C－33

熱回路網状態方程式モデルへの周期的入力の解析解

正会員　奥山 博康　(清水建設(株)技術研究所)

1　はじめに

室温や熱負荷計算のための気象条件等は調和分析を行うことによりフーリエ級数などの周期的関数で近似できることはよく知られている。一方、一次元壁体など単純な伝熱モデルではこうした周期関数入力に対する解析的な解 [1][2] が得られているが、有限要素法、空間差分法や検査体積法などによる複雑な集中定数系モデルにおいては、数値的な解法が行われているだけで、解析的な解は示されていない。Δt の短い時間間隔でステップバイステップの数値的な時間積分を行っていく方法では長時間経過後の解を求めたい場合には計算時間がかかる。そこで本論文では周期的入力に対して経済的に、かつ厳密な解が得られる解析解を導く。

2　状態方程式モデル

本論文での熱回路網の数学モデルは伝熱系の集中定数系モデルの一般モデルであるので、有限要素法、空間差分法や検査体積法のモデルを一般的に包括するものである [3]。どのような集中定数系モデルも節点系としてとらえられ、一般に i 番の節点に関して熱流のバランスを記述する次の方程式が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot\dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n+no} c_{ij}\cdot(x_j - x_i) + \sum_{j=1}^{ng} r_{ij}\cdot g_j \quad (1)$$

ここに n は未知数の、n_o は与条件の温度節点数、n_g は電気ヒータや日射量成分などの発熱源総数である。x_i は i 番節点の温度、g_j は j 番発熱源の発熱量である。m_{ij} は i 番節点に関する拡張熱容量、c_{ij} は節点 j から i に向かう拡張熱コンダクタンス、r_{ij} は j 番発熱源から i 節点への自由入力係数である。拡張熱容量は検査体積法や空間差分法によるモデル化では常に $i=j$ の対角要素しか存在せず、この場合だけ単なる熱容量となる。しかし有限要素法によるモデル化においては $i\neq j$ なる非対角要素も存在し、これらのパラメータに簡単な物理的意味付をすることは困難であることから拡張熱容量と呼ぶことにする。また拡張熱コンダクタンスは、通常のコンダクタンスであれば伝導だけにしか定義されていないところを流体の流れによる熱流についてまで拡張定義していることによる名称である。従って流体の流れの向きによって方向性をもち、密度 ρ、比熱 c_p、体積流量 v の流体が節点 j から i へ流れているとき $c_{ij}=c_p\cdot\rho\cdot v$ であるが、逆に $c_{ji}=0$ となる。これは風上は風下に影響されないからである。ところが、伝導、対流伝達や輻射伝達あるいは貫流における c_{ij} は対称性を持ち、$c_{ij}=c_{ji}$ が成り立つ。これはどちらの節点の温度が高かろうが温度差が同じであれば熱流の絶対値は等しいからである。ただしこうした記号の定義は既報 [4] 等で行った通りである。パラメータ m_{ij}、c_{ij}、r_{ij} は検査体積法では物理法則から直接的に得られるが、有限要素法、空間差分法では既報 [3] のようにして計算できる。n 個の全節点について (1) 式を立てて、状態ベクトル ${}^t\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ などについて整理すれば次の状態方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{C}_o\cdot\mathbf{x}_o+\mathbf{R}\cdot\mathbf{g}\\ &= \mathbf{C}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{f}\end{aligned} \quad (2)$$

An exact and analytic solution for the periodic excitation problem of the thermal network state equation model

OKUYAMA Hiroyasu

この方程式中のマトリクスの中身は次式のようになっている。コンダクタンスマトリクス $\mathbf{C}$ の対角要素だけを除いて、マトリクス $\mathbf{M}$, $[\mathbf{C},\mathbf{C}_o]$, $\mathbf{R}$ の (i,j) 要素は各々 m_{ij}, c_{ij}, r_{ij} となっており線形代数の記号法と一致した簡単なものになっていることに注意する。

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,i} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \cdots & m_{i,i} & \cdots & m_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,i} & \cdots & m_{n,n} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{n+no} c_{j,1} & \cdots & c_{1,i} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & -\sum_{j=1}^{n+no} c_{j,i} & \cdots & c_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,i} & \cdots & -\sum_{j=1}^{n+no} c_{j,n} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{C}_o=\begin{bmatrix} c_{1,n+1} & \cdots & c_{1,n+no} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i,n+1} & \cdots & c_{i,n+no} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,n+1} & \cdots & c_{n,n+no} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,ng} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{i,1} & \cdots & r_{i,ng} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n,1} & \cdots & r_{n,ng} \end{bmatrix} \tag{6}$$

例えば有限要素法で得られる全体方程式は(2)式と類似の式となるが、境界条件は入力ベクトル $\mathbf{f}$ として初めから一つにまとめられた形で扱われる。しかし以下のような解析的時間積分を行うためにはマトリクス $\mathbf{C}_o$, $\mathbf{R}$ のように入力変数と系のパラメータを明確に分離した記述が必要である。

