

7 熱回路網

7.1 熱回路網とは

建築物の熱的な環境設計や冷暖房換気設備の設計においては、室温や熱負荷を計算する必要が出て来る。こうした計算では、1つの壁体の伝熱だけを考えれば済むのではなく、様々な方位や位置の部材が総合して室温や熱負荷に影響してくる様子を考慮しなければならない。つまり建物の全体的な伝熱系を考慮しなければならない。一般に何らかの物理現象を説明したり計算したりするために、実物を抽象化したり単純化してとらえることをモデル化するというが、ここでは建物の全体的な伝熱モデルが必要なわけである。

建物の伝熱モデルを作る方法には様々なものが考えられる。例えば有限要素法^{1),2)}や空間差分法³⁾が知られている。しかしこれらの方法で、建物全体を3次元座標系の中に置きモデル化すれば膨大な節点数となり、実用的に計算できるものでなくなる。そこで各々の壁体等の部材においてのみこれらの方法を適用するとしても、各々の部分を接続する方法が別に必要になってくる。一方、全体の伝熱系を適当な数の比較的大きな部分に分割し、各々の部分での熱流バランス方程式を記述し、連立して解く方法も考えられる。しかし建物の形態は様々なので、ともすれば逐一に式を記述し計算プログラムを組む手間がかかったり、適用対象が狭く限定された計算プログラムになったりする。つまりこの方法では一般性を持たせる必要がある。さらに建築伝熱系では、伝導伝熱だけではなく、空気などの流体によって熱が運ばれる移流（対流）や放射伝熱などの様々な伝熱形態が混在して複雑なので、なるべく単純にモデル化できる方法も必要である。

ところで伝熱系の規模は小さいものの、あらゆる伝熱形態が混在し複雑なものとして太陽熱集熱器がある。この計算モデルをつくるため、米国の太陽エネルギー研究所において熱回路網のアイデア⁴⁾が試案として示された。本章の熱回路網モデルはこれをヒントにし、さらに現代制御理論⁵⁾の思想を背景にして発展させてきたものである^{6),7),8)}。本章

のモデルはコンピュータ利用にふさわしく、モデルのデータを変えるだけで、どのような形の建物であっても、またどのような伝熱形態がその中に混在していても、汎用的に適用できる一般的モデルである。そして実はこのモデルは広く空間差分法や有限要素法のモデルをも包括するように体系づけられている。

ところで、建物伝熱系で起こる大きな熱移動の一つに換気などの空気の流れによる熱流があげられる。こうした換気風量そのものを求めるには熱回路網とは別のモデルを用いなければならない。ミクロな観点で空気の流れを解くとすればナビエ-ストークス方程式の数値解析になるが、多数室からなる建物全体系を解くためにはマクロな換気回路網モデルが適当と考えられる。従来様々な内容の換気回路網モデル^{9),10),11)}が示されてきたが、本章ではコンピュータ利用にふさわしい単純で一般的なデータ構造を持つモデル¹²⁾について述べる。またこのモデルは数学的には連立非線形方程式になるが、ニュートン法を普通に適用したのではうまく解けない性質を持つことを明らかにし、修正ニュートン法を示すことにする。

7.2 熱回路網の定式化

本章の熱回路網モデルは、昔行われたような実際の電気回路の相似モデルによる解法^{13),14)}とはあまり関係がない。解くために用いるのがデジタルコンピュータであるし、方程式モデルの定式化も電気分野とは異なるからである。強いて関連をあげれば計算モデルの図的な表示が少し電気回路に似ていることがあげられるが、中で用いている図の記号は必ずしも電気分野と一致するものではない。こうした計算モデルの図表示はモデル構造の直感的把握を容易にするために行うことであり、解法そのものとは関係がない。重要なのは数学モデルと解法およびそのアルゴリズムである。

この節では熱回路網の数学モデルを定める。伝熱系全体を分割した場合に、そのうちの一つの部分について熱流バランスを記述し、これを節点方程式とする。この節点方程式を全部の部分について記述すれば連立方程式になり、これを状態方程式と呼ぶことにする。計算モデルとする伝熱系は様々な形をしており、空間次元も1次元から3次元まで仮定できる。また伝熱の形態も、伝導、伝達、放射、移流(対流)と様々な存在する。しかし、どのような計算対象物であっても一般に成り立つ数学モデルを定める。

7.2.1 節点方程式

基本方程式を導くためには、伝導伝熱からではなく移流(対流)伝熱から入った方が

分りやすい。移流伝熱とは流体の流れによって熱が運ばれることをいう。ここで図7.1の n 室から成る建物を仮定する。実際には室間の壁体を通しての貫流による熱流があるが、当面は室間の空気の流動による熱流に注目するわけである。外気温度については一つの一様な温度と仮定できる場合が多いが、ここでは一般論のために建物の外側が n_0 個の外気温度のゾーンになっているとする。

建物内の n 室には1番から n 番まで室番号をつける。屋外の n_0 個のゾーンも一種の室のように見なし、室番号として $n+1$ 番から $n+n_0$ 番をつける。1から n 番の室の空気温度を状態変数として、 x_1 から x_n で表す。 x_{n+1} から x_{n+n_0} は外気の空気温度であるが、この伝熱系に対して独立した値をとり、入力となるので、規定入力変数と呼ぶことにする。発熱源として電気ヒータの電源のようなものが n_g 個あるとし、1から n_g 番までの番号をつけ、各々の発熱量を単位時間当りの熱量で、 g_1 から g_{n_g} とする。これらを自由入力変数と呼ぶことにする。

さらに3種類の係数を定義する。1から n 番のうちの i 番目の室の空気熱容量を m_{ii} とする。外気温度ゾーンの仮想的な室番号も含め、 j 番の室から i 番の室に向かって流れる風量を熱容量の流量で c_{ij} とする。ここで c_p を比熱、 ρ を密度、 v を体積流量とし $c_{ij} = c_p \cdot \rho \cdot v$ である。添え字の順番と流れの向きが逆であるが、こうした定義の合理性は状態方程式のマトリクス構成のときに現れる。一般に一つの電源からケーブルで分岐させて複数の室に電気ヒータを設置するものとし、 g_j の j 番の電源から i 番の室に入っていく割合を r_{ij} とする。

以上の変数と係数の定義により、1から n 番のうちの i 番の室において次の常微分方程式が成立する。 x_i の上のドットは時間微分を表す。

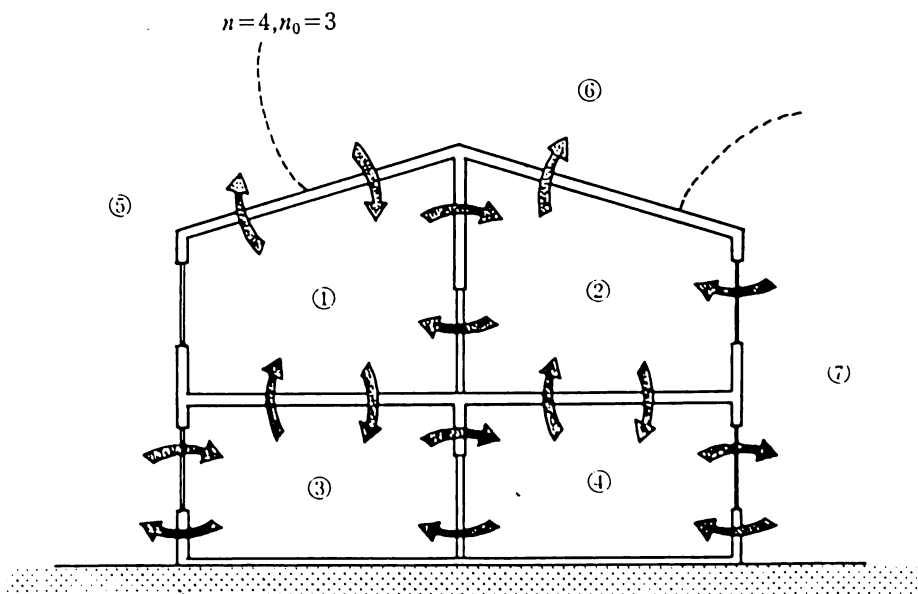


図 7.1 多数室系での移流伝熱

$$m_{ii} \cdot \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot x_j - \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ji} \cdot x_i + \sum_{j=1}^{ng} r_{ij} \cdot g_j \quad (7.1)$$

ここで右辺の第1項は空気流によって*i*番の室に流入してくる熱流であり、第2項は流出していく熱流である。第3項は電気ヒータから発生する熱流である。したがってこの式は、右辺の熱流の収支が左辺で表される室温の単位時間当りの変化に比例することを表している。

一方、どの室においても入って来る空気の質量と出ていく空気の質量は等しいから次式が成り立つ。これは質量保存則を表している。

$$\sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ji} \quad (7.2)$$

この式(7.2)を式(7.1)に代入すれば次の式(7.3)になる。式(7.2)は常に成立するから、式(7.1)と(7.3)は実際上等価である。式(7.3)の右辺第1項は温度差に比例して熱流が生じるという伝熱計算の基本に即した親しみやすい表現になっている。

$$m_{ii} \cdot \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot (x_j - x_i) + \sum_{j=1}^{ng} r_{ij} \cdot g_j \quad (7.3)$$

さらに左辺を一般的表示にし、有限要素法モデルも包括する一般的な次の式を導入する。

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{ij} \cdot (x_j - x_i) + \sum_{j=1}^{ng} r_{ij} \cdot g_j \quad (7.4)$$

式(7.3)は式(7.4)が $m_{ij}=0$ ($i \neq j$)となった特殊な場合であり、式(7.4)で一般的に表される。式(7.4)は有限要素法によるモデルとの互換性を保つ場合に必要になってくる。 m_{ij} ($i \neq j$)を伝熱系の場合は一般化熱容量と呼ぶことにする。

以上の式において x_i と g_j を変数、 m_{ij} 、 c_{ij} と r_{ij} をパラメータと呼ぶことにする。変数やパラメータの添え字の番号は室番号や発熱源の番号を表していた。もし各々の室空気熱容量 m_{ii} を室の中心に節点として集中させ、外気温度も各々節点に集中させれば、多数の節点と、これらの節点と節点の間の c_{ij} なる風量によって結ばれる節点系にモデル化することができる。したがって、式(7.3)や(7.4)のような式を節点方程式と呼ぶことにする。また g_j は電熱ヒータだけでなく日射量等の発熱量を表す。したがって r_{ij} は日射吸収係数等も意味することになる。

伝導だけの伝熱系を考えるとすれば式(7.3)がやはり成立することは容易に理解できる。右辺第1項が2つの節点の温度差に熱コンダクタンスをかけて熱流を計算する馴染みのある形になっているからである。この場合の c_{ij} の添え字については $c_{ij}=c_{ji}$ の対称性を持つことが示される。いま c_{ij} が節点*j*から*i*に向けての、 c_{ji} は節点*i*から*j*に向け

での熱流の熱コンダクタンスとする。節点 j から i に向かう熱流は $c_{ij} \cdot (x_j - x_i)$ であり、節点 i から j に向かう熱流は $c_{ji} \cdot (x_i - x_j)$ である。両者の熱流は符号が逆であるから、足したものが 0 になる関係式を立てれば、 $(c_{ij} - c_{ji}) \cdot (x_j - x_i) = 0$ となり、 $c_{ij} = c_{ji}$ が導かれる。対流熱伝達による熱流も伝導と同様に定式化される。放射熱伝達における熱流は、本来絶対温度の 4 乗に比例するものであるが、近似線形化してやはり同様な定式化が可能となる。

