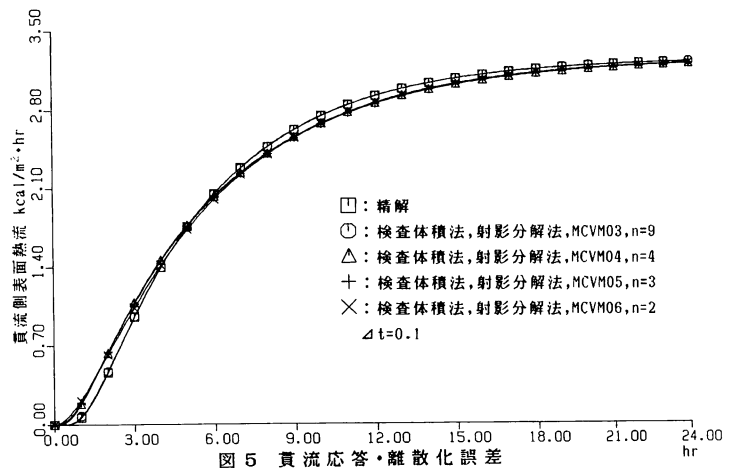


図5 貫流応答・離散化誤差

図が広い。

4.空間的離散化誤差

空間的な分割の粗さによる誤差の検討をする。用いるモデルは節点数について広い範囲をとれる検査体積法によるものとする。時間積分についての誤差があってはならないから、射影分解による解析的積分のうち、ステップ入力に対する漸化式⁵⁾を用いる。これは Δt を大きくとっても正確な値を出す。グラフ上の変化を詳しく見るために $\Delta t=0.1\text{hr}$ とする。計算結果のグラフは全てのモデルを同時に描くと見にくいので、2つのグループに分けて示す。1つは精解、MCVM01($n=5$)、MCVM02($n=6$)とMCVM03($n=9$)のグループであり、もう1つは精解、MCVM03($n=9$)、MCVM04($n=4$)、MCVM05($n=3$)とMCVM06($n=2$)である。前者のグループは図4、後者のグループは図5に示す。紙面の都合で貫流応

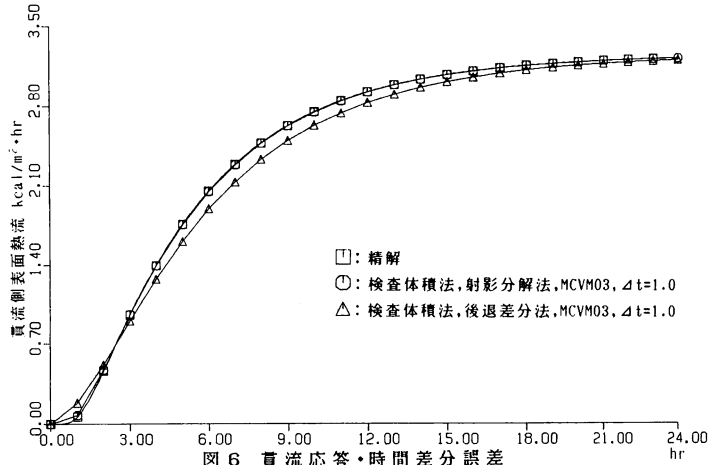


図6 貫流応答・時間差分誤差

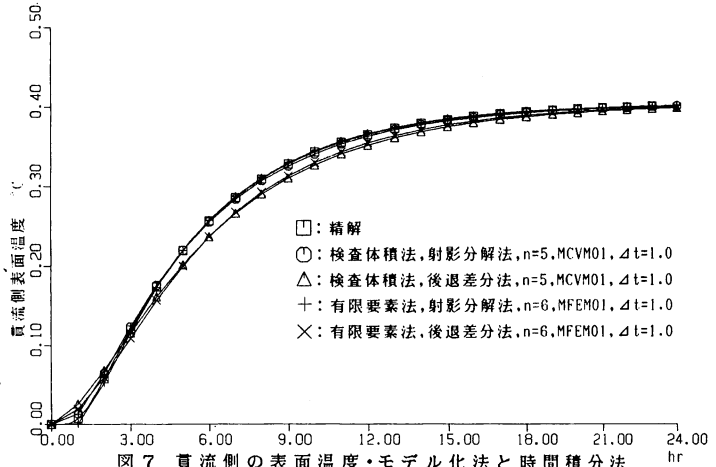


図7 貫流側の表面温度・モデル化法と時間積分法

答についてだけ示す。これらの結果を見ると節点数 $n=5\sim 9$ のものとは $n=2\sim 4$ との間に大きな差異を読み取ることが出来る。前者の分割粗さであれば、ほとんど精解に一致している。ところが後者の分割数になると急に精解との違いが目立ち始める。これらのことからコンクリートのように比較的熱容量のある材質の場合、5 cm程度の厚みを検査体積とすれば十分である。その他の材質については熱拡散率に比例して厚く分割できると考えられる。

5.近似時間積分誤差

ここでは空間的離散化誤差が十分に無視できるMCVM03($n=9$)のモデルを用いて後退時間差分の誤差を検討する。結果の一例を図6に示す。射影分解による解析的時間積分法は $\Delta t=1\text{hr}$ で計算しても精解に一致している。これに対し後退差分の時間積分は最大で約5%の誤差を持つ。後退差分は貫流側では初期の2時間位を除いて立ち上がりが遅いが、励振側では常に遅い傾向を持つ。