3 畳込み時間積分の射影分解

(2)式の常微分方程式の解を求めるためまず次のように変形する。

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{x}+\mathbf{f}^* \tag{7}$$

ここに $\mathbf{C}^*=\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{C}$ 、$\mathbf{f}^*=\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{f}$ と置いている。この解は形式的に次式で表わされることはよく知られている。

$$\mathbf{x}(t)=\exp\Big((t-t_0)\cdot\mathbf{C}^*\Big)\cdot\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\exp\Big((t-\tau)\cdot\mathbf{C}^*\Big)\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau \tag{8}$$

しかしこれでは実際的に時間積分の計算ができない。第2項の積分の中で τ に関する関数が陽(*explicit*)な形で表わされていないからである。そこで射影分解を利用する。まず $\mathbf{C}^*$ に関する固有値の定義式から次式が成立する。

$$\mathbf{C}^*\cdot\mathbf{p}_i=\alpha_i\cdot\mathbf{p}_i \tag{9}$$

ここで $\mathbf{C}^*$ の固有値の一つを α_i、対応する固有ベクトルを $\mathbf{p}_i$ とした。このとき次式で表わされる $\mathbf{P}_i$ が射影子と呼ぶものである。

$$\mathbf{P}_i=(\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\mathbf{p}_i,\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}) \cdot(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots\cdots,\mathbf{p}_n)^{-1} \tag{10}$$

この射影子によればマトリクスの指数関数が内部のスカラの指数関数に関して次式のように陽に表示出来る。

$$\exp\Big(t\cdot\mathbf{C}^*\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot t} \tag{11}$$

従って前述の形式解も実際的計算が可能な次の形に書き直せる。

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_0)}\cdot\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau \tag{12}$$

ここで右辺第1項は自由項、第2項は強制項と呼ぶことにする。第1項は系自身の過渡的な応答特性に依存する分を表わし、第2項は系への入力に依存する分を表わしている。以上の射影分解を用いて、折れ線 [5] や階段関数 [6] の入力に対する時間積分公式などは既に導いている。

4 周期関数入力の定式化

系への入力には大別して二通りある。一つは温度を与えるもので規定入力、もう一つは熱流を与えるもので自由入力と呼ぶことにする。本モデルの節点番号の定義により、$x_j(j=n+1,\ldots,n+n_o)$ は規定、$g_j(j=1,\ldots,n_g)$ は自由入力となる。一般にどの様な関数であってもフーリエ級数で表わされ、調和分析によりその係数が得られる。これは本来無限級数であるが有限項近似する。$x_j(\tau)$ 、$g_j(\tau)$ の入力が周期 T の関数であれば角速度 ω を $2\pi/T$ において、次式で表わされる。

$$x_j(\tau) \simeq \sum_{l=0}^{m} ax_{j,l}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot\tau) + \sum_{l=0}^{m} bx_{j,l}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot\tau) \qquad (13)$$

$$g_j(\tau) \simeq \sum_{l=0}^{m} ag_{j,l}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot\tau) + \sum_{l=0}^{m} bg_{j,l}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot\tau) \qquad (14)$$

ただし定数項は $l=0$ の場合として総和記号の中に含めた。$\mathbf{C}_o^*=\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{C}_o,\ \mathbf{R}^*=\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{R}$ と表すとき、$\mathbf{f}^*=\mathbf{C}_o^*\cdot\mathbf{x}_o+\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{g}$ であったから、(13) 、(14) 式の x_j、g_j を代入して、それぞれ $sin(l\cdot\omega\cdot\tau)$ 、$cos(l\cdot\omega\cdot\tau)$ で整理すれば $\mathbf{f}^*$ 内の i 番要素 f_i^* は次式の形になることが明かである。

$$f_i^*(\tau) \simeq \sum_{l=0}^{m} a_{i,l}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot\tau) + \sum_{l=0}^{m} b_{i,l}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot\tau) \qquad (15)$$

このとき $a_{i,l}, b_{i,l}$ は $ax_{j,l}, bx_{j,l}, ag_{j,l}, bg_{j,l}$ で次のように表わされる。

$$a_{i,l} \simeq \sum_{j=n+1}^{n+n_o} c_{i,j}^*\cdot ax_{j,l} + \sum_{j=1}^{ng} r_{i,j}^*\cdot ag_{j,l} \qquad (16)$$

$$b_{i,l} \simeq \sum_{j=n+1}^{n+n_o} c_{i,j}^*\cdot bx_{j,l} + \sum_{j=1}^{ng} r_{i,j}^*\cdot bg_{j,l} \qquad (17)$$

ここに $c_{i,j}^*$ は $[\mathbf{C}^*,\mathbf{C}_o^*]$ の、$r_{i,j}^*$ は $\mathbf{R}^*$ の (i,j) 要素である。(16), (17) 式の係数を計算する数式は、対象とする伝熱系の空間的形態によって場合分けをする必要なく一般に成立することに留意する。このことから、(1) の節点方程式モデルもそうであるが、完全システム記述と呼ぶ。これによって一般プログラムが組めることになる。