一方、流体の流れによって熱が運ばれる場合は、式 (7.1) が記述できた。節点 j から i に向かって流体が流れている場合、 c_{ij} は流体の比熱に質量流量をかけたものとなり、逆に c_{ji} は 0 となる。これは、風下は風上の影響を受けるが、逆に風上は風下の影響を受けないことを意味する。こうした流れによる c_{ij} は非対称性をもつことになる。通常熱コンダクタンスは伝導などについてだけ定義されているので、流体の流れによるものを含める場合、特に一般化熱コンダクタンスと呼ぶことにする。

このように各種の伝熱 (拡散) 形態を統一的に 1 つのパラメータ c_{ij} で表すことにより単純で一般的な数学モデルとなる。また、式 (7.4) の右辺の総和記述で、すべての節点は他のすべての節点と結び付いているものとしている。これを完全システム記述と呼ぶが、この定式化により、対象がどのような空間的形狀であろうが一般的に適用できる数学モデルをつくることができる。

7.2.2 状態方程式

節点方程式の式 (7.1) を 1 番から n 番の節点について立てて、状態ベクトル $'x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、規定入力ベクトル $'x_0 = (x_{n+1}, \dots, x_{n+n_0})$ 、自由入力ベクトル $'g = (g_1, \dots, g_{n_g})$ について整理すれば次式の状態方程式が得られる。ここに拡散する変数は温度だけに限らず、ガス濃度や湿度などを含めるので、一般に状態変数および状態ベクトルと呼ぶ。

$$M \cdot \dot{x} = C \cdot x + C_0 \cdot x_0 + R \cdot g \quad (7.5)$$

ここで規定入力 $C_0 \cdot x_0$ と自由入力 $R \cdot g$ はまとめて 1 つの入力ベクトル f におくことも出来る。この方程式中のマトリクス C は熱コンダクタンスマトリクス、 M は熱容量マトリクス、 C_0 は規定入力マトリクス、 R は自由入力マトリクスと呼ぶことにする。各々のマトリクスの内容は以下の式のようにになっている。コンダクタンスマトリクス C の対角要素だけを除いて、マトリクス M , $[C, C_0]$, R の (i, j) 要素は各々 m_{ij} , c_{ij} , r_{ij} となり線形代数の記号法と一致した簡単なものになっていることに注意する。

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,i} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \cdots & m_{i,i} & \cdots & m_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,i} & \cdots & m_{n,n} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$C = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{n+n_0} C_{j,1} & \cdots & C_{1,i} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i,1} & \cdots & -\sum_{j=1}^{n+n_0} C_{j,i} & \cdots & C_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,i} & \cdots & -\sum_{j=1}^{n+n_0} C_{j,n} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} C_{1,n+1} & \cdots & C_{1,n+n_0} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{i,n+1} & \cdots & C_{i,n+n_0} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,n+1} & \cdots & C_{n,n+n_0} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,ng} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{i,1} & \cdots & r_{i,ng} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n,1} & \cdots & r_{n,ng} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

7.3 検査体積法によるモデル化の方法

伝熱系の数学モデルを構成する3種類のパラメータ(係数)として一般化熱容量 m_{ij} , 一般化熱コンダクタンス c_{ij} と自由入力係数 r_{ij} を前節で定義した。数学モデルの構造は既に一般的に記述されているので、ここでいうモデル化とは結局これらのパラメータをつくることであるが、一般的に基本的手順は次のようにする。

(1) 全体をいくつかの部分に分割する。各々の部分においては式(7.4)で表される熱流収支が成り立つようにする。したがってこれらの部分において熱流収支を検査することになるので検査体積(コントロールボリューム)と呼ぶ(分割の粗さによって空間的離散化誤差の大きさが左右されるが概略の指針¹⁵⁾が与えられている)。ただし、これらの部分を有限体積と呼ぶこともある。

(2) 各々の検査体積の中心に節点を設定する。

(3) 熱回路網の図表示をする。伝導, 伝達, 放射および貫流は抵抗様の表示, 物質移動(移流)はダイオード様の表示をする。

(4) 節点番号を付ける。未知温度の節点は前詰めに(n 個), 既知温度のものは後ろ詰めに(n_0 個)にする。

(5) 各検査体積の熱容量をその節点に集中し, これを m_{ii} (i 番節点)とする(ただ

し $i=1, 2, \dots, n$ について).

(6) 節点間の一般化熱コンダクタンス c_{ij} を計算する. 非定常性を生じさせる熱容量は節点に集中したから, 節点間の伝熱は定常過程と見なされる. したがって伝導と伝達で構成される過程については概ね熱貫流計算法によって計算できる. また $c_{ij}=c_{ji}$ の対称性を持つ. しかし物質移動(移流)による伝熱過程の c_{ij} は非対称で, どちらか一方は0である.

特に様々な伝熱形態を一つの一般化熱コンダクタンスでとらえる見方は既成概念の若干の変更を必要とするので, 次に具体例をあげて説明する.

7.3.1 壁の伝熱系

図7.2は壁の1次元的な熱伝導系とその熱回路網モデルを示す. 節点番号3は空気層の温度を, 2番と4番の節点は空気層をはさむ表面温度を状態値として持つ. したがって2番と4番の節点の間には放射熱伝達がある. そして3番と2番の節点および3番と4番の節点是对流熱伝達で結ばれている. 節点5, 6, 7番は固体の伝導部分を厚み方向に3等分し, 各々の中心に設けられている. こうして検査体積を分割によって決めれば, 各々の熱容量 m_{ii} は容易に計算できる. また放射熱伝達を除き, 伝導や伝達から成るところは熱貫流計算法にしたがって c_{ij} が計算できる. ここで放射熱伝達についての c_{ij} を計算する方法を述べる. いま i 番節点で代表される面と j 番のそれとの間で放射熱伝達があるとすれば, ステファン・ボルツマンの法則を基本として, 線形近似化して定められている次式の放射熱伝達率をまず計算する¹⁶⁾.

$$\alpha_r = 0.04 \cdot \epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot c_b \left(\frac{x_m}{100} \right)^3 \tag{7.10}$$

ここに ϵ_i, ϵ_j は両表面の放射率, c_b は黒体の放射定数である. また x_m は両表面の平均絶対温度である. この α_r によって放射の c_{ij} は,

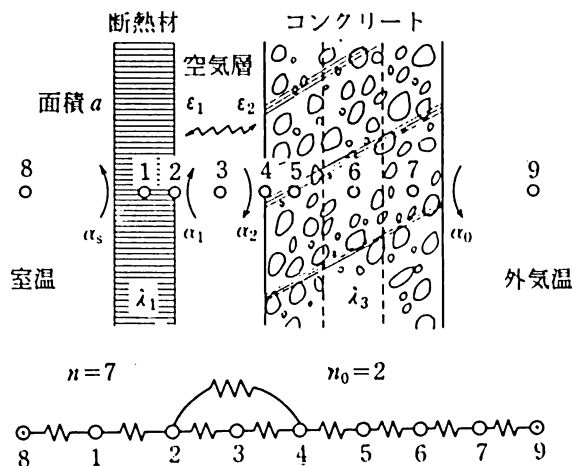


図 7.2 内部空気層に放射熱伝達を持つ壁の伝熱系

$$c_{ij} = \alpha_r \cdot s_j \cdot f_{ji} \quad (7.11)$$

$$c_{ji} = \alpha_r \cdot s_i \cdot f_{ij} \quad (7.12)$$

で計算される。ここに s_i , s_j は各々面 i と面 j の面積, f_{ij} は面 i から面 j を見る形態係数, 逆に f_{ji} は面 j から面 i を見る形態係数を表す。相反法則によって,

$$s_i \cdot f_{ij} = s_j \cdot f_{ji} \quad (7.13)$$

が成立するから, 放射伝達に関しても $c_{ij} = c_{ji}$ の対称性が成り立つ。

式(7.10)の x_m は, 本来は未知な温度を用いて定められる。すなわち, この場合の c_{ij} は温度自体に依存しており, 非線形性を持つ。そこで非定常で節点温度を求めていく場合には, ステップバイステップに解を進めていくが, 前の時刻の温度によって x_m を定めればよい。

7.3.2 異形壁の伝熱系

この例では2次元的な熱流を持つ伝熱系についてモデル化を述べる。図7.3は柱型を含む異形壁の断面と, この熱回路網のモデルを示す。このような場合は直方体状の検査体積に分割するのが適している。2次元になっても前の例と同様にして m_{ij} , c_{ij} が計算できる。

またこのように, 空間座標系に全体を置いて扱える単純な伝熱系のパラメータ m_{ij} , c_{ij}

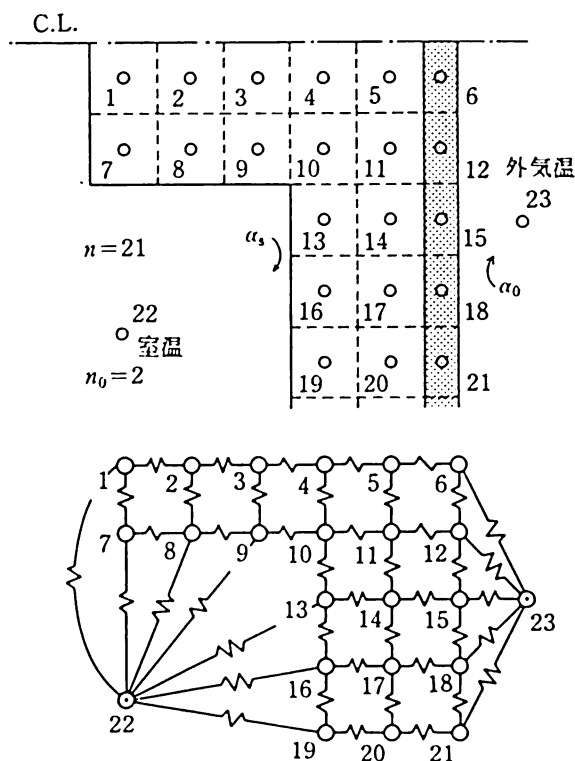


図 7.3 2次元的な異形壁

の作成は有限要素法や差分法を用いて自動的に行うことが出来る。有限要素法では、前節での式(7.5)の状態方程式に相当する、全体の有限要素式と呼ばれる式が得られるが、この中に含まれるマトリクスの要素をそのままパラメータ m_{ij} , c_{ij} と見なすことができる¹⁷⁾。したがって、こうして得られるパラメータを用いて節点方程式(7.4)によって全体の状態方程式を再構成することも可能である。パラメータの段階では有限要素法モデルと検査体積法の間で互換性が実現できる。すなわち、全体の計算対象領域を、有限要素法でモデル化する部分と、検査体積法でモデル化する部分に分け、各々から各々の方法でパラメータを算出したうえで、各パラメータの添え字番号を全体のものにリナンバリングすれば、全体の状態方程式が構成されたことになる。

ところで、図7.3では検査体積法で集中定数化したので空気との伝達表面や、異なった材質間の境界に節点を設定していない。しかし仮にこれらの境界面に熱容量0の節点を設けたとしても本質的な計算結果は同じになる。なぜなら熱容量が0の節点のところは定常扱いになってしまうからである。もし放射熱伝達などをモデル化する場合にはこれらの境界面上の節点が必要である。また有限要素法の場合にも境界面の節点は必要であるが、数学的な方法によってこれらの節点は0でない熱容量を持つことになる。