6.検査体積法と有限要素法の比較

この比較をするため両者の分割数あるいは節点数を一致させる2通りの方法が考えられる。図7は後者の場合の比較であるが、同時に後退差分の誤差とも比較できるようにしている。一見して2つのグループに分かれるが、この違いはモデル化法によるものではなく時間積分法によるものである。モデル化法による違いはほとんど見られない。これらの傾向は節点数を一致

させたモデルでも同じである。表2、3に示される両モデルの固有値の違いは24時間周期程度の入力では顕著に表われてこないで、1時間程度の比較的高周波の励振を与えて調べることにする。この周期関数は最も単純な正弦波とし、振幅は1℃とする。なおこのような励振に対しての精解も単位応答の指数関数級数(1)、(2)式をもとにして得られる。即ち、これらの応答を時間微分して重み関数を計算し、正弦波の励振と畳込積分をする。ただし、有限項近似により正しい重み関数が計算されないで、代わりに励振の時間微分とそのままの単位応答の畳込積分を用いて精解とした。検査体積法モデルはMCVM02(n=6)、有限要素法モデルはMFEM01(n=6)の同じ節点数のものを用いた。時間積分は射影分解による解析的方法である。図8は励振側の表面温度、

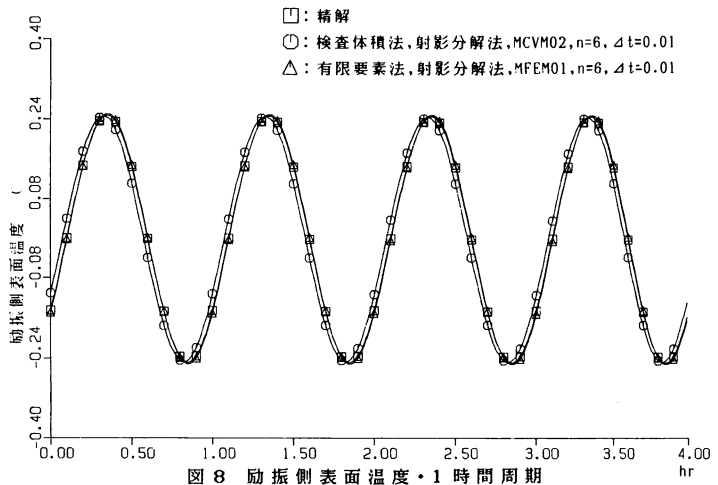


図8 励振側表面温度・1時間周期

図9は貫流側の表面温度である。絶対値は小さいが、顕著な違いは貫流側に表われている。精解は両者の間にあり、検査体積法の方が精解に近い。このことは位相遅れと振幅のどちらについてもいえる。逆に励振側について見ると、有限要素モデルの方が精解に近い。検査体積モデルの応答は一般に遅く鈍い傾向があるようである。このことは固有値の大きさから説明される。

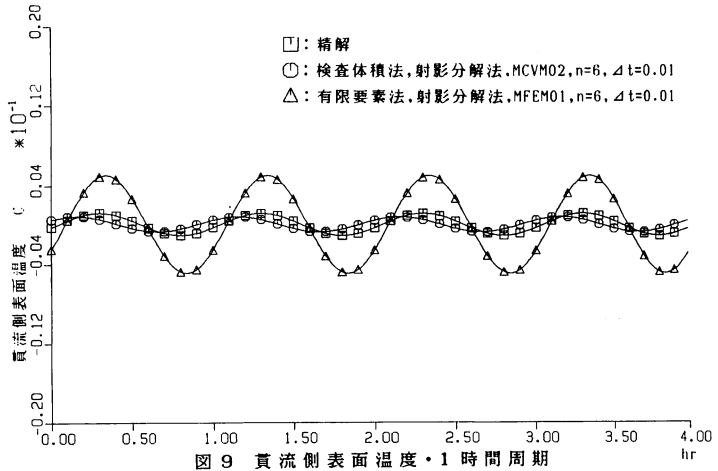


図9 貫流側表面温度・1時間周期

7.まとめ

本論文では空間的離散化誤差、近似時間積分誤差、有限要素モデルと空間差分モデルの違いなどについて検討した。空間的離散化誤差の検討では、さまざまな分割粗さにおける誤差を計算し、望ましい分割粗さについての参考値をあげた。近似時間積分誤差の検討では、射影分解による解析的時間積分を基準の精解とし、後退時間差分の誤差の大きさを具体的に示した。さらに、本熱回路網の定式化法によりいずれの集中定数化法によっても結局は状態方程式とすることができ、そのシステムの固有値が検査体積法と有限要素法モデルの間でどのように違うかを示し、具体的な計算結果に及ぼす影響も調べた。

<参考文献> 1) Louis A. Pipes: "Matrix Analysis of Heat Transfer Problems," Journal of the Franklin Institute, Vol.263, Mar.1957, p.195 / 2) 松尾陽: 「日射熱取得の算法」、空気調和と冷凍、Vol.10, No.3, 1970 / 3) 奥山博康: 「熱回路網の概念による各種の集中定数化法の統一」、空気調和衛生工学会学術論文集、1986年10月、p.277 / 4) 奥山博康、木村建一: 「建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間数値積分公式」、日本建築学会論文報告集、Vol.269, 1978年7月、p.127 / 5) 奥山博康: 「熱回路網によるシミュレーションの理論と応用」、空気調和衛生工学会学術論文集、1983年10月、p.541 / 6) 奥山博康: 早稲田大学・建築環境工学・学位論文「建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究」、1987年12月