5 周期関数入力の解

まず次のような記号を定義する。

$$\mathbf{u}_i(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau \qquad (18)$$

すると (8) 式の右辺第2項は次のように表わされる。

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot\mathbf{f}^*(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{u}_i(t,t_0) \qquad (19)$$

$\mathbf{u}_i$ の添字は固有値の添字に対応している。$\mathbf{u}_i$ の j 行要素を数式記述しておけば、(19) 式の右辺の計算をするアルゴリズムをつくることができる。$\mathbf{u}_i$ の j 行要素 $u_{j,i}(t,t_0)$ は次式で示される。

$$u_{j,i}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}\Big(\sum_{l=0}^{m}a_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot\tau)+\sum_{l=0}^{m}b_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot\tau)\Big)d\tau \quad (20)$$

この積分の内の第１項めの総和について、その中で第 l 項は次のように積分される。

$$\int_{t_0}^{t}a_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot\tau)d\tau$$
$$=\frac{a_{j,l}}{\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2}\cdot\Big\{-\alpha_i\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t)-l\cdot\omega\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t)\Big\}$$
$$-\frac{a_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_0)}}{\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2}\cdot\Big\{-\alpha_i\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t_0)-l\cdot\omega\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t_0)\Big\} \quad (21)$$

同様に第２項の総和について、その第 l 項は次のように積分される。

$$\int_{t_0}^{t}b_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-\tau)}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot\tau)d\tau$$
$$=\frac{b_{j,l}}{\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2}\cdot\Big\{-\alpha_i\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t)+l\cdot\omega\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t)\Big\}$$
$$-\frac{b_{j,l}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_0)}}{\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2}\cdot\Big\{-\alpha_i\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t_0)+l\cdot\omega\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t_0)\Big\} \quad (22)$$

そこで改めて $u_{j,i}(t,t_0)$ の具体的な計算式が次のように記述できる。

$$u_{j,i}(t,t_0)=$$
$$\sum_{i=0}^{m}\frac{(-a_{j,l}\cdot\alpha_i+b_{j,l}\cdot l\cdot\omega)}{(\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2)}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t)$$
$$-\sum_{l=0}^{m}\frac{(a_{j,l}\cdot l\cdot\omega+b_{j,l}\cdot\alpha_i)}{(\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2)}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t)$$
$$+\sum_{l=0}^{m}\frac{(a_{j,l}\cdot\alpha_i-b_{j,l}\cdot l\cdot\omega)}{(\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2)}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_0)}\cdot sin(l\cdot\omega\cdot t_0)$$
$$+\sum_{l=0}^{m}\frac{(a_{j,l}\cdot l\cdot\omega+b_{j,l}\cdot\alpha_i)}{(\alpha_i^2+l^2\cdot\omega^2)}\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_0)}\cdot cos(l\cdot\omega\cdot t_0) \quad (23)$$

この関数で構成される $\mathbf{u}_i$ を用いて (12) 式は次のように記述される。

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{l=0}^{n}\mathbf{P}_i\cdot e^{\alpha_i\cdot(t-t_0)}\cdot\mathbf{x}(t_0)+\sum_{l=0}^{n}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{u}_i(t,t_0) \quad (24)$$

この式で、$(t-t_0)\rightarrow+\infty$ となって初期状態から十分な時間が経過すれば、より簡単な形になる。まず右辺の第１項は０に近づく。また (23) 式の右辺第３、４項も０に近づく。この時間積分法は、かなり長い期間の途中経過よりも究極の状態を知りたい場合や、入力関数が周期関数として比較的単純で項数の m が少なくてすむ場合に有効である。

6 まとめ

本論文での熱回路網モデルは有限要素法、空間差分法や検査体積法モデルを一般的に包括している。この一般的集中定数系モデルに周期関数の入力が作用した場合の厳密で解析的な解を導いた。ある時間間隔 Δt でステップバイステップに計算を進めていく方法に比べ、長時間経過後の解が比較的に少ない計算量で得られるなどの長所を持つ時間積分法である。

(参考文献)

[1] 日本建築学会編:"建築学大系８，音・光・熱・空気・色"彰国社,1969年,p.295

[2]Mackey C.O. and Wright L.T.: "Periodic Heat Flow - Composite Walls or Roofs," Trans. ASHVE, Vol.52, 1946, p.283

[3] 奥山博康:"熱回路網の概念による各種の集中定数化法の統一",空気調和衛生工学会学術論文集,1986年10月,p.277

[4] 奥山博康:"建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究",早稲田大学,建築環境工学,博士号学位論文,1987年12月,(印刷広報版:清水建設研究報告別冊第26号,1989年6月)

[5] 奥山博康,木村建一:"建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間数値積分公式",日本建築学会論文報告集,Vol.269,1978年7月,p.127

[6] 奥山博康:"一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論",日本建築学会論文報告集,Vol.344,1984年10月,p.103