こうした例によって例え3次元的な伝導伝熱系になってもモデル化は明らかであろう。

7.3.3 多槽直列の蓄熱槽

水の流れ等の、物質移動によって熱が運ばれる場合を考える。このために冷暖房の熱源としてよく用いられる多槽直列の蓄熱槽を取り上げる。図7.4は4槽が直列につなが

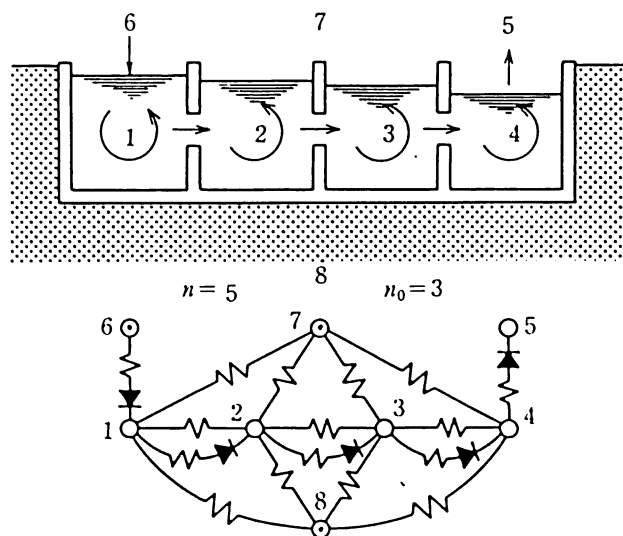


図 7.4 多槽直列の蓄熱槽

っている例を示す。右端の槽から吸い上げられた水はボイラや冷凍機によって加熱あるいは冷却されて左端の槽にもどり、蓄熱される。冷暖房のために放熱するときには逆に循環する。実はこうした流れの変化は c_{ij} が一定ではなく変化することを意味する。

もし各槽で温度の完全攪拌の仮定を設ければ、各々の槽が検査体積となり各々1つの節点で表される。この場合、節点7は周囲空気の温度、節点8は地中の不易層の規定温度を表す。これらの温度が槽内の水温と異なることによって熱損失が起きる。もし槽から槽への体積流量がすべて等しく v とすれば、流れ方向の $c_{1,6}, c_{2,1}, c_{3,2}, c_{4,3}, c_{5,4}$ は $c_p \cdot \rho \cdot v$ となる。ここに c_p と ρ は水の比熱と密度である。逆の方向の、流れによる一般化熱コンダクタンス $c_{6,1}, c_{1,2}, c_{2,3}, c_{3,4}, c_{4,5}$ は0である。ただし槽間の隔壁を通しての貫流による熱流も考慮すれば、これは水の流れによる熱流と同時に存在することになり、各々の $c_{i,j}$ を加え合わせて最終的な $c_{i,j}$ とする。

7.3.4 パッシブソーラーハウス

熱回路網をパッシブソーラーハウスの伝熱系に適用した例を示す。図7.5の上部にはパッシブソーラーハウスの断面図、下部にはその熱回路網のモデルを示す。この建物は付設温室、小石蓄熱槽、通風する二重壁、日射熱を蓄熱したり放熱するためのれんが壁などからなっている。これらは日射などの自然エネルギーを自然な方法で運んだり、蓄熱したり、放熱したりするための工夫である。夏期、冬期あるいは日射の有無によって空気の流し方を変えたり、温室のガラスの前面にある断熱パネルを開閉したりする。こうした変化は一種の非線形性あるいは時変性のもので、熱回路網の一般化熱コンダクタンスの値や、節点間のつながり方が変わるものと見なし、モデル化してシミュレートできる。これを熱回路網のモード変化と呼ぶことにする。一般にシミュレーションは、次節で述べる推移行列を用いて、計算時間間隔 Δt 毎での温度分布を計算して進められる。一つのモードに対しては一つの推移行列が対応するので、あらかじめモード数分の推移行列を用意しておいてモード変化に応じて切り換えるか、推移行列を計算しなおす。

日射受熱量は日射を受ける節点に発熱量として入力される。いま受熱面での日射量を g_j とする。節点が表面にあれば、日射吸収率 a に面積を乗じたものが r_{ij} になる。しかし、図中の節点1のように表面から少し内部にめり込んだ位置にあれば、 r_{ij} はこれよりも小さな値をとる。ここで、 x_k が外気温度、 x_i が壁体内にめり込んだ節点の温度、 c_{ik} がその節点から外気までの熱コンダクタンス、 g_j が日射量、 a が吸収率、 α が表面と外気の熱伝達率とする。相当外気温度によって節点 i に流れ込んでくる熱流 q は次式で計算される。

$$q = c_{ik} \cdot \left(x_k + \frac{a \cdot g_j}{\alpha} - x_i \right) \quad (7.14)$$

したがって、節点 i での日射入力係数 r_{ij} は次式で表される。

$$r_{ij} = \frac{c_{ik} \cdot a}{\alpha} \quad (7.15)$$

この式で、もしたまたま節点 i が表面に位置するときは、熱伝達の表面積を s として、

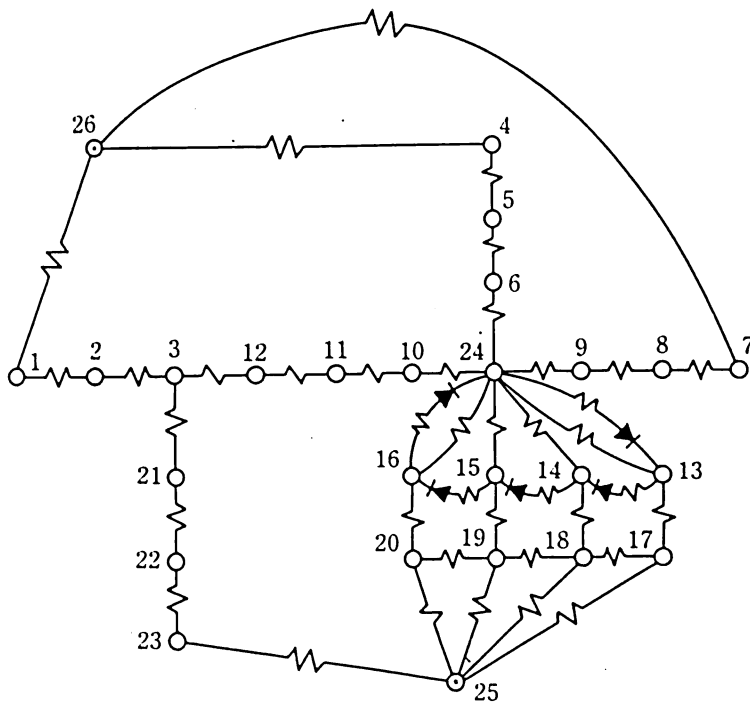
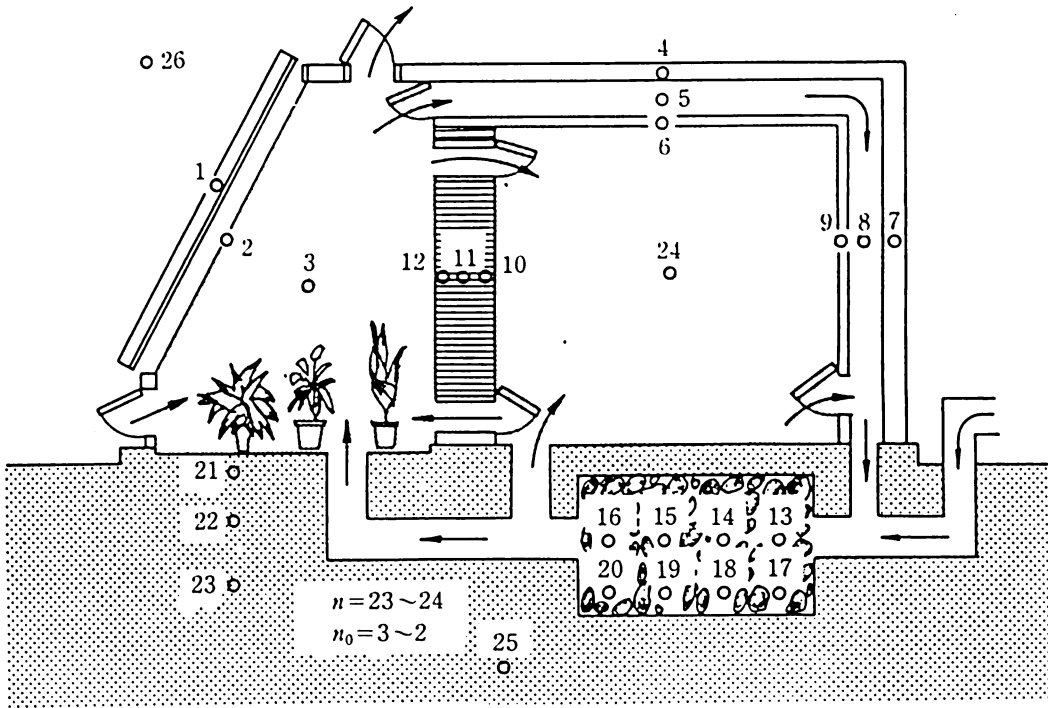


図 7.5 パッシブソーラーハウス

$c_{ik} = a \cdot s$ であるから、日射入力係数は $r_{ij} = a \cdot s$ となる。

以上の具体例を通して、主に検査体積法によって集中定数化を行い、熱回路網のモデルをつくる考え方を述べた。このモデルは3種類の係数、熱容量 m_{ij} 、一般化熱コンダクタンス c_{ij} 、自由入力係数 r_{ij} によって構成される。特に、伝導、伝達や物質移動などの種々の伝熱形態に対する統一的な一般化熱コンダクタンスの捉え方は重要である。

7.4 時間積分法

ここでは熱回路網モデルの状態方程式 (7.5) を解く方法について述べる。この方程式は時間常微分方程式であるから、解くという意味は正確には時間積分を行うことである。時間積分という名称は機械工学の分野で正統的に用いられているものであり、大次元常微分方程式の各種の時間積分法を系統的に分類評価しようとする試みも行われている¹⁸⁾。また解いた結果がどのような性質を持つか調べることは重要であるが、これは方程式系の固有値の特性を調べることによって行うことができる。この証明は質量保存則の式 (7.2) を主に利用して行える。伝熱拡散の形態が伝導や伝達などだけから構成され、一般化コンダクタンスが対称である系においては固有値が実数であり、物質移動を含む非対称の一般化コンダクタンスをもつ系においては固有値の実数部が負となることが証明される¹⁹⁾。この固有値の特性は以下に述べる解析的時間積分を行う場合に特に重要である。また解析積分に対し、前進差分、後退差分やクランクニ科尔ソン法の近似時間積分法においては数値的安定性の検討に同様な系の固有値の性質を調べることが必要である。ここでは具体的な計算法について述べるとともにそうした議論も行う。

まず熱回路網の状態方程式の入力の項を1つのベクトル f にまとめておく。すなわち、

$$f = C_0 \cdot x_0 + R \cdot g \quad (7.16)$$

と定める。 f を入力ベクトルと呼ぶことにする。したがって式 (7.5) は次式となる。

$$M \cdot \dot{x} = C \cdot x + f \quad (7.17)$$

式 (7.17) の左方から M^{-1} を乗じ x にかかるマトリクスは単位マトリクスにする。

$$\dot{x} = M^{-1} \cdot C \cdot x + M^{-1} \cdot f \quad (7.18)$$

これを次式で表示する。

$$\dot{x} = C^* \cdot x + f^* \quad (7.19)$$

この式をもとにして以下に各種の時間積分を導く。

7.4.1 前進差分法

この時間積分法は節点数が非常に多い場合によく用いられる。マトリクス計算が必要ないためアルゴリズムも単純で計算時間もかからないが、数値的安定性が悪く安定条件を満たすように配慮しなければならない。式(7.19)を前進差分化すると次式となる。

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} = C^* \cdot x_{k-1} + f_{k-1}^* \quad (7.20)$$

ここに添え字の k は時刻番号を表すものとする。 C^* のマトリクスの要素を c_{ij}^* と表すことにする。 c_{ij}^* についても質量保存則と同様に次式が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^{n+n_0} c_{i,j}^* = \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{j,i}^* \quad (7.21)$$

これは式(7.5)で、全節点の温度が1で発熱などが無い場合を考えると明らかである。すなわち、

$$M^{-1} \cdot [C, C_0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = [C^*, C_0^*] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (7.22)$$

だからである。式(7.20)を x_k について解けば次式となる。

$$x_k = (E + \Delta t \cdot C^*) \cdot x_{k-1} + \Delta t \cdot f_{k-1}^* \quad (7.23)$$

ここに E は単位マトリクスを表す。 x_{k-1} にかかるマトリクスによって次の時刻の x_k が求められるので、これを前進差分の推移マトリクスと呼び、次のように A_e とおく。

$$A_e = E + \Delta t \cdot C^* \quad (7.24)$$

次に解の安定性について考える。 A_e について任意の固有値を β 、これに対応する固有ベクトルを p とし、 p の最大要素を p_m とする。

$$\max(p_1, p_2, \dots, p_m, \dots, p_n) = p_m \quad (7.25)$$

$A_e \cdot p = \beta \cdot p$ の m 行をとりだせば次式である。

$$\begin{aligned} \Delta t \cdot c_{m,1}^* \cdot p_1 + \Delta t \cdot c_{m,2}^* \cdot p_2 + \dots + \left(1 - \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{j,m}^*\right) \cdot p_m \\ + \dots + \Delta t \cdot c_{m,n}^* \cdot p_n = \beta \cdot p_m \end{aligned} \quad (7.26)$$

p_m は正と仮定できる。なぜなら p の全要素が負ならば p の符号を変えてもやはり β に対する固有ベクトルであるし、正と負が混じっていれば最大要素は正になるからである。式(7.26)で p_j がすべて p_m ならば次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta t \cdot c_{m,1}^* \cdot p_m + \Delta t \cdot c_{m,2}^* \cdot p_m + \dots + \left(1 - \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{j,m}^*\right) \cdot p_m \\ + \dots + \Delta t \cdot c_{m,n}^* \cdot p_m > \beta \cdot p_m \end{aligned} \quad (7.27)$$

したがって、両辺を $p_m > 0$ で割り、また式 (7.21) を用いれば次の不等式が成立する。

$$1 - \Delta t \cdot \sum_{j=n+1}^{n+n_0} c_{j,m}^* > \beta \quad (7.28)$$

これは A_e の最大の固有値は 1 より小さいことを示している。数値的安定性のためには、さらに β が -1 より大きいことが必要である。つまり β は絶対値が 1 より小さいことが必要である。なぜならば初期値が次式のように n 本の線形独立な A_e の固有ベクトルの線形結合で表されるから、次の Δt 時には

$$\begin{aligned} x(\Delta t) &= a_1 \cdot A_e \cdot p_1 + a_2 \cdot A_e \cdot p_2 + \cdots + a_n \cdot A_e \cdot p_n \\ &= a_1 \cdot \beta_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot \beta_2 \cdot p_2 + \cdots + a_n \cdot \beta_n \cdot p_n \end{aligned} \quad (7.29)$$

になり、 $k \cdot \Delta t$ 時には

$$x(k \cdot \Delta t) = a_1 \cdot \beta_1^k \cdot p_1 + a_2 \cdot \beta_2^k \cdot p_2 + \cdots + a_n \cdot \beta_n^k \cdot p_n \quad (7.30)$$

となるから、 $k \rightarrow +\infty$ のとき $x \rightarrow 0$ にするためには $-1 < \beta < 1$ なる性質を A_e に持たせればよい。そこで非負行列の性質を利用する。すなわち、 A_e を非負行列とすれば、これは非負の実固有値を持ち、そのうちの最大のものをフロベニウスの根と呼び、他の任意の固有値の絶対値はフロベニウスの根を越えないことが分っている²⁰⁾。そこで式 (7.28) により A_e の最大固有値は 1 より小さいから、他の固有値の絶対値は 1 より小さくなる。以上により前進差分の数値的安定条件とは A_e が非負であることである。 A_e の対角要素が負になる可能性があるから、これが非負であることが安定条件である。

$$1 - \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{j,i}^* \geq 0 \quad (7.31)$$

この条件式は c_{ij}^* と Δt についてのものであるが、 c_{ij}^* は M^{-1} が作用して生成されたものであるから m_{ij} も間接的に関与する。有限要素法では M のマトリクスには非対角要素もあり、 M^{-1} が m_{ij} によって単純な式では表せない。しかし差分法や検査体積法においては M は対角マトリクスであり、 M^{-1} は単に対角要素の逆数が入っているものであるから、この場合については式 (7.31) の安定条件は次のようになる。

$$1 - \frac{\Delta t}{m_{ii}} \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{j,i} \geq 0 \quad (7.32)$$

式 (7.32) は、計算時間間隔が短いほど、かつ熱容量が大きいほど計算安定性がよくなることを示している。

以上のように前進差分についてマトリクスを使って計算式を説明したが、実際の計算はマトリクスの形で計算を進めていく必要はなく、節点毎に熱流バランスの式についてスカラの計算をするだけですむ。つまり前進差分計算は算数的である。こうした特徴により大規模節点数の系への適用に向いている。また時変性や非線形性など、熱コンダク

タンスのパラメータが逐次変化していく場合などにも適用しやすい。しかし致命的な欠点は数値的安定性が良くないことである。

7.4.2 後退差分法

後退差分の近似時間積分は無条件に数値的安定であることから実用性に優れている。式 (7.19) を後退差分化すれば次式で表される。

$$\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\Delta t} = \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{f}_k^* \quad (7.33)$$

\mathbf{x}_k について解けば次式となる。

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{E} - \Delta t \cdot \mathbf{C}^*)^{-1} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + (\mathbf{E} - \Delta t \cdot \mathbf{C}^*)^{-1} \cdot \Delta t \cdot \mathbf{f}_k^* \quad (7.34)$$

したがって、後退差分の近似推移マトリクス \mathbf{A}_i は次のようにおける。

$$\mathbf{A}_i = (\mathbf{E} - \Delta t \cdot \mathbf{C}^*)^{-1} \quad (7.35)$$

次に無条件安定性を証明する。前進差分と同様に、 \mathbf{A}_i の固有値の性質を調べる。 \mathbf{A}_i の任意の固有値を β とし、対応する固有ベクトルを \mathbf{p} とする。

$$\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{p} = \beta \cdot \mathbf{p} \quad (7.36)$$

\mathbf{A}_i は逆行列の計算結果であるから、もとのマトリクスとの要素対応が分りにくい。しかし、式 (7.36) の両辺に左方から \mathbf{A}_i^{-1} を乗じ、両辺を β で割れば次式が得られる。

$$\mathbf{A}_i^{-1} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{\beta} \cdot \mathbf{p} \quad (7.37)$$

この式は、ある行列の逆行列の固有値は、もとの行列の固有値の逆数に等しいことを示している。そこで \mathbf{A}_i^{-1} の固有値について調べ、もとの \mathbf{A}_i についての性質を導く。 \mathbf{p} の最大要素を p_m とし、式 (7.37) の第 m 行を書けば次のようになる。

$$\begin{aligned} -\Delta t \cdot c_{m,1}^* \cdot p_1 - \Delta t \cdot c_{m,2}^* \cdot p_2 - \dots + \left(1 + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{j,m}^*\right) \cdot p_m \dots \\ - \Delta t \cdot c_{m,n}^* \cdot p_n = \left(\frac{1}{\beta}\right) \cdot p_m \end{aligned} \quad (7.38)$$

p_m は最大要素であるから、次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} -\Delta t \cdot c_{m,1}^* \cdot p_m - \Delta t \cdot c_{m,2}^* \cdot p_m - \dots + \left(1 + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n+n_0} c_{j,m}^*\right) \cdot p_m \dots \\ - \Delta t \cdot c_{m,n}^* \cdot p_m < \left(\frac{1}{\beta}\right) \cdot p_m \end{aligned} \quad (7.39)$$

p_m は正とみなしてかまわないから、式 (7.39) の両辺を p_m で割って、式 (7.21) を用いて整理すれば次の不等式が得られる。

$$1 + \Delta t \cdot \sum_{j=n+1}^{n+n_0} c_{j,m}^* < \frac{1}{\beta} \quad (7.40)$$

この左辺の第2項は正であるから、結局 β は 0 から 1 の間にある。

$$0 < \beta < 1 \quad (7.41)$$

この A_t の固有値の性質は無条件に成立するから、後退差分は無条件に数値的安定であることが示された。こうした無条件安定性は実用的観点から精度以上に重要であることが多い。安定条件が課せられることによって、モデル化への制約や、計算時間間隔への制約が生じるからである。

またこの後退差分法の定式化を工夫しておくことによって定常状態の計算法も兼ねることが出来る。そのために式 (7.17) から直接に次のような後退差分化を行う。

$$M \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} = C \cdot x_k + f_k \quad (7.42)$$

これを x_k について解くと次のように記述できる。

$$x_k = \left(\frac{M}{\Delta t} - C \right)^{-1} \cdot \left(\frac{M}{\Delta t} \right) \cdot x_{k-1} + \left(\frac{M}{\Delta t} - C \right)^{-1} \cdot f_k \quad (7.43)$$

この式の形からすべての節点の熱容量を 0 にした場合でも計算可能であることがわかる。この時、右辺第1項は 0 で前時刻の温度分布は解に無関係となり、右辺第2項の境界条件だけによって解が決定される。つまり後退差分の実際の計算式をこのような形で行えば定常状態の計算も兼ねるものとすることができ実用上便利である。

その他、クランク-ニコルソン法と呼ばれる近似時間積分法²¹⁾があるが、これは前進差分法と後退差分法を半分ずつ混ぜ合わせたようなものである。近似精度はどちらの方法よりも良いとされているが、前進差分法の欠点である不安定性によって振動を起こしたりする。

7.4.3 解析的時間積分法

これまでの近似時間積分は実用上便利ではあっても真の意味で問題を解いたことにならないであろう。なぜならばそのようにして解を求めることは数値実験に過ぎないのであり、系の挙動を数式的に把握したことはないからである。こうしたことから解析的積分は重要である。

熱回路網の状態方程式は連立常微分方程式であり、簡略化して式 (7.19) で表される。この連立常微分方程式の形式解は次のような畳み込み積分で表される。この導き方については数学の本に詳しいが、例えば定数変化の法を使った方法^{7),19)}もある。

$$x(t) = \exp((t-t_0) \cdot C^*) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp((t-\tau) \cdot C^*) \cdot f^*(\tau) d\tau \quad (7.44)$$

ここで

$$\Phi(t-t_0) = \exp((t-t_0) \cdot C^*) \quad (7.45)$$

とおき、これを推移マトリクスと呼ぶ。したがって式 (7.44) は次のようにも記述できる。

$$x(t) = \Phi(t-t_0) \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \cdot f^*(\tau) d\tau \quad (7.46)$$

この解式はいうなれば形式的なものである。つまり実際的に時間積分の計算を行う形になっていない。第2項の積分の中で τ に関する関数が表に explicit な形で出てきていないからである。そこで射影分解²⁰⁾を利用する。まず C^* に関する固有値の定義式から次式が成立する。

$$C^* \cdot p_i = \alpha_i \cdot p_i \quad (7.47)$$

ここで C^* の固有値の一つを α_i 、対応する固有ベクトルを p_i とした。このとき次式で表される P_i が射影子と呼ぶものである。

$$P_i = (0, \dots, 0, p_i, 0, \dots, 0) \cdot (p_1, p_2, \dots, p_n)^{-1} \quad (7.48)$$

この射影子によればマトリクスの指数関数が内部のスカラの指数関数に関して次式のように陽に表示出来る^{7),19)}。

$$\exp(t \cdot C^*) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i t} \quad (7.49)$$

したがって前述の形式解も実際的計算が可能な次の形に書き直せる。

$$x(t) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{\alpha_i(t-\tau)} \cdot f^*(\tau) d\tau \quad (7.50)$$

ここで右辺第1項は自由項、第2項は強制項と呼ぶことにする。第1項は系自身の過渡的な応答特性に依存する分を表し、第2項は系への入力に依存する分を表している。以上の射影分解を用いて、折れ線や階段関数の入力に対する時間積分公式などを次に導く。

A. 折れ線状の入力

今もし扱う系が建物等の伝熱系であれば、外気温や日射量が入力となる。こうした不規則な変動であっても、適当な時間間隔 Δt 刻みで折れ線状に近似すれば実用上は十分である。このような入力に対する時間積分の公式を導く。

f^* は次式で定義されていた。

$$f^*(\tau) = M^{-1} \cdot f(\tau) \quad (7.51)$$

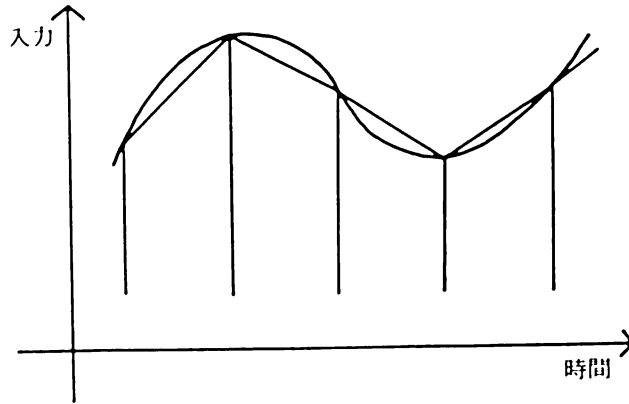


図 7.6 折れ線状の入力

ここで熱回路網の場合，その単位から $f(\tau)$ を熱流ベクトル， $f^*(\tau)$ を温度入力ベクトルと呼ぶことにする。

Δt 区間の時間積分を行い，この解式を得ておけば， Δt 毎に逐次に計算を進めていく漸化式となる。積分区間を $(k-1) \cdot \Delta t$ から $k \cdot \Delta t$ までとし，その積分変数を τ とする。関数 $f^*(\tau)$ はこの仮定により次のように表される。

$$f^*(\tau) = f^*((k-1) \cdot \Delta t) + \left[\frac{\tau - (k-1) \cdot \Delta t}{\Delta t} \right] \cdot (f^*(k \cdot \Delta t) - f^*((k-1) \cdot \Delta t)) \quad (7.52)$$

これを式 (7.50) の右辺第 2 項に代入し，積分を行う。

$$\begin{aligned} \int_{(k-1) \cdot \Delta t}^{k \cdot \Delta t} \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{a_i(k \cdot \Delta t - \tau)} \cdot f^*(\tau) d\tau &= \sum_{i=1}^n P_i \cdot \left[-\frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right)^2 \cdot e^{a_i \Delta t} \right. \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right)^2 + \left. \left(\frac{1}{a_i} \right) \cdot e^{a_i \Delta t} \right] \cdot f^*((k-1) \cdot \Delta t) \\ &+ \sum_{i=1}^n P_i \cdot \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right)^2 \cdot e^{a_i \Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right)^2 - \left(\frac{1}{a_i} \right) \right] \cdot f^*(k \cdot \Delta t) \end{aligned} \quad (7.53)$$

$f^*((k-1) \cdot \Delta t)$ と $f^*(k \cdot \Delta t)$ にかかる係数を次のようにおく。

$$a_{i0} = -\frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right)^2 \cdot e^{a_i \Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right)^2 + \left(\frac{1}{a_i} \right) \cdot e^{a_i \Delta t} \quad (7.54)$$

$$a_{i1} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right)^2 \cdot e^{a_i \Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right)^2 - \left(\frac{1}{a_i} \right) \quad (7.55)$$

また次のようにマトリクス U_0 ， U_1 を定義する。

$$U_0 = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i0} \quad (7.56)$$

$$U_1 = \sum_{i=1}^n P_i \cdot a_{i1} \quad (7.57)$$

U_0 ， U_1 は n 次の正方マトリクスである。これらを時間積分の漸化式における駆動マト

リクスと呼ぶことにする。さらに Δt の区間における推移行列は射影分解により次式で計算される。

$$\Phi(\Delta t) = \exp(\Delta t \cdot C^*) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{a_i \cdot \Delta t} \quad (7.58)$$

以上により $(k-1) \cdot \Delta t$ から $k \cdot \Delta t$ への漸化式は次式で記述される。

$$x(k \cdot \Delta t) = \Phi(\Delta t) \cdot x((k-1) \cdot \Delta t) + U_0 \cdot f^*((k-1) \cdot \Delta t) + U_1 \cdot f^*(k \cdot \Delta t) \quad (7.59)$$

マトリクス $\Phi(\Delta t)$, U_0 , U_1 は Δt を定めれば、時間積分の計算に先だって、定数マトリクスとして計算しておくことができる。式 (7.59) の漸化式によって、ある初期状態からはじめて逐次計算を進めていくことによりシミュレーションは行われる。

B. 階段状の入力

照明発熱など電気器具の発熱は階段関数的な入力であり、この場合の時間積分公式を導く。 $(k-1) \cdot \Delta t$ から $k \cdot \Delta t$ の区間では入力が一定値をとるという仮定をするから、この一定値が $(k-1) \cdot \Delta t$ でのものにするか、あるいは $k \cdot \Delta t$ でのものにするかの選択がある。もし後者の選択をすれば、再び式 (7.50) の右辺第2項の積分を行い、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{(k-1) \cdot \Delta t}^{k \cdot \Delta t} \sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{a_i \cdot (k \cdot \Delta t - \tau)} \cdot f^*(k \cdot \Delta t) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n P_i \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right) \cdot (e^{a_i \cdot \Delta t} - 1) \cdot f^*(k \cdot \Delta t) \end{aligned} \quad (7.60)$$

そこで次のようなマトリクス U_s を定めておく。

$$U_s = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \left(\frac{1}{a_i} \right) \cdot (e^{a_i \cdot \Delta t} - 1) \quad (7.61)$$

すると階段関数的入力に対する次式の漸化式が記述できる。

$$x(k \cdot \Delta t) = \Phi(\Delta t) \cdot x((k-1) \cdot \Delta t) + U_s \cdot f^*(k \cdot \Delta t) \quad (7.62)$$

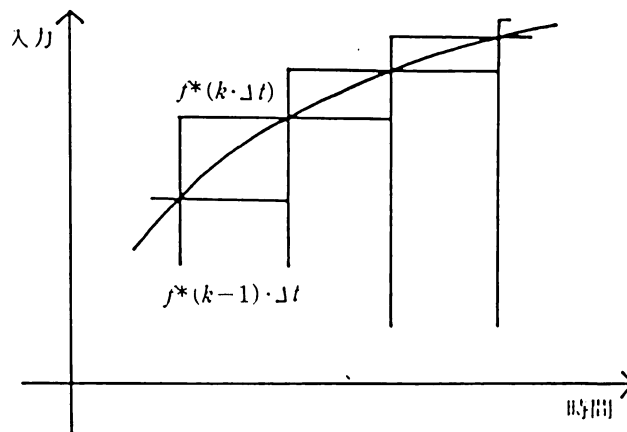


図 7.7 階段状の入力

前述したように $(k-1) \cdot \Delta t$ から $k \cdot \Delta t$ 区間での一定の入力値を $(k-1) \cdot \Delta t$ でのものをとれば同様にして

$$x(k \cdot \Delta t) = \Phi(\Delta t) \cdot x((k-1) \cdot \Delta t) + U_s \cdot f^*((k-1) \cdot \Delta t) \quad (7.63)$$

の漸化式が定められる。

以上、2種類の時間積分漸化式を導いた。これらの漸化式の数値的安定性は C^* の固有値が負の実数あるいは負の実部を持つことから証明できる¹⁹⁾。

C. 周期関数の入力

どのような入力の関数であってもフーリエ級数で表されることはよく知られている。また入力が離散的な測定値であっても調和分析をすればその級数に近似できる。このような周期関数の入力が伝熱系に作用した場合について、初期状態からの立ち上がりの過渡期ではなく、十分に時間が経過してからの周期定常に達した状態の解を求めたい時は、前節までの Δt 毎に進めていく時間積分法では計算時間が大変にかかる。そこで、このような周期的入力の関数に対する時間積分公式を導いておくこともできる²²⁾。

7.4.4 時間積分法に関するいくつかの工夫

ここでは時間積分を効率的に行うためのいくつかの方法を述べる。

A. 状態方程式の濃縮

扱おうとする状態方程式の次数が非常に大きくなってくればコンピュータのハード上の制限や計算経済性の問題が出て来る。したがって、高次の状態方程式をより低次のものに良好な近似精度で近似できれば、こうした問題の解決に役立つ。この方法の1つに濃縮と呼ぶ方法²³⁾がある。これは全節点のうち、熱容量の大小や入力の有無によって、従属節点の主節点による線型の従属関係を仮定し、時間領域の重み付き残差積分から状態方程式の次数を縮小する方法である。したがって実際の時間積分は縮小された状態方程式において行い、必要に応じて線型従属関係を用いて元の全状態変数も計算することができる。

B. サブシステムの連成

計算対象の系全体で一括して状態方程式を立ててしまうのではなく、いくつかのサブシステムに分割しておいてシミュレーションをすることも考えられる。これは主に2つの意義を持つ。一つは濃縮と同様にコンピュータの容量の制限に対応するためである。記憶容量は状態方程式の次数の2乗に比例する分だけ必要になる。したがって全体をいくつかの部分に分割しておけば、個々の状態方程式に必要とされる記憶領域の和は、全体で一括して立てる状態方程式によって必要となる記憶領域よりも小さくなる。もう一

つの意義はシステマティックなモデル化のためである。設計のバリエーションによって全体のバリエーションも無数に存在し得る。しかしこの無数のバリエーションも、全体をそれぞれ自身が類型的な部分に分割できるとすれば、これらの部分の組合せのバリエーションであると考えることができる。例えばパッシブソーラーハウス伝熱系を付設温室、蓄熱槽、蓄熱壁や室空間の部分の集まりと考え、これらの状態方程式のモデルをデータライブラリとして保持しておけば建物全体系のモデル化はかなり簡単に行うことができよう。こうした方法としてサブシステムの状態方程式の連成理論^{24),19)}がある。これは個々のサブシステムから出力方程式をとりだし、サブシステム間の媒介変数に関する時間漸化式をつくり、全体の連成をとる方法である。この理論によれば全体をサブシステムに分割したことによる時間積分の誤差はない。

C. 推移行列の近似合成

同様に大規模節点数モデルに対応する方法がある。この方法においては全体系を1つの状態方程式で扱うため、記憶容量の軽減は出来ないが、推移行列を計算する時間を大幅に減らすものである。例えば時間積分に後退差分をとった場合、近似推移行列を計算する際に逆行列計算が必要である。この計算時間はマトリクスの次数の3乗に比例する。したがって大規模節点数モデルにおいては計算時間の増大が記憶領域の増大よりもはるかに重大な問題となってくるのである。こうした意味で有用なこの方法は、全体の推移行列を各サブシステムの推移行列の直和で近似化する方法²⁵⁾である。これは別の視点から見れば、サブシステムの内部では後退差分などの陰伏的な方法が、サブシステム間では前進差分の時間積分がとられていると言える。したがって全体系では安定条件が課せられる。この安定条件はサブシステムを1個の節点のように見なして前進差分の場合と同様にして導かれる。

D. 熱水分同時移動系

その他、熱と水分の同時移動の系もやはり状態方程式で表すことができ、時間積分も同様に行えることが示されている²⁶⁾。水分の蒸発や吸着によって熱と水分の両者の系は相互影響をもっている。まず各々の系において温度ベクトルと湿度ベクトルについての連立常微分方程式モデルが構成でき、次に全体系において温度と湿度のベクトルを合わせた全体の状態ベクトルを定義することによって全体系での状態方程式が記述できる。こうした複合拡散系の固有値の性質も熱回路網と同様であることが証明されている¹⁹⁾。

7.5 換気回路網への応用

換気などの空気の流れによる熱の移動は建築の伝熱において重要な部分を占める。したがってその風量を正確に計算する方法が必要である。またエネルギーや熱的快適性の観点だけでなく、空気の汚濁度などの観点からも換気風量の計算は重要である。ミクロな視点で空気の流れを記述するのはナビエストークスの方程式である。この数値解法によって1つぐらゐの室内の流れは一応解けるが、多数室から成り機械換気装置も含む全体的な建築換気系を解くためには、もっとマクロな換気計算モデルの方が有用になってくる。そこでここでは建物と機械換気装置を合わせて一般的にモデル化する方法と換気非線型連立方程式を振動などを起こさずに確実に解く数値解法等について述べる。

7.5.1 全圧節点系のモデル化法

換気計算の基本的物理原理は同様であっても、コンピュータ計算モデルとしては様々なものが示されている。ここでのモデルは一般性はもちろん、コンピュータモデルとして単純で最小のデータ構造を持つものである。機械換気装置を含め建物全体を一体的にモデル化する方法として全圧節点系の考え方を述べる。図7.8にこの1つの例を示す。

モデル化の手順は次のようにする。

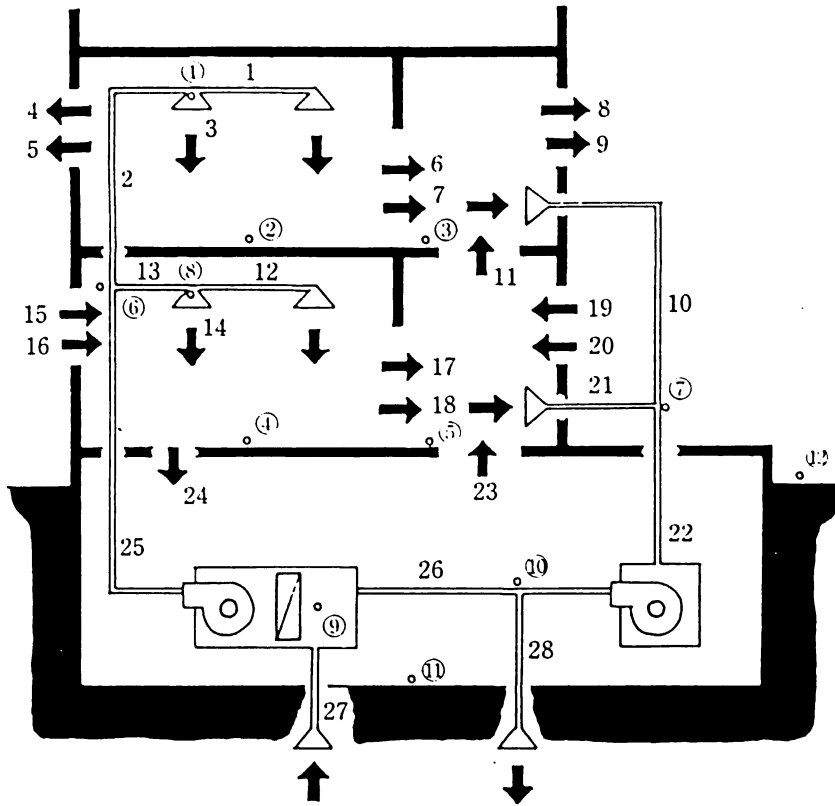
(i) 建物を換気モデル上のセルに分割する。またエアダクトなどの分岐点にもセルを設ける。原則的に1つのセルに対応する空間は一様な温度であるという前提を設けているため、空間内に著しい温度分布があるときには各々一様と見なせる程度に分割する必要がある。

(ii) 流路をモデル化する。大きな高さを持つ開口は分割しそれぞれの高さの中心に位置するものとする。

(iii) 圧力節点を定義する。各セル内では動圧はすべて静圧に変換されていると見なし、底面での静圧を圧力節点とみなす。これらの節点に番号を付け、外気地表面の静圧は最後の番号とする。またこれらの節点の高さを得る。

(iv) 各流路の定義を行う。流路の両側を任意に*i*側、*j*側と定義する。これらの*i*側、*j*側の圧力節点番号を求める。モデル化された高さを求める。圧力損失係数と指数の係数を求める。ただし送風機は流路の属性として扱うが、送風機全圧の風量による関係式の係数を求める。

以上のモデル化の方法によってどのような換気系であっても結局セルと流路の集まり



上図の建物を下図の様にモデル化する

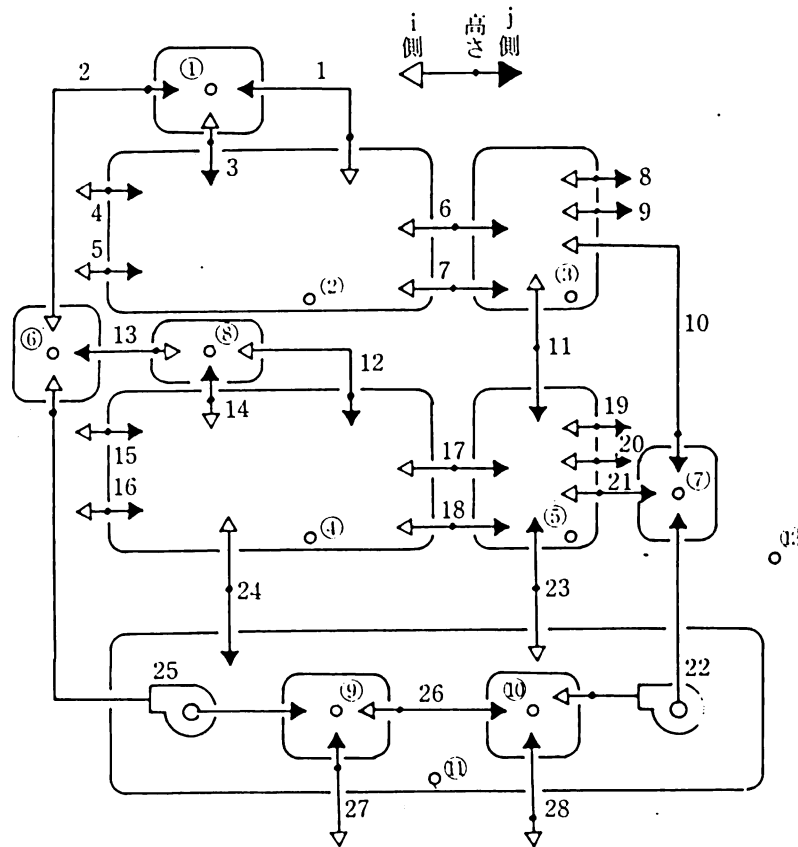


図 7.8 換気回路網のモデル化法

に帰着される。

7.5.2 風量収支計算のための換気回路網

換気計算における未知数は室内圧と風量であるが、解法によって数学モデルは異なってくる。建築換気系においては室内圧の数に比べ流路の数が多いため圧力仮定法が有利である。圧力仮定法とは仮定された節点圧力における各室での風量残差を計算し、これらを0にもっていくように節点圧力に繰り返し修正を加えていくものである。最も重要な計算過程はその風量残差を求めるところである。この風量残差の計算を、様々なセルと流路の結び付き方をする任意の換気系において、汎用性を持ちながらも単純なアルゴリズムで行えるように工夫をしたのがここで述べる換気回路網である。この計算のため

表 7.1 風量残差計算のデータ構造

		内 容	配列名	サイズ
ス カ ラ	計算モデルのサイズ	総室数	n	—
		総通気路数	m	—
ベクトル	室(セル)の情報	床の高さ [m]	$l(i)$	$n+1$
		空気の密度 [kg/m ³]	$\rho(i)$	
		室内圧 [N/m ²]	$p(i)$	
		風量残差 [m ³ /sec]	$v(i)$	
	通気路の情報	通気路の高さ [m]	$h(k)$	m
		通気路の面積 [m ²]	$a(k)$	
		圧力損失係数	$\zeta(k)$	
		圧力損失指数	$\eta(k)$	
		風量 [m ³ /sec]	$q(k)$	
		外気風圧・ i 側 [N/m ²]	$w_i(k)$	
		外気風圧・ j 側 [N/m ²]	$w_j(k)$	
		圧力損失の回帰係数	$d_1(k)$	
			$d_2(k)$	
		送風機性能係数	$b_0(k)$	
			$b_1(k)$	
	$b_2(k)$			
	$b_3(k)$			
	通気路と室(セル)の接続情報	通気路の i 側の室番号	$\sigma_i(k)$	
		通気路の j 側の室番号	$\sigma_j(k)$	
流れの向きの情報	風上側室番号	$\sigma_u(k)$		
	風下側室番号	$\sigma_d(k)$		

のデータ構造が表 7.1 である。この中で大切なのが流路とセルの接続情報 $\sigma_i(k)$, $\sigma_j(k)$ と流れの向きの情報 $\sigma_u(k)$, $\sigma_d(k)$ の、流路毎に内部に節点番号を持つ配列である。要はこれらの配列を間接アドレスに使うことにより計算アルゴリズムを単純にしているのである。

まず送風機を持たない流路の k 番について、 i 側からかかる静圧を p_i , j 側からのそれを p_j とすれば、それぞれ次式で計算される。

$$p_i = p(\sigma_i(k)) - \{h(k) - l(\sigma_i(k))\} \cdot \rho(\sigma_i(k)) \cdot g + w_i(k) \quad (7.64)$$

$$p_j = p(\sigma_j(k)) - \{h(k) - l(\sigma_j(k))\} \cdot \rho(\sigma_j(k)) \cdot g + w_j(k) \quad (7.65)$$

p_i と p_j の大小関係により風上側となる節点番号 $\sigma_u(k)$, 風下側となる $\sigma_d(k)$ が決定される。圧力差を Δp とすれば次式で計算される。

$$\Delta p = |p_i - p_j| \quad (7.66)$$

この Δp と圧力損失などの諸情報から k 番流路の風量 $q(k)$ は次式で計算される。

$$q(k) = a(k) \cdot \left(\frac{2 \cdot \Delta p}{\xi(k) \cdot \rho(\sigma_u(k))} \right)^{\frac{1}{n(k)}} \quad (7.67)$$

送風機を持つ流路については送風機特性曲線が $b_0(k)$, $b_1(k)$, $b_2(k)$, $b_3(k)$ を係数に持つ 3 次曲線で表されているから、カルダノなどの解析的な方法²⁷⁾ で $q(k)$ について解くために流路の差圧と風量の関係も最小二乗法等により $q(k)$ の 1 次と 2 次の式に回帰しておく。

$$\xi(k) \cdot \frac{\rho}{2} \left(\frac{q(k)}{a(k)} \right)^{n(k)} \cong d_1(k) \cdot q(k) + d_2(k) \cdot q^2(k) \quad (7.68)$$

送風機加圧が i 側から行われる場合と j 側からの場合についてそれぞれ次の $q(k)$ に関する 3 次方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} p_i + b_0(k) + b_1(k) \cdot q(k) + b_2(k) \cdot q(k)^2 + b_3(k) \cdot q(k)^3 - p_j \\ = d_1(k) \cdot q(k) + d_2(k) \cdot q(k)^2 \end{aligned} \quad (7.69)$$

$$\begin{aligned} p_j + b_0(k) + b_1(k) \cdot q(k) + b_2(k) \cdot q(k)^2 + b_3(k) \cdot q(k)^3 - p_i \\ = d_1(k) \cdot q(k) + d_2(k) \cdot q(k)^2 \end{aligned} \quad (7.70)$$

$q(k)$ の根は複素数の範囲で 3 個あるが少なくとも 1 個は実数である。根の状況を調べ正の最大根を求める風量とする。送風機がある場合もない場合と同様にして風上側の節点番号 $\sigma_u(k)$, 風下側の節点番号 $\sigma_d(k)$ が定められる。

ここで i 番のセルでの風量残差を $v(i)$ とすればすべてのセルでの風量残差は次の簡単なアルゴリズムで計算される。セルとセルのつながりを表す複雑な配列情報も判別も不用であることに注意する。ただし m は総流路数である。

$$\left[\begin{array}{l} k=1, 2, \dots, m \text{ について} \\ v(\sigma_u(k)) \longleftarrow v(\sigma_u(k)) + q(k) \\ v(\sigma_u(k)) \longleftarrow v(\sigma_u(k)) - q(k) \\ \text{を計算する} \end{array} \right. \quad (7.71)$$

ここに \longleftarrow は代入を意味する。以上の風量残差計算の過程をサブルーチン化しておけば次のヤコビアンマトリクスをつくる部分を単純にできる。

7.5.3 非線型方程式の解法

総セル数を n として節点静圧 $p(i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) に適当な修正量 $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n$ を施して風量残差を 0 に近づける。いま $v(i)$ は v_i , $p(i)$ は p_i のように表示することにし、 $p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2, \dots, p_n + \Delta p_n$ の点での v_i のテーラー展開第 1 項までを記述すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} v_i(p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2, \dots, p_n + \Delta p_n) &\cong v_i(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ &+ \frac{\partial v_i}{\partial p_1} \cdot \Delta p_1 + \frac{\partial v_i}{\partial p_2} \cdot \Delta p_2 + \dots + \frac{\partial v_i}{\partial p_n} \cdot \Delta p_n \end{aligned} \quad (7.72)$$

左辺がちょうど 0 になると仮定する。この式を $i=1, 2, \dots, n$ について記述し、修正量ベクトル $p_c = (\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n)$ と風量残差ベクトル $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ について整理すると次式を得る。

$$J \cdot p_c = -v \quad (7.73)$$

$$p_c = -J^{-1} \cdot v \quad (7.74)$$

J はヤコビアンマトリクスと呼ばれているものでその i 行 j 列要素は $\partial v_i / \partial p_j$ である。式 (7.74) で p_c を求めて、仮定した圧力ベクトルに加えていくのが普通のニュートンラプソン法である。しかしこれでは解の振動などを起こし収束しない場合がある。そこで次に修正ニュートンラプソン法を示す¹⁹⁾。さらにこれは続く 4 つの手法を伴って初めて効果を表す。

A. 振動防止係数

式 (7.74) で求めた修正量 p_c をそのまま前回の仮定圧力ベクトル p_{old} に加えて今回の仮定ベクトル p_{new} を求めてはならない。振動防止係数 $\varepsilon = 1/2$ を乗じてから施す。すなわち、

$$p_{new} = p_{old} + \frac{1}{2} \cdot p_c \quad (7.75)$$

である。この理由は換気非線型方程式が持つ独特の性質にある。図 7.9 には単室で 2 つ

の流路を持つ最も単純な場合を示す。この場合何も換気駆動力がないときに室内圧 p に対する風量残差 v の曲線が図 7.10 である。 $p=0$ の自明の解をはさみ v の関数は異なる。圧力損失指数 $\eta=2$ であればどの仮定値 p_0 から始めてもニュートンラプソン法は

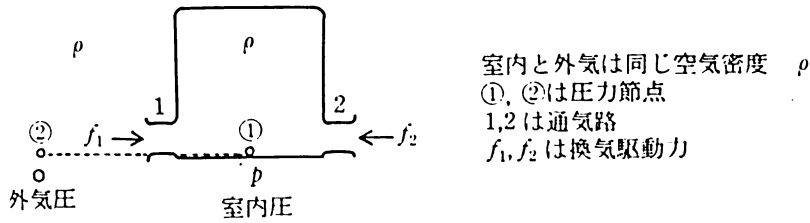


図 7.9 最も単純な要素モデル

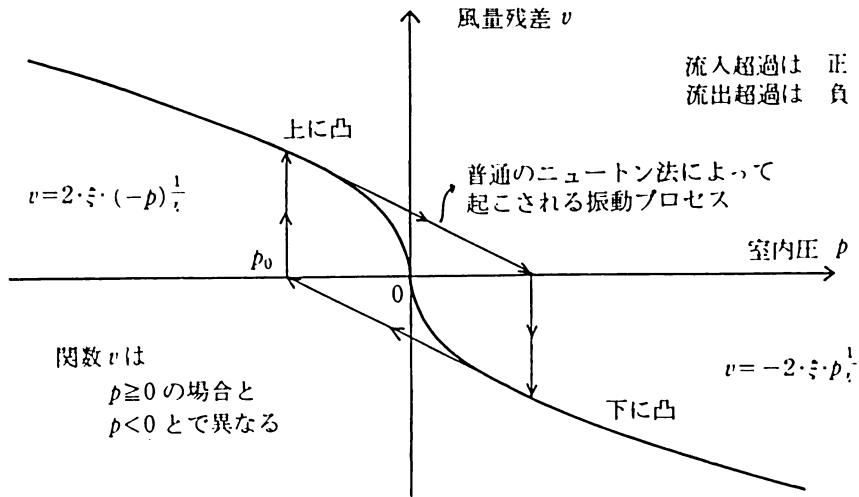


図 7.10 完全な振動

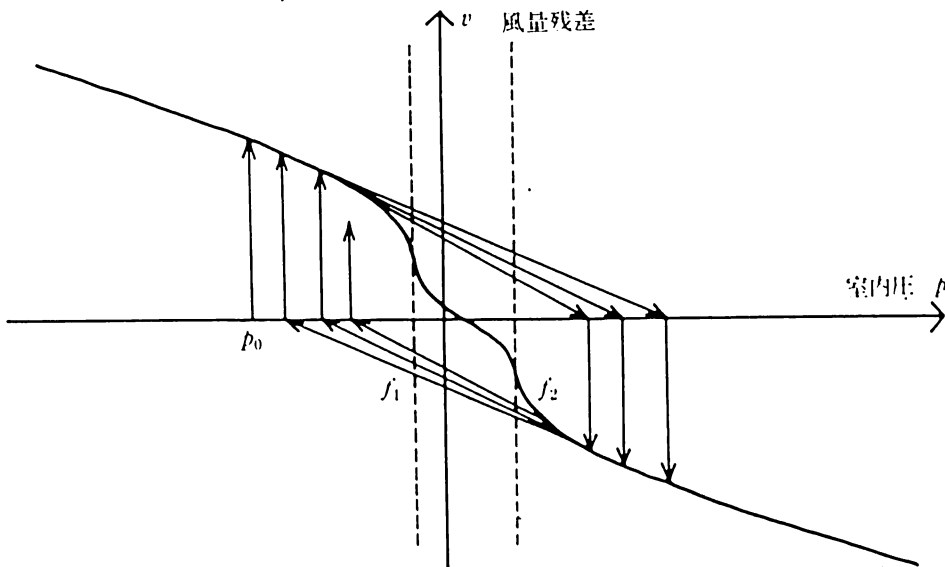


図 7.11 振動による収束困難

完全な振動を繰り返す。流路に f_1 と f_2 の何らかの駆動力が加わったときにも大部分は同様な曲線の形を示し図 7.11 で表される。縦の点線で表される f_1 と f_2 の区間が縮まって 0 になったのが図 7.10 の特殊な場合である。したがってこの区間の外からニュートンラプソン法を開始すれば同じく振動を起こす。この区間は一般に狭く、それ故に初期値を区間内に入れるのは困難なのである。

B. ヤコビアンをつくりかた

偏導関数 $\partial v_i / \partial p_j$ は数値微分で求めるのがよい。 v は風量の向きによって切り換わる関数であるから解析微分によって求めようとするアルゴリズムは複雑になる。特に送風機を持つ流路においては送風機全圧を風量の 3 次の多項式で表したので面倒である。そしてこの数値微分を行う場合は中央差分で行う必要がある。これは図からわかるように解の近くでは曲線の傾きが垂直に近づき変化が激しいからである。計算式は次のように表される。

$$\frac{\partial v_i}{\partial p_j} \cong \{v_i(p_1, \dots, p_j + \Delta p, \dots, p_n) - v_i(p_1, \dots, p_j - \Delta p, \dots, p_n)\} / 2 \cdot \Delta p \quad (7.76)$$

ヤコビアンをつくる計算プログラムは前述の風量残差を計算する手順をサブルーチンとして用いれば数行ですむ。

C. 初期値のとり方

ニュートンラプソン法において初期仮定値は解の近くになければならない。この物理的状态として全室が外気温に等しく、風圧や送風機加圧も 0 の場合が考えられる。こうした換気駆動力 0 の初期値は次式で計算される。ただし $i=1, 2, \dots, n$ である。

$$p(i) = p(n+1) - \rho(n+1) \cdot l(i) \cdot g \quad (7.77)$$

D. スケーリング

ヤコビアンの逆行列を計算する際には特に重要な処理である。開口の面積や抵抗のばらつきが大きい系においてはヤコビアンの要素の大小のばらつきも大きい。このようなマトリクスに逆行列計算を行うと計算時間が長くかかったりアンダーフローのトラブルを起こしたりしやすい。行のスケーリングとは各行においてその行の最大要素でその行全部を割ってやることである。そして逆行列を計算し、今度は格納しておいた最大要素で各列を各々割って、元の問題の答えにもどすようにする²⁸⁾。

E. 倍精度計算

物理現象として空気は非常に微差圧でも流動するので、計算上もこれを表現できなければならない。特に数値微分の Δp は加減算が意味をなす最小の値ぐらいにとる。

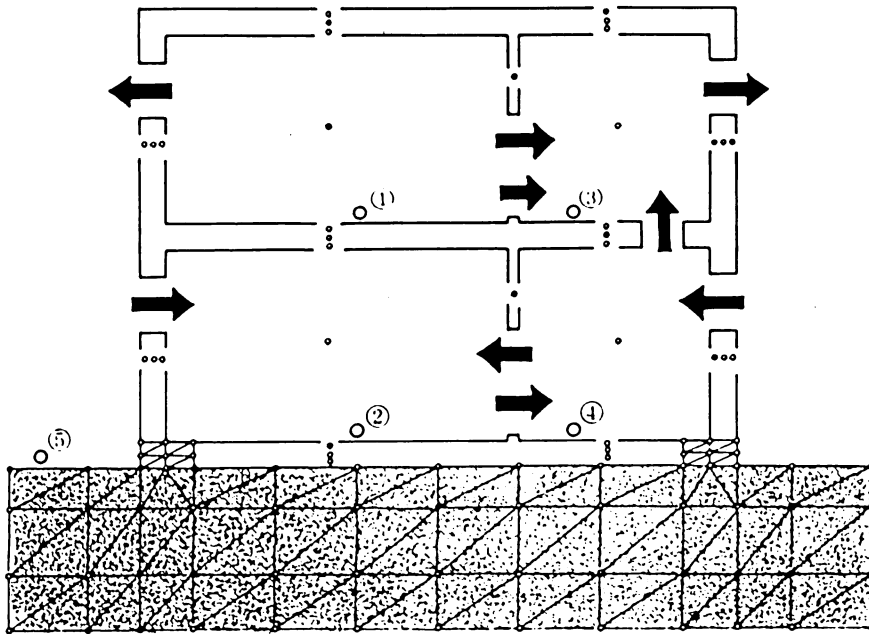


図 7.12 熱系と換気系の連成

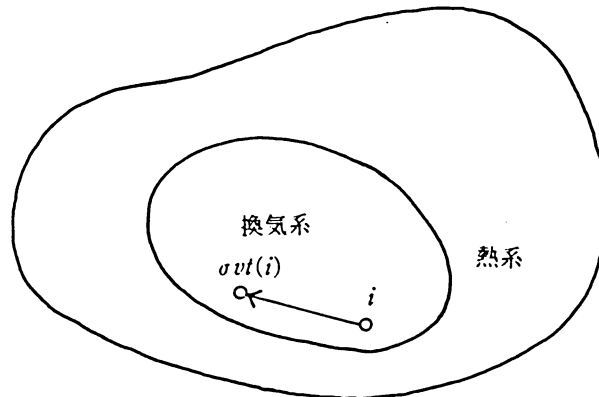


図 7.13 熱系と換気系の節点の対応

7.5.4 伝熱と換気の連成

換気量は室内外の温度差に影響され、逆に室温は換気量に影響されるから伝熱系と換気系は相互影響を持つ。別な見方をすれば、換気モデルは空気密度を入力とし、風量を出力とする。一方、伝熱モデルは風量をパラメータとし、空気密度を出力とする。また熱系は温度の節点系で換気系は全圧の節点系である。したがって両者の節点を持つ物理量が異なっても各々の室空間においては節点が1対1に対応する。しかし固体中の熱伝導を表す節点に対応する換気系の節点はない。こうした様子を描いたのが図7.12である。さらに i を換気系の節点番号とすると $\sigma_{vt}(i)$ を熱系の節点番号とする。この節点番号対応を図式化したのが図7.13である。この節点番号対応関係を用いて換気風量 (m^3/s) による一般化熱コンダクタンスを次のように計算できる。

$$\left[\begin{array}{l} k=1, 2, \dots, m \text{ について} \\ i \leftarrow \sigma_{vt}(\sigma_d(k)) \\ j \leftarrow \sigma_{vt}(\sigma_u(k)) \\ c_{ij} \leftarrow c_{ij} + c_p \cdot \rho \cdot q(k) \\ \text{を計算する} \end{array} \right. \quad (7.78)$$

ここに c_p , ρ は各々空気の比熱と密度である。逆に熱系からの出力である空気温度(摂氏)はゲイリュサックの法則により、次式で密度に換算される。

$$\left[\begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n \text{ について} \\ \rho(i) \leftarrow 353.2 / (273.2 + x(\sigma_{vt}(i))) \\ \text{を計算する} \end{array} \right. \quad (7.79)$$

以上のようにして両系の相互影響がモデル化される。

7.6 実際のプログラミング上の留意点

実際のプログラムのデータ構造を単純にするため、次のようなことをお奨めしたい。それは FORTRAN におけるマトリクスについてであるが、例え 2 次元であっても 1 次元の配列として扱うのである。マトリクス A の i 行 j 列要素は $A(i, j)$ とするのではなく、 $A(i + N * (j - 1))$ とする。ここに N は A の行の大きさである。つまりマトリクス内の要素を 1 次元配列に行優先で格納する。行優先とは要素の添え字 i と j について、行の方を早く変化させることである。またこの種の配列のサブルーチン内での配列宣言は $A(1)$ のようにし、アーギュメントにおいてメインプログラムに引き渡す。またメインプログラムにおける配列宣言は 1 次元で、全要素の個数の大きさ以上で行う。

7.7 さらに進んだ問題について

この章においては伝熱と換気のシミュレーションをする方法について述べてきた。そのために用いるこの熱回路網モデルは一般的拡散系に適用できるものであるが、数学的には状態方程式で記述される。したがってシミュレーションとは状態方程式のシステムパラメータ(係数)を与えて時間積分を行い、状態値を求めていくことである。しかし時には逆の要請がある。つまり状態値は測定によって得て、これをもとにシステムパラメータを推定する場合である。こうした問題を逆探問題あるいはシステムパラメータの同定問題というが、解法の理論が最小二乗法を基本にして展開されている²⁹⁾。この同定理

論を応用することによって多数室換気測定システム^{30),31)}や建物の熱的性能の測定システム³²⁾がつけられている。さらにこの熱回路網の状態方程式を制御モデルに用いて、現代制御理論を冷暖房の分野に応用する試みも行われている。特に最適レギュレータ理論を室温制御に適用^{33),34)}したり、放射式と対流式の複合暖房システムの最適エネルギー配分に応用³⁵⁾されたりしている。以上のようにこの熱回路網モデルはシミュレーションだけでなく測定や制御にも有用と考えられる。

参 考 文 献

- 1) O. C. Zienkiewicz, 吉識雅夫, 山田嘉昭監訳: 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 1977.
- 2) 原武久, 非構造分野における有限要素法の基礎, 昭晃堂, 1981.
- 3) Suhas V. Patankar, 水谷幸夫, 香月正司共訳: コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1985.
- 4) Solar Energy Laboratory, University of Wisconsin, Madison: Modeling of Solar Heating and Air Conditioning, NSF-RANN-SE-GI-34029-PR-72-4
- 5) Julius T. Tou, 中村嘉平, 伊藤正美, 松尾勉, 共訳: 現代制御理論, コロナ社, 1969.
- 6) 木村建一, 奥山博康: 熱回路網数値解析法による自然空調に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集, p. 333, 1976.10.
- 7) 奥山博康, 木村建一: 建築物の熱回路系における推移行列と射影分解による時間数値積分公式, 日本建築学会論文報告集, Vol. 269, p. 127, 1978. 7.
- 8) 奥山博康: 建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究, 早稲田大学, 建築環境工学, 博士号学位論文, 1987.12.
- 9) 平松良雄: 通気学, 内田老鶴圃新社, 1974.7.
- 10) 石原正雄: 建築換気設計, 朝倉書店, 1969.
- 11) 寺井俊夫, 松下敬幸, 深井弘志: 火災時の避難と煙流動の統一的取り扱いについて(その2) インシデンス行列を用いた二層流煙流動の非定常計算, 日本建築学会大会学術講演梗概集, p. 613, 1983.9.
- 12) 奥山博康: 換気回路網のモデル化法とその非線型連立方程式の解法, 空気調和衛生工学会学術講演会講演論文集, p. 729, 1989.10.
- 13) 浦野良美, 石原修: 建物の非定常熱負荷計算における熱回路法の適用, 第1報, 基礎理論解析, 日本建築学会論文報告集, 第227号, p. 91, 1975.1.
- 14) 石原修: 建物の非定常熱負荷計算における熱回路法の適用, 第5報, 多数室の熱的性状解析, 日本建築学会論文報告集, 第289号, p. 111, 1980.3.
- 15) 奥山博康: 熱回路網モデルの数学的精度に関する数値実験, 空気調和衛生工学会学術講演論文集, p. 469, 1988.9.
- 16) 木村建一: 建築設備基礎理論演習, 学献社, 1970.
- 17) 奥山博康: 熱回路網の概念による各種の集中定数化法の統一, 空気調和衛生工学会学術論文集, p. 277, 1986.10.
- 18) 清水信行, 渡辺嘉二郎, 嶋田健司, 鎌田美知枝, 山本鎮男: 大次元常微分方程式の直接数

- 値解法, 日本機械学会論文集 (第1部), 43巻368号, p.1272, 1977.4.
- 19) 奥山博康: 建築物の熱回路網モデルに関する理論的研究, 清水建設研究報告別冊第26号, 1989.6. (博士号学位論文の印刷広報版)
 - 20) 斉藤正彦: 線型代数入門, 東京大学出版会, 1969.
 - 21) 伝熱工学資料 (改訂第4版), 日本機械学会, 1986.
 - 22) 奥山博康: 熱回路網状態方程式モデルへの周期的入力の解析解, 空気調和衛生工学会学術講演会講演論文集, p.657, 1990.10.
 - 23) 奥山博康: 熱回路網によるシミュレーションの理論と応用, 空気調和衛生工学会学術論文集, p.541, 1983.10.
 - 24) 奥山博康: 空調システムシミュレーションの理論とアルゴリズム, 空気調和衛生工学会学術論文集, p.461, 1982.10.
 - 25) 奥山博康, 益子智久: 回路網モデルによる建築環境シミュレーションプログラムの開発 (その5: 大規模節点数モデル対応法とPID制御の計算事例), 空気調和衛生工学会学術講演会講演論文集, p.737, 1989.10.
 - 26) 奥山博康: 熱水分同時移動の解析法について, 日本建築学会大会学術講演梗概集, p.761, 1982.10.
 - 27) I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew: 数学ハンドブック, 矢野健太郎監修, 宮本敏雄訳編, 森北出版, 1986.6.
 - 28) 戸川隼人: マトリクスの数値計算, オーム社, 1976.
 - 29) 奥山博康: 一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論, 日本建築学会論文報告集, Vol.344, p.103, 1984.10.
 - 30) 奥山博康: 一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論 (その3: 多数室換気測定システムの適用), 日本建築学会大会学術講演梗概集, p.409, 1985.10.
 - 31) Hiroyasu Okuyama: System Identification Theory of the Thermal Network model and an Application for Multi-chamber Airflow Measurement, Building and Environment, Vol. 25, No. 4, pp. 349-363, Pergamon Press, 1990.
 - 32) 奥山博康: 一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論 (その4: 建物の熱的性能の現場測定法への適用), 日本建築学会大会学術講演梗概集, p.723, 1986.8.
 - 33) 奥山博康: 熱回路網の状態方程式モデルによる最適制御理論 (その1: 最適レギュレータ制御の基本的理論と数値実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (環境), p.767, 1989.10.
 - 34) 奥山博康: 熱回路網の状態方程式モデルによる最適制御理論 (その2: 拡大系による基本理論の一般化と数値実験), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (環境) p.745, 1990.10.
 - 35) 奥山博康: 熱回路網の状態方程式モデルによる最適制御理論 (その3: 最適レギュレータの多変数入力系での適用例), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (環境), p.871, 1991.